

inaccurately by means of the convex-valued compact-valued maps by elements of the set of single-valued maps are proved in the article.

Key words: *the best at sense of the family convex functions of uniform reconstitution; the functional dependence that is defined inaccurately; the convex-valued compact-valued maps; the extremal element; the necessary and sufficient conditions and criteria of the extremal element.*

Отримано: 14.04.2016

УДК 004.94

А. Я. Карвацький, д-р техн. наук, професор

А. Ю. Педченко, аспірант

Національний технічний університет України «КПІ», м. Київ

РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ НЕСТАЦІОНАРНИХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ З ВИКОРИСТАННЯМ CAD-СИСТЕМ

Наведено методику й алгоритм розв'язання нелінійних нестационарних задач теплопровідності з внутрішніми джерелами теплоти методом скінченних елементів (МСЕ). На базі програмного забезпечення Mathcad розроблено авторський програмний код для розв'язання поставленої задачі, за результатами виконання якого проведено порівняльний аналіз з даними точних розв'язків та з результатами числових розв'язків, отриманими за допомогою програмних продуктів Matlab.

Ключові слова: *моделювання теплових процесів, метод скінченних елементів, апроксимація, Mathcad, лінеаризація.*

Вступ. Проблема розв'язання нелінійних задач теплопровідності залишається актуальною і на сьогоднішній день. А зі збільшенням питомої потужності технічних об'єктів, у зв'язку із мініатюризацією пристроїв, дослідженням нових теплопровідних матеріалів стає ще більш актуальною, оскільки, надійність та енергоефективність таких об'єктів визначається ще на етапі їх проектування [1].

Для розв'язання задач теплопровідності найбільшого поширення в наш час отримали системи, що використовують засоби комп'ютерного інжинірингу, які вимагають зазвичай значних обчислювальних потужностей [2]. Тому доцільним є розробка в середовищі Mathcad раціональних методик та наочних алгоритмів числового розв'язання нестационарних задач теплопровідності зі значною температурною залежністю теплофізичних властивостей.

Постановка задачі. Рівняння нелінійної нестационарної теплопровідності ізотропного середовища з внутрішніми джерелами теплоти можна записати у вигляді

$$c_p(T)\rho(T)\frac{\partial T}{\partial \tau} = \nabla \cdot [\lambda(T)\nabla T(x)] + q_v(T), \quad \tau > 0, \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

де c_p — масова ізобарна теплоємність, Дж/(кг·К); ρ — густина, кг/м³; T — абсолютна температура, К; τ — час, с; $\nabla = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, 3$ — оператор Гамільтона, м⁻¹; x_i , $i = 1, 2, 3$ — декартові координати, м; λ — коефіцієнт теплопровідності, Вт/(м·К); x — радіус-вектор декартової системи координат, м; q_v — об'ємна густина внутрішнього джерела теплоти, Вт/м³; $\Omega \in R^3$ — тривимірна розрахункова область.

Початкові умови для (1) в момент часу $\tau = 0$:

$$T(x)|_{\Omega} = T_0, \quad (2)$$

де T_0 — початкова температура, К.

Граничні умови (ГУ) для (1) в момент часу $\tau > 0$ можуть включати ГУ трьох родів:

- I роду — задана температура T_b на границі Γ_I поверхні Ω

$$T(x)|_{\Gamma_I} = T_b; \quad (3)$$

- II роду — задана нормальна складова вектора густини теплового потоку на границі Γ_{II} поверхні Ω

$$q_n|_{\Gamma_{II}} = n \cdot [-\lambda(T)\nabla T], \quad (4)$$

де q_n — нормальна складова вектора густини теплового потоку $q = -\lambda(T)\nabla T$, Вт/м²; n — вектор зовнішньої нормалі до Ω ;

- III роду — задані конвективні умови теплообміну на границі Γ_{III} поверхні Ω

$$n \cdot [-\lambda(T)\nabla T]|_{\Gamma_{III}} = \alpha(T)(T - T_p), \quad (5)$$

де α — коефіцієнт тепловіддачі, Вт/(м²·К); T_p — температура оточуючого середовища, К.

Система рівнянь (1)–(5) є повним формулюванням нелінійної нестационарної задачі теплопровідності ізотропного середовища з внутрішніми джерелами теплоти.

Методика числового розв'язання. Для числового розв'язання скористаємося МСЕ [3–5]. Для формулювання системи дискретних рівнянь МСЕ використовуємо метод Гальоркіна, тобто коли за вагову функцію обирається функція форми скінченного елемента (СЕ). В результаті для (1)–(5), після дискретизації Ω на СЕ i , використовуючи для похідної

за часом перший порядок апроксимації $O(\Delta\tau)$ [6], отримуємо таку систему дискретних рівнянь МСЕ за умови її формування за СЕ

$$\sum_{e=1}^M \left\{ - \left[C^{(e)}(\bar{T}) \right] \frac{\left\{ \bar{T}^{(e)} \right\} - \left\{ T^{(e)} \right\}}{\Delta\tau} - \left(\left[K_{\lambda}^{(e)}(\bar{T}) \right] + \left[K_{\alpha}^{(e)}(\bar{T}) \right] \right) \left\{ \bar{T}^{(e)} \right\} + \right. \quad (6)$$

$$\left. + \left\{ f_{q_v}^{(e)}(\bar{T}) \right\} + \left\{ f_{\alpha}^{(e)}(\bar{T}) \right\} - \left\{ f_q^{(e)} \right\} \right\} = 0,$$

де (e) — індекс СЕ; M — кількість СЕ; $\{\bar{T}\}$, $\{T\}$ — вектори абсолютної температури СЕ на верхньому та нижньому часових рівнях, відповідно, K ; $\left[C^{(e)}(\bar{T}) \right]$, $\left[K_{\lambda}^{(e)}(\bar{T}) \right]$, $\left[K_{\alpha}^{(e)}(\bar{T}) \right]$ — матриці жорсткості СЕ, що пов'язані з демпфіруванням (теплоємністю) (Дж/(м³·К)), теплопровідністю (Вт/(м³·К)) та зовнішнім конвективним теплообміном (Вт/(м³·К)), відповідно; $\left\{ f_{q_v}^{(e)}(\bar{T}) \right\}$, $\left\{ f_{\alpha}^{(e)}(\bar{T}) \right\}$, $\left\{ f_q^{(e)} \right\}$ — вектори СЕ, що пов'язані з внутрішнім джерелом теплоти, зовнішнім конвективним теплообміном і густиною теплового потоку, Вт/м³.

Інтегральні співвідношення для визначення матриць $\left[C^{(e)} \right]$, $\left[K_{\lambda}^{(e)} \right]$, $\left[K_{\alpha}^{(e)} \right]$ і векторів $\left\{ f_{q_v}^{(e)} \right\}$, $\left\{ f_{\alpha}^{(e)} \right\}$, $\left\{ f_q^{(e)} \right\}$ СЕ у випадку лінійних задач наведено в [3–5]. У разі нелінійної задачі ці вирази є залежними від температури і тому підчас її розв'язання ітераційними методами потребують перерахунку на кожному кроці виконання ітерацій, що є вкрай неефективним особливо для нестационарних задач. Для того щоб уникнути цього необхідно попередньо виконати їх перетворення, враховуючи при цьому ізотропність фізичних властивостей середовища. Наприклад, для матриці жорсткості, пов'язаної з теплопровідністю, будемо мати

$$\left[K_{\lambda}^{(e)}(\bar{T}) \right] = \int_{V^{(e)}} \lambda(T) [B]^T [B] dV \approx$$

$$\approx \lambda \left(T_m^{(e)} \right) \int_{V^{(e)}} [B]^T [B] dV = \lambda \left(T_m^{(e)} \right) \left[k_{\lambda}^{(e)} \right], \quad (7)$$

для матриці жорсткості, пов'язаної із зовнішнім конвективним теплообміном

$$\left[K_{\alpha}^{(e)}(\bar{T}) \right] = \int_{S^{(e)}} \alpha(T) [N]^T [N] dS \approx$$

$$\approx \alpha \left(T_m^{(e)} \right) \int_{S^{(e)}} [N]^T [N] dS = \alpha \left(T_m^{(e)} \right) \left[k_{\alpha}^{(e)} \right], \quad (8)$$

для матриці демпфірування

$$\begin{aligned} \left[C^{(e)}(\hat{T}) \right] &= \int_{V^{(e)}} c_p(T) \rho(T) [N]^T [N] dV = \\ &= c_p(T_m^{(e)}) \rho(T_m^{(e)}) \int_{V^{(e)}} [N]^T [N] dV = c_p(T_m^{(e)}) \rho(T_m^{(e)}) \left[c^{(e)} \right] \end{aligned} \quad (9)$$

де $V^{(e)}$ — об'єм СЕ; $S^{(e)}$ — поверхня грані СЕ; $[N]$ — матриця-рядок коефіцієнтів форми СЕ; $[B] = \nabla[N]$ — матриця градієнтів СЕ;

$$T_m^{(e)} = \frac{\sum_{i=1}^M T_i}{M} \quad \text{— середня температура СЕ; } \left[k_\lambda^{(e)} \right] = \int_{V^{(e)}} [B]^T [B] dV, \\ \left[k_\alpha^{(e)} \right] = \int_{S^{(e)}} [N]^T [N] dS, \left[c^{(e)} \right] = \int_{V^{(e)}} [N]^T [N] dV.$$

Аналогічні перетворення також виконуються і для векторів $\left\{ f_{q_v}^{(e)}(\hat{T}) \right\}, \left\{ f_\alpha^{(e)}(\hat{T}) \right\}$. Тепер матриці $\left[c^{(e)} \right], \left[k_\lambda^{(e)} \right], \left[k_\alpha^{(e)} \right]$ та вектори $\left\{ f_{q_v}^{(e)} \right\}, \left\{ f_\alpha^{(e)} \right\}$ СЕ потребують тільки одноразового обчислення на початку ітераційного розв'язання задачі. В результаті виконаних перетворень (7)–(9) та переходом до ентальпійної форми запису система дискретних рівнянь МСЕ (6) приймає вигляд

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^M \left\{ - \left[c^{(e)} \right] \frac{\left\{ \hat{h}^{(e)} \right\} - \left\{ h^{(e)} \right\}}{\Delta \tau} - \left(\left[k_\lambda^{(e)} \right] \lambda \left(\hat{T}_m^{(e)} \right) + \left[k_\alpha^{(e)} \right] \alpha \left(\hat{T}_m^{(e)} \right) \right) \left\{ \hat{T}^{(e)} \right\} + \right. \\ \left. + \left\{ f_{q_v}^{(e)} \right\} q_v \left(\hat{T}_m^{(e)} \right) + \left\{ f_\alpha^{(e)} \right\} \alpha \left(\hat{T}_m^{(e)} \right) T_p - \left\{ f_q^{(e)} \right\} \right\} = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

де $h(T) = \int_{T_{ref}}^T c_p(T) \rho(T) dT$ — об'ємна ентальпія, Дж/м³; T_{ref} — температура відліку, К; $\hat{h}^{(e)}$ і $h^{(e)}$ — значення об'ємної ентальпії СЕ на верхньому та нижньому часових рівнях, відповідно, Дж/м³;

$$\left\{ f_{q_v}^{(e)} \right\} = \int_{V^{(e)}} [N]^T dV; \left\{ f_\alpha^{(e)} \right\} = \int_{S^{(e)}} [N]^T dS.$$

У системі рівнянь (10) вектор $\left\{ f_q^{(e)} \right\}$ не зазнав перетворення оскільки не має залежності від температури.

Після часткової лінеаризації за методом Ньютона [6] система дискретних рівнянь (10) набуває вигляду

$$\begin{aligned} & \sum_{e=1}^M \left[k_{\lambda}^{(e)} \right] \left(\frac{\partial \lambda^{(e)}(\hat{T}^k)}{\partial T} \hat{T}^k + \lambda^{(e)}(\hat{T}^k) \right) + \\ & + \left[k_{\alpha}^{(e)} \right] \left(\frac{\partial \alpha^{(e)}(\hat{T}^k)}{\partial T} \hat{T}^k + \alpha^{(e)}(\hat{T}^k) \right) + \left[c^{(e)} \right] \frac{c_p^{(e)}(\hat{T}^k) \rho^{(e)}(\hat{T}^k)}{\Delta \tau} - \quad (11) \\ & - \left\{ f_{\alpha}^{(e)} \right\} \left\{ \frac{\partial \alpha^{(e)}(\hat{T}^k)}{\partial T} \right\}^T T_p - \left\{ f_{q_v}^{(e)} \right\} \left\{ \frac{\partial q_v^{(e)}(\hat{T}^k)}{\partial T} \right\}^T \left\{ \delta \hat{T}^{k+1} \right\} = \sum_{e=1}^M \left\{ f^{(e)} \right\}, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} & \left\{ f^{(e)} \right\} = \\ & = - \left[c^{(e)} \right] \frac{\left\{ \hat{h}^{(e)}(\hat{T}^k) \right\} - \left\{ h^{(e)}(T) \right\}}{\Delta \tau} - \left(\left[k_{\lambda}^{(e)} \right] \lambda(\hat{T}^k) + \left[k_{\alpha}^{(e)} \right] \alpha(\hat{T}^k) \right) \left\{ \hat{T}^k \right\} + \\ & + \left\{ f_{q_v}^{(e)} \right\} q_v(\hat{T}_m^k) + \left\{ f_{\alpha}^{(e)} \right\} \alpha(\hat{T}_m^k) T_p - \left\{ f_q^{(e)} \right\} \end{aligned}$$

вільний член системи рівнянь; $\left\{ \delta \hat{T}^{k+1} \right\}$ — вектор нев'язки за температурою; k — номер ітерації на кожному кроці інтегрування за часом.

Систему рівнянь (11) можна також переписати відносно вузлових невідомих $\delta \hat{T}$. Наприклад, у разі нелінійності, що викликана температурною залежністю c_p , ρ , λ , α , будемо мати таку систему лінеаризованих рівнянь

$$\left[A_{ij} \right] \left\{ \delta T_j \right\} = \left\{ B_i \right\}, \quad i, j = \overline{1, N}, \quad (12)$$

де

$$\begin{aligned} \left[A_{ij} \right] = & \left[k_{\lambda \ ij} \right] \left(\frac{\partial \lambda(\hat{T}_j^k)}{\partial T} \hat{T}_j^k + \lambda(\hat{T}_j^k) \right) + \left[k_{\alpha \ ij} \right] \left(\frac{\partial \alpha(\hat{T}_j^k)}{\partial T} \hat{T}_j^k + \alpha(\hat{T}_j^k) \right) + \\ & + \left[c_{ij} \right] \frac{c_p(\hat{T}_j^k) \rho(\hat{T}_j^k)}{\Delta \tau} - \left\{ f_{\alpha \ i} \right\} \left\{ \frac{\partial \alpha(\hat{T}_j^k)}{\partial T} \right\} T_p \end{aligned}$$

матриця системи, що відповідає глобальним номерам вузлів;

$$\{B_i\} = \sum_{e=1}^M \left[c^{(e)} \right] \frac{\left\{ \tilde{h}^{(e)}(T^k) \right\} - \left\{ h^{(e)}(T) \right\}}{\Delta \tau} -$$

$$- \left(\left[k_\lambda^{(e)} \right] \lambda(\tilde{T}^k) + \left[k_\alpha^{(e)} \right] \alpha(\tilde{T}^k) \right) \left\{ \tilde{T}^k \right\} + \left\{ f_{q_v}^{(e)} \right\} q_v + \left\{ f_{\alpha}^{(e)} \right\} \alpha(\tilde{T}_m^k) T_p - \left\{ f_q^{(e)} \right\}$$

вектор вільних членів відносно глобальних номерам вузлів.

Матриця $[A_{ij}]$ є розрідженою, тому для її формування та подальшого розв'язання системи лінійних алгебричних рівнянь (12) зазвичай використовується, наприклад, стрічкова її форма [7], що значно мінімізує вимоги до обчислювальних ресурсів.

Система лінеаризованих рівнянь (12) на кожному кроці ітерацій розв'язується відносно $\left\{ \delta \tilde{T}_j^{k+1} \right\}$, а шукана температура у вузлах розрахункової сітки визначається за формулою

$$\left\{ \tilde{T}_i^{k+1} \right\} = \left\{ \tilde{T}_i^k \right\} + \left\{ \delta \tilde{T}_i^{k+1} \right\}, \quad i = \overline{1, N}, \quad (13)$$

де N — кількість вузлів у розрахунковій області.

Критерієм отримання числового розв'язку вихідної задачі на кожному часовому кроці є виконання умови

$$\left| \delta \tilde{T}_i^{k+1} \right| \leq \varepsilon_T, \quad i = \overline{1, N}, \quad (14)$$

де ε_T — задана точність розрахунку поля температури, К.

Програмна реалізація числової методики та тести. Для дискретизації Ω можна скористатися або чотиригранними, або шестигранними лінійними СЕ. Оскільки, для виконання дискретизації розрахункової області в роботі застосовано вільно відкритий програмний продукт для автоматизованої генерації сіток Gmsh [8], що дає змогу будувати прості геометричні моделі фізичних об'єктів та виконувати генерацію якісних розрахункових сіток, то надалі всі отримані результати будуть стосуватися тетраедральних СЕ.

Для програмної реалізації запропонованої числової методики обрано мову програмування системи Mathcad [9]. Це дало змогу забезпечити максимальну наочну схожість програмного коду з числовою методикою розв'язання задачі.

Оскільки, МСЕ не дає можливості проведення апріорних оцінок точності розрахунків, то на практиці оцінку точності розрахунків зазвичай виконують за допомогою порівняння з точними (аналітичними) або числовими розв'язками задач, отриманими іншими авторами. Для дослідження збіжності числових розв'язків широкого застосування також набув метод подвійного перерахунку та побудови графіків збіжності результатів розрахунків до точного розв'язку [10].

У зв'язку з цим для оцінки точності числової методики обрано циліндр за різних комбінацій задання граничних умов III роду на його поверхнях і наявності внутрішніх джерел теплоти за умов стаціонарного та нестаціонарного розподілу полів температури, для яких існують точні розв'язки [11].

Для побудови числової моделі нестаціонарної теплопровідності використано четверту частину циліндра. Побудову простої геометричної моделі чверті циліндра скінченних розмірів виконано за допомогою спеціального geo-файлу у програмі Gmsh, текст якого має такий вигляд

```
// ініціалізація змінних
cl = 0.04;
// Параметри циліндра
r=0.05;      //радіус
h=0.1;      // висота
// точки
Point(1) = {r, 0, 0, cl};
Point(2) = {0, 0, 0, cl};
Point(3) = {0, r, 0, cl};
// лінії
Line(1) = {2, 1};
Circle(2) = {1, 2, 3};
Line(3) = {3, 2};
// замкнутий контур
Line Loop(4) = {1, 2, 3};
// поверхня
Plane Surface(1) = {4};
// витягування вздовж осі OZ
Extrude {0, 0, h} { Surface{1}; }
```

Результат виконання скінченно-елементної дискретизації моделі циліндра тетраедрами за допомогою програми Gmsh (184 вузлів, 537 скінченних елементів) наведено на рис. 1.

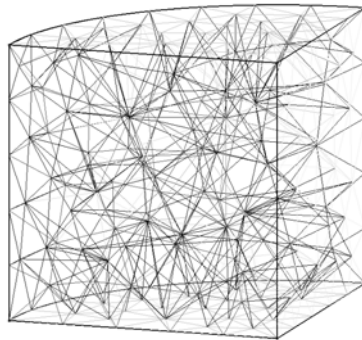


Рис. 1. Дискретизація моделі

Тестування розробленого програмного забезпечення у середовищі Mathcad для розв'язання нестационарної задачі теплопровідності (1)–(5) виконано за декількома тестами.

Тест 1. Стационарна задача теплопровідності циліндра радіусом 0,1 м та висотою 0,25 м з коефіцієнтом теплопровідності 10 Вт/(м·К) / 150 Вт/(м·К) за граничних умов III роду на торцях: нижній — $\alpha_1 = 10$ Вт/(м²·К), $t_{p1} = 35$ °С; верхній — $\alpha_2 = 35$ Вт/(м²·К), $t_{p2} = 250$ °С (табл. 1).

Таблиця 1

Результати порівняння за тестом 1

Тип розв'язку	$t_{\min} - t_{\max}$, $\lambda = 10$ Вт/(м·К)	$t_{\min} - t_{\max}$, $\lambda = 150$ Вт/(м·К)
Mathcad — МСЕ, авторський код,	175,002–210	200,082–202,834
Точний розв'язок [11]	175–210	200,082–202,834

Тест 2. Стационарна лінійна задача теплопровідності циліндра радіусом 0,05 м та висотою 0,25 м з коефіцієнтом теплопровідності 12 Вт/(м·К) та внутрішнім джерелом теплоти $q_v = 2500 / 5000 / 2 \cdot 10^5$ Вт/м³ за граничних умов III роду: бічна сторона $\alpha = 15$ Вт/(м²·К), $t_p = 35$ °С (табл. 2).

Таблиця 2

Результати порівняння за тестом 2

Тип розв'язку	$t_{cm} - t_c$, $q_v = 1,25 \cdot 10^5$ Вт/м ³	$t_{cm} - t_c$, $q_v = 5 \cdot 10^4$ Вт/м ³	$t_{cm} - t_c$, $q_v = 2 \cdot 10^5$ Вт/м ³
Mathcad — МСЕ, авторський код,	55,725–56,395	117,899–120,578	366,597–377,312
Точний розв'язок [11]	55,833–56,484	118,333–120,938	368,333–378,75

Примітка. t_{cm} , t_c — температура стінки та центру циліндра, відповідно, °С.

Тест 3. Нестационарна теплопровідність під час охолодження необмеженої пластини за граничних умов конвективного типу: товщина пластини $2\delta = 20$ мм, початкова температура $t_0 = 140$ °С, температура повітря $t_p = 15$ °С, час від початку охолодження $\tau = 20$ хв., коефіцієнт теплопровідності гуми $\lambda = 0,175$ Вт/(м·К), коефіцієнт температуропровідності гуми $a = 0,833 \cdot 10^{-7}$ м²/с, коефіцієнт тепловіддачі від гуми до повітря $\alpha = 65$ Вт/(м²·К) (табл. 3).

Таблиця 3

Зіставлення даних аналітичного та числового розв'язків нестационарної задачі теплопровідності необмеженої пластини за граничних умов III роду

Тип розв'язку	Температура на осі пластини $t_{x=0}$, °C	Температура на поверхні пластини $t_{x=\delta}$, °C
Точний розв'язок [11]	47,563	25,453
Mathcad — МСЕ, авторський код, $\Delta\tau = 5$ с, 240 кроків, 907 вузлів, 3535 СЕ	47,604	25,171

Тест 4. Нелінійна нестационарна задача теплопровідності циліндра радіусом 0,02 м та висотою 0,02 м з коефіцієнтом теплопровідності $\lambda(t) = 159,218e^{-1,116 \times 10^{-3}t}$ Вт/(м·К), масовою ізобарною теплоємністю $c_p(t) = 712,2 + 2,933 \times 10^{-7}t^3 - 1,444 \times 10^{-3}t^2 + 2,406t$ Дж/(кг·К) і густиною $\rho(t) = 1853 - 5,453 \times 10^{-5}t^5 - 0,127t$ за граничних умов III роду на торцях: нижній — $\alpha_1 = 10$ Вт/(м²·К), $t_{p1} = 35$ °C; верхній — $\alpha_2 = 35$ Вт/(м²·К), $t_{p2} = 250$ °C. Початкова температура $t_0 = 35$ °C (табл. 4).

Таблиця 4

Результати порівняння за тестом 4

Час, год	$t_{cm} - t_u$, °C				
	1	3	5	7	10
Matlab [12]	137,1– 138,89	188,53– 189,94	198,47– 199,79	200,6– 201,9	201,14– 202,44
Mathcad — МСЕ, авторський код, 120 кроків за часом, 1218 вузлів, 4804 СЕ	136,02– 138,15	187,91– 189,7	198,07– 199,78	200,27– 201,96	200,84– 202,53

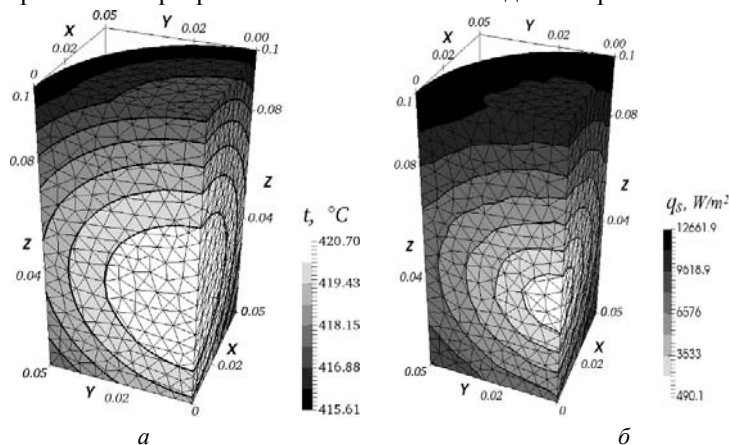
Тест 5. Умови тесту 4, але з $q_v = 2,5 \cdot 10^5$ Вт/м³ та граничними умовами III роду на бічній стороні: $\alpha_3 = 10$ Вт/(м²·К), $t_{p3} = 35$ °C (табл. 5).

Таблиця 5

Результати порівняння за тестом 5

Час, год	$t_{cm} - t_u$, °C				
	1	3	5	7	10
Matlab [12]	327,53– 328,86	407,90– 410,42	415,72– 418,39	416,56– 419,26	416,60– 419,38
Mathcad — МСЕ, авторський код, 120 кроків за часом, 1218 вузлів, 4804 СЕ	326,05– 328,17	406,67– 411,35	414,61– 419,66	415,50– 420,58	415,61– 420,69

Результати числового моделювання за тестом 4 з використанням розробленого програмного забезпечення наведено на рис. 2.



а — поле температури; *б* — поле густини теплового потоку

Рис. 2. Результати числового моделювання за тестом 5 на 10 год (ParaView [13])

Аналіз порівняння результатів показує, що дані моделювання за розробленим програмним забезпеченням збігаються з аналітичними та числовими розв'язками, що отримані з використанням програмного забезпечення Matlab. При цьому максимальне значення похибки визначення температури не перевищує 0,1–1,1 % залежно від умов задачі.

Висновки. На базі методу скінченних елементів та лінеаризації за методом Ньютона розроблено числову методику та програмне забезпечення для розв'язання нелінійних нестационарних задач теплопровідності з внутрішніми джерелами теплоти та виконано зіставлення результатів числових експериментів за тестами, для яких існують точні розв'язки, та з даними отриманими за допомогою програмних продуктів Matlab. Встановлено, що максимальне значення похибки визначення температури не перевищує 0,1–1,1% залежно від умов задачі. Подальші дослідження доцільно продовжити у напрямку розробки методики та алгоритмів розв'язання контактних задач теплопровідності з врахуванням стрічкової форми запису матриці системи лінеаризованих алгебричних рівнянь та мінімізації ширини стрічки.

Список використаних джерел:

1. Махович І. О. Моделювання нестационарного теплового процесу в необмеженому порожньому циліндрі з несиметричними граничними умовами першого роду / І. О. Махович, В. А. Федорчук // Матема-

- тичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський нац. ун-т ім. Івана Огієнка, 2014. — Вип. 11. — С. 143–151.
2. Beers, K. J. Numerical Methods for Chemical Engineering / K. J. Beers. — Cambridge : Cambridge University Press, 2007. — 474 p.
 3. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич ; пер. с англ. ; под ред. Б. Е. Победри. — М. : Мир, 1975. — 541 с.
 4. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов / Л. Сегерлинд ; пер. с англ. А. А. Шестакова ; под ред. Б. Е. Победри. — М. : Мир, 1979. — 392 с.
 5. Карвацький А. Я. Метод скінченних елементів у задачах механіки суцільних середовищ. Програмна реалізація та візуалізація результатів : навч. посіб. / А. Я. Карвацький. — К. : НТУУ «КПІ» ВПІ ВПК «Політехніка», 2015. — 392 с.
 6. Самарский А. А. Разностные методы решения задач газовой динамики / А. А. Самарский, Ю. П. Попов. — М. : Наука, 1980. — 352 с.
 7. Джордж А. Численное решение больших разреженных систем уравнений / А. Джордж, Дж. Лю ; пер. с англ. Х. Д. Икрамова. — М. : Мир, 1984. — 334 с.
 8. Gmsh. A three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities [Електронний ресурс]. — Режим доступу: <http://geuz.org/gmsh/>.
 9. Mathcad. Engineering math software that allows perform, analyze, and share your most vital calculations [Електронний ресурс]. — Режим доступу: <http://www.ptc.com/engineering-math-software/mathcad/>.
 10. Калиткин Н. Н. Численные методы : учеб. пособие / Н. Н. Калиткин. — М. : Наука. Физматгиз, 1978. — 512 с.
 11. Исаченко В. П. Теплопередача : учебник для вузов / В. П. Исаченко, В. А. Осипова, А. С. Сукомел. — М. : Энергоиздат, 1981. — 416 с.
 12. Matlab. The Language of Technical Computing [Електронний ресурс]. — Режим доступу: <http://www.mathworks.com/products/matlab/>.
 13. ParaView. An open-source, multi-platform data analysis and visualization application. — Режим доступу: <http://www.paraview.org/>.

Methodology and solving algorithm of non-linear dynamic problems of thermal conductivity with internal heat sources using finite element method (FEM) were given. Original programming code was developed on the basis of Mathcad software in order to solve the given problem. Having investigated the results, comparative analyses of accurate solution data and results of numerical solutions, obtained with the usage of Matlab programming products, was held.

Key words: *modeling of thermal process, finite element method, approximation, Mathcad, linearization.*

Отримано: 11.04.2016