22. SIMPOW, Power System Simulation and Analysis Software User Manual // ver. (ABB) 10.1.093, STRI, Ludvika, Sweden, 2003.

У статті розглядається використання оригінального і чисто електронного методу низькочастотного зниження рівня гармонік для широкої промислової реалізації та застосування в якості індуктивних низькочастотних фільтрів гармонік. Одним з основних застосувань методу було здійснено для невеликих блоків живлення бортових комплексів наземного базування повітряної навігації при проведенні передпольотної наземної перевірки та обслуговування. Управління транспортом у великій кількості невеликих провінційних аеропортів проводилося невдало. Та ж ситуація спостерігається в північній і центральній частині Середньої Азії, Північного Кавказу і Закавказьких гір, які орієнтовані на невеликі аеропорти цивільних і сільськогосподарських послуг і т.д. Скрізь в локальних аеропортах дисбаланс фази і амплітуди напруги в лініях може досягати 10-15% при включенні живлення невеликого трансформатора поселення або генератора [1, 6]. Висловлюємо подяку за редагування статті пані Рейчел Алкорн.

Ключові слова: *шум, адаптивні методи, телеметричний канал зв'язку.*

Отримано: 20.04.2016

УДК 519.6

М. В. Артюх,
О. М. Литвин, д-р. фіз.-мат. наук, професор

Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків

ЗАСТОСУВАННЯ ДИВІДІРІАЛЬНОГО ТА МУЛЬТИГРАЛЬНОГО ЧИСЛЕНЬ В ДОСЛІДЖЕННІ ЕКОНОМІКИ СІЛЬСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА УКРАЇНИ

У статті наведено основні поняття дивідіріального та мультигрального числень, розглянуто виробничу функцію зі змінними коефіцієнтами еластичності. Розроблено математичні моделі виробничих функцій для дослідження економіки сільського господарства України.

Ключові слова: *дивідіріальне числення, мультигральне числення, виробнича функція, коефіцієнт еластичності, ВВП сільського господарства, основні засоби, оборотні активи.*

Вступ. Застосування економіко — математичного моделювання відіграє велику роль при дослідженні й прогнозуванні економічних систем різного рівня. Оскільки на результат виробництва має вплив багато факторів, тому важливо проводити дослідження, яким чином якісно та кількісно ці фактори впливають на кінцевий результат, тобто рівень випуску. Для цього застосовують економіко-математичне моделювання за допомогою виробничих функцій.

Уперше поняття виробничої функції з'явилося в 30-х роках XX століття. Американські вчені Джордж Кобб та Пітер Дуглас в своїй статті [1, с. 151–160] використали дані американської легкої промисловості за 24 роки, та на їх основі побудували виробничу функцію, яка потім отримала назву «виробнича функція Кобба-Дугласа». Ця функція має вигляд:

$$Y = AL^{\alpha}K^{\beta}. \tag{1}$$

У цій виробничій функції основними факторами, що впливають на випуск продукції Y вважаються K — основний капітал та L — робоча сила. Параметри A, α, β задовольняють таким умовам: $A > 0$, $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$. Коефіцієнти α, β відображають вклад праці та капіталу у виготовлення продукту [2, с. 6]. В своїх дослідженнях Кобб і Дуглас методом найменших квадратів визначили всі вказані параметри і функція Кобба-Дугласа набула такого вигляду:

$$Y = 1,01L^{0,75}K^{0,25}. \tag{2}$$

З теоретичної і практичної точок зору важливими є наступні властивості виробничої функції Кобба-Дугласа:

- функція $Y = F(K, L)$ неперервна;
- функція $Y = F(K, L)$ двічі диференційовна по аргументах K і L;
- виробництво неможливе при відсутності принаймні одного ресурсу, тобто $F(0, L; t) = F(K, 0; t) = 0$.

Як правило, вважають, що виробнича функція (1) — однорідна по аргументах *K* і *L*, тобто існує таке $\gamma > 0$ (міра однорідності), що для довільного $\lambda > 0$ справедливо: $F(\lambda K, \lambda L; t) = \lambda^{\gamma} F(K, L; t)$. Досить часто вважають, що виробнича функція (1) є лінійно-однорідною, тобто, що пропорційне збільшення витрат факторів приводить до зростання випуску в тій же пропорції. У цьому випадку $\gamma = 1$ [3, с. 211–212].

Величина $\gamma = \alpha + \beta$ показує, що при збільшенні K, L в λ разів об'єм продукції зростає у λ^{γ} разів. Завдяки цьому коефіцієнт однорідності γ називають ще коефіцієнтом ефективності виробництва.

Параметри α, β функції Кобба-Дугласа є частинними коефіцієнтами еластичності:

1) частинний коефіцієнт еластичності продукту по фондах

$$E_K = \frac{\partial Y}{\partial K} \cdot \frac{K}{Y} = A\beta L^{\alpha} K^{\beta-1} \frac{K}{AL^{\alpha} K^{\beta}} = \beta, \tag{3}$$

2) еластичність продукту по праці

$$E_L = \frac{\partial Y}{\partial L} \cdot \frac{L}{Y} = A\alpha L^{\alpha-1} K^{\beta} \frac{L}{AL^{\alpha} K^{\beta}} = \alpha . \tag{4}$$

Ці коефіцієнти еластичності відображають відсоток приросту обсягу випуску продукції при збільшенні витрат ресурсу на 1%.

Для функції Кобба-Дугласа коефіцієнти α, β постійні й не залежать від обсягу факторів K, L.

Також важливою характеристикою для виробничих функцій є ефект заміщення ресурсів. Ця числова характеристика показує на яку величину x_2 зменшиться обсяг витрат другого ресурсу, якщо збільшити обсяг витрат першого ресурсу на x_1, щоб при цьому обсяг випуску Y залишився незмінним. Тобто гранична норма $S_{x_1x_2}$ заміни одного ресурсу іншим — це величина, що показує який обсяг ресурсу вивільняється при збільшенні витрат ресурсу — замінника на одиницю.

$$S_{x_1x_2} = -\frac{x_2}{x_1} . \tag{5}$$

Тоді еластичність заміни ресурсів показує, на скільки відсотків повинно змінитись співвідношення ресурсів (при $Y = const$), при зміненні граничної норми заміни на 1% [2, с. 12–16]:

$$\sigma_{x_1x_2} = \frac{\partial\left(x_2 / x_1 \right)}{\partial S_{x_1x_2}} \cdot \frac{S_{x_1x_2}}{x_2 / x_1} . \tag{6}$$

Актуальність. Основною особливістю виробничої функції Кобба-Дугласа є те, що вона має сталі коефіцієнти еластичності α, β. Але при більш детальному дослідженні [див. 4, зокрема аналіз даних, що використовувалися] виявляється, що частинні коефіцієнти еластичності виробничої функції Кобба-Дугласа можуть бути функціями від обох факторів L та K. Тоді в нагоді стає теорія дивідіріального та мультигрального числень, оскільки дивідіра 2-го роду — це еластичність.

Введемо позначення дивідіри та мультиграла.

Означення 1. Якщо існує границя

$$\lim_{\Delta x\to 0} \underset{\Delta x}{\overset{f(x+\Delta x):f(x)}{\xrightarrow{\hspace{6em}}}} = \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{f(x+\Delta x)}{f(x)}\right]^{1/\Delta x},$$

то будемо її називати дивідірою першого роду від функції $f(x)$ у точці x і позначати так:

$$\underset{dx}{\overset{\delta f(x)}{\xrightarrow{\hspace{4em}}}} := \lim_{\Delta x\to 0} \underset{\Delta x}{\overset{f(x+\Delta x):f(x)}{\xrightarrow{\hspace{6em}}}}. \tag{7}$$

Означення 2. Операцію, яка дозволяє по дивідірі першого роду функції $f(x)$ знайти її первісну, тобто функцію $F(x)$ із властивістю $\underset{dx}{\overset{\delta F(x)}{\xrightarrow{\hspace{4em}}}} = f(x)$, назвемо невизначеним мультигралом першого роду від функції $f(x)$ і позначатимемо так:

$$\boldsymbol{n}\, f(x)^{dx} := F(x)C \Leftrightarrow \underset{dx}{\overset{\delta F(x)}{\xrightarrow{\hspace{4em}}}} = f(x),\ (C = const). \tag{8}$$

Означення 3. Якщо існує границя

$$\lim_{x_1\to x} \underset{x_1\,:\,x}{\overset{f(x_1):f(x)}{\xleftrightarrow{\hspace{6em}}}} = \lim_{h\to 1} \underset{h}{\overset{f(x\times h):f(x)}{\xleftrightarrow{\hspace{7em}}}} = \lim_{h\to 1}\log_h\left(\frac{f(x\times h)}{f(x)}\right) =$$

$$= \lim_{h\to 1}\frac{\ln f(x\times h) - \ln f(x)}{\ln h} = \frac{x\,f'(x)}{f(x)},$$

назвемо її дивідірою другого роду від функції $f(x)$ у точці x і позначимо її так:

$$\underset{\delta x}{\overset{\delta f(x)}{\xleftrightarrow{\hspace{4em}}}} := \lim_{h\to 1} \underset{h}{\overset{f(x\times h):f(x)}{\xleftrightarrow{\hspace{7em}}}}. \tag{9}$$

Означення 4. Операцію, обернену до $\underset{\delta x}{\overset{\delta f}{\xleftrightarrow{\hspace{3em}}}}$, назвемо невизначеним мультигралом другого роду від функції $f(x)$ і позначимо так ($C = const$):

$$\boldsymbol{n}\,\delta x \uparrow f(x) = \boldsymbol{n}\,\delta x^{f(x)} := F(x)C \Leftrightarrow \underset{\delta x}{\overset{\delta F(x)}{\xleftrightarrow{\hspace{4em}}}} = f(x) \tag{10}$$

Основні властивості дивідір та мультигралів наведено в таблицях 1 та 2.

Таблиця 1

Зіставлення властивостей похідної $\frac{dy}{dx}$ *і дивідір* $\underset{dx}{\xrightarrow{\delta y}}$, $\underset{\delta x}{\xleftrightarrow{\delta y}}$

Похідна	**Дивідіра 1-го роду**	**Дивідіра 2-го роду**
$y'(x)=\frac{dy(x)}{dx}=$ $=\lim_{\Delta\to0}\frac{y(x+\Delta)-y(x)}{\Delta}$	$\underset{dx}{\xrightarrow{\delta y(x)}}=$ $=\lim_{\Delta\to0}\underset{y(x)}{\xrightarrow{y(x+\Delta):y(x)}}=$ $=e\uparrow\frac{y'}{y}$	$\underset{\delta x}{\xleftrightarrow{\delta y(x)}}=$ $=\lim_{\Delta\to1}\underset{\Delta}{\xleftrightarrow{y(x\cdot\Delta):y(x)}}=$ $=\frac{d\ln y}{d\ln x}=\frac{xy'}{y}$
$\frac{d}{dx}(f+-g)=$ $=\frac{df}{dx}+-\frac{dg}{dx}$	$\underset{dx}{\xrightarrow{\delta}}(f\times:g)=$ $=\underset{dx}{\xrightarrow{\delta f}}\times:\underset{dx}{\xrightarrow{\delta g}}$	$\underset{\delta x}{\xleftrightarrow{\delta y}}(f\times:g)=$ $=\underset{\delta x}{\xleftrightarrow{\delta f}}+-\underset{\delta x}{\xleftrightarrow{\delta g}}$
$\frac{d}{dx}a=0,\ a=const$	$\underset{dx}{\xrightarrow{\delta}}a=1$	$\underset{\delta z}{\xleftrightarrow{\delta}}a=0$
$\frac{d}{dx}(a\times x)=a$	$\underset{\delta x}{\xrightarrow{\delta}}(a\times x)=a$	$\underset{\delta x}{\xleftrightarrow{\delta}}(x\uparrow a)=a$
$\frac{d}{dx}(f\times g)=$ $=\frac{df}{dx}\times g+f\times\frac{dg}{dx}$	$\underset{dx}{\xrightarrow{\delta}}(f\uparrow g)=$ $=\underset{dx}{\xrightarrow{\delta f}}\uparrow g\times f\uparrow\frac{dg}{dx}$	$\underset{\delta x}{\xleftrightarrow{\delta}}(f\uparrow\ln g)=\underset{\delta x}{\xleftrightarrow{\delta f}}\times$ $\times\ln g+\ln f\times\underset{\delta x}{\xleftrightarrow{\delta g}}$
$\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{d}\right)=$ $=\frac{\frac{df}{dx}\times g-f\times\frac{dg}{dx}}{g\uparrow2}$	$\underset{dx}{\xrightarrow{\delta}}\left(\underset{g}{\xrightarrow{f}}\right)=$ $=\underset{g\uparrow2}{\xrightarrow{\underset{dx}{\xrightarrow{\delta f}}\uparrow g:f\uparrow\frac{dg}{dx}}}$	$\underset{\delta x}{\xleftrightarrow{\delta}}(f\downarrow\ln g)=$ $=\underset{g\uparrow\ln g}{\xleftrightarrow{g\uparrow\frac{\delta f}{\delta x}:f\uparrow\frac{\delta g}{\delta x}}}$
$\frac{d}{dx}f(g(x))=$ $=\frac{df(g)}{dg}\times\frac{dg(x)}{dx}$	$\underset{dx}{\xrightarrow{\delta}}f(g(x))=$ $=\underset{dg}{\xrightarrow{\delta f(g)}}\uparrow\frac{dg}{dx}$	$\underset{\delta x}{\xleftrightarrow{\delta}}f(g(x))=$ $=\underset{\delta g}{\xleftrightarrow{\delta f(g)}}\times\underset{\delta x}{\xleftrightarrow{\delta f(x)}}$

Продовження таблиці 1

$\frac{dy}{dx} = 1 : \frac{dx}{dy}$	$\ln\left[\xrightarrow[dx]{\delta y} \uparrow y\right] =$ $= 1 : \ln\left[\xrightarrow[dx]{\delta y} \uparrow x\right]$	$\frac{\delta y}{\delta x} = 1 : \frac{\delta x}{\delta y}$
$\frac{d}{dx}\left(e \uparrow x\right) = e \uparrow x$	$\xrightarrow[\delta x]{\delta}\left(e \uparrow \left(e \uparrow x\right)\right) =$ $= e \uparrow \left(e \uparrow x\right)$	$\xleftrightarrow[\delta x]{\delta}\left(\xleftrightarrow[x]{1 : e}\right) =$ $= \xleftrightarrow[x]{1 : e} = -\frac{1}{\ln x}$
$dy = \frac{dy}{dx} \times dx$	$\delta y = \xrightarrow[\delta x]{\delta y} \uparrow dx$	$\delta y = \delta x \uparrow \xleftrightarrow[\delta x]{\delta y}$

Властивості дивідір першого роду:

$$\delta_Y = \frac{dY(t)}{dt}\left(Y(t)\right)^{-1}, \ \delta_K = \frac{dK(t)}{dt}\left(K(t)\right)^{-1} \text{ і } \delta_L = \frac{dL(t)}{dt}\left(L(t)\right)^{-1}$$

темпи випуску продукції, праці і капіталу відповідно.

Економічна інтерпретація дивідір другого роду. Нехай $D(P)$ — попит на продукцію в залежності від ціни P. Тоді еластичність попиту від ціни $E_P(D) = \frac{P\frac{dD(P)}{dP}}{D(P)} = E(P)$ [5, с. 37, 46, 57, 63, 115–122, 139–144].

Таблиця 2

Зіставлення властивостей інтеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *і мультигралів*

$$\underset{a}{\overset{b}{n}} f(x)^{dx}, \ \underset{a}{\overset{b}{n}} \delta x^{f(x)}$$

Визначений інтеграл	Визначений мультиграл 1-го роду	Визначений мультиграл 2-го роду
$\int\limits_a^b f(x)\,dx =$ $= \lim\limits_{\substack{\Delta \to 0 \\ n \to \infty}} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$	$\underset{a}{\overset{b}{n}} f(x)^{dx} =$ $= \lim\limits_{\substack{\Delta \to 0 \\ n \to \infty}} \prod\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i) \uparrow \Delta x_i =$ $= e \uparrow \int\limits_a^b \ln f(x)\,dx$	$\underset{a}{\overset{b}{n}} \delta x^{f(x)} =$ $= \lim\limits_{\substack{\delta \to 1 \\ n \to \infty}} \prod\limits_{i=1}^{n} \delta x_i \uparrow f(\xi_i) =$ $= e \uparrow \int\limits_a^b \frac{f(x)}{x}\,dx$

Продовження таблиці 2

$\int\limits_a^b c\, f\, dx = c\int\limits_a^b f\, dx,$ $c - const$	$\mathop{n}\limits_a^b \left(f^c\right)^{dx} =$ $= \left[\mathop{n}\limits_a^b f^{dx}\right]\uparrow c$	$\mathop{n}\limits_a^b \delta x^{c f} =$ $= \left[\mathop{n}\limits_a^b \delta x^{c f}\right]\uparrow c$
$\int\limits_a^b (f \pm g)\, dx =$ $= \int\limits_a^b f\, dx \pm \int\limits_a^b g\, dx$	$\mathop{n}\limits_a^b (f \times g) \uparrow dx =$ $= \mathop{n}\limits_a^b f \uparrow dx : \mathop{n}\limits_a^b g \uparrow dx$	$\mathop{n}\limits_a^b \delta x \uparrow (f \pm g) =$ $= \mathop{n}\limits_a^b \delta x \uparrow f : \mathop{n}\limits_a^b \delta x \uparrow g$
$\int f(x)\, dx = F(x) \Rightarrow$ $\Rightarrow \int\limits_a^b f(x)\, dx = F(x)\Big\vert_a^b =$ $= F(b) - F(a)$	$n\, f(x)^{dx} = F(x) \Rightarrow$ $\Rightarrow \mathop{n}\limits_a^b f(x)^{dx} =$ $= F(x)\Big\Vert_a^b = F(b) : F(a)$	$n\, \delta x^{f(x)} = F(x) \Rightarrow$ $\Rightarrow \mathop{n}\limits_a^b \delta x^{f(x)} =$ $= F(x)\Big\Vert_a^b = F(b) : F(a)$
Середнє арифметичне $M_1(f) = \dfrac{\int\limits_a^b f(x)\, dx}{b-a}$	Середнє геометричне $M_a = \dfrac{\mathop{n}\limits_a^b f\, x^{dx}}{b-a}$	Середнє логарифмічне $M_L = \dfrac{\mathop{n}\limits_a^b \delta x^{f(x)}}{b : a}$
$\int\limits_a^b f \times g' \times dx =$ $= f \times g\Big\vert_a^b -$ $-\int\limits_a^b g \times f' \times dx$	$\mathop{n}\limits_a^b (f \uparrow g)^{dx} =$ $= f \times g\Big\vert_a^b - \int\limits_a^b g \times f' \times dx$	$\mathop{n}\limits_a^b \delta g^{f} =$ $= g^f \Big\Vert_a^b : \mathop{n}\limits_a^b \delta f^{f \ln g}$ $e \uparrow \int\limits_a^b f\, d \ln g =$ $= g\, f\Big\Vert_a^b : e \uparrow \int\limits_a^b (\ln g)\, df$

Таким чином, властивість дивідіри 2-го роду — еластичність функції можемо застосовувати для дослідження і виробничих функцій, оскільки вони містять таке поняття, як еластичність заміни.

Постановка задачі. Розглянемо виробничу функцію зі змінними коефіцієнтами еластичності, яка моделює виробничий процес в галузі сільського господарства України. Побудуємо залежність випуску продукції від оборотних активів та основних засобів сільського господарства, а також залежність випуску продукції від кількості працюючих та основних засобів.

Математична модель 1. Нехай виробнича функція зображується в наступному вигляді:

$$Y\left(O,V,C_1,a,b\right)=e^{C_1}\cdot O^{f\left(O,V,a\right)}\cdot V^{g\left(O,V,b\right)}, \tag{11}$$

$$f\left(O,V,a\right)=\sum_{i=0}^{M}\sum_{m=0}^{N}a\cdot_{im}\varphi_i\left(O\right)\cdot\varphi_m\left(V\right); \tag{12}$$

$$g\left(O,V,b\right)=\sum_{i=0}^{M}\sum_{m=0}^{N}b_{im}\varphi_i\left(O\right)\varphi_m\left(V\right); \tag{13}$$

$$\varphi_i\left(O\right)=O^i;\ \varphi_m\left(V\right)=V^m,$$

де Y — ВВП сільського господарства України, V — основні засоби сільського господарства, O — оборотні активи сільського господарства, C_1,a_{im},b_{im} — невідомі параметри (коефіцієнти), M, N — параметри, покладемо $M=1,\ N=1$.

Теорема 1. Для знаходження невідомих C_1,a_{im},b_{im} з умов

$$Y_p\left(O_p,V_p,C_1,a,b\right)=e^{C_1}\cdot O_p^{f\left(O_p,V_p,a\right)}\cdot V_p^{g\left(O_p,V_p,b\right)}, \tag{14}$$

методом найменших квадратів

$$j\left(C\right)=\sum_{p=1}^{Q}\left(\ln Y_p\left(O_p,V_p,C_1,a,b\right)-\ln Y_p\right)^2\to\min_{A,\,a_{im},\,b_{im}}$$

матриця невідомих коефіцієнтів $C=\left[C_1\ a_{00}\ a_{10}\ a_{01}\ b_{00}\ b_{10}\ b_{01}\ \right]$ знаходиться за формулою: $C=\left(B\cdot B^T\right)^{-1}\cdot B\cdot Y1$, де B — матриця з Q рядками наступного вигляду:

$$B_p=\left[1\quad \ln O_p\quad \left(\ln O_p\right)O_p\quad \left(\ln O_p\right)V_p\quad \ln V_p\quad \left(\ln V_p\right)O_p\quad \left(\ln V_p\right)V_p\right]^T,$$

а $Y1_p=\ln Y_p$, $p=\overline{1,Q}$, що отримується, якщо

$$f\left(O,V,a\right)=a_{00}+a_{10}O+a_{01}V;\ g\left(O,V,b\right)=b_{00}+b_{10}O+b_{01}V.$$

Для аналізу сільського господарства України використовувались статистичні дані за 2004–2013 р. [6, 7].

При проведенні обчислювального експерименту отримали такі значення невідомих коефіцієнтів: $C_1=27{,}11$, $a_{00}=3{,}366$, $a_{10}=0{,}128$, $a_{01}=0{,}023$, $b_{00}=-9{,}197$, $b_{10}=-0{,}166$, $b_{01}=0{,}026$. Таким чином, виробнича функція має вигляд:

$$Yz = e^{27,11} \times O^{3,366+0,128 \cdot O+0,023V} \times V^{-9,197-0,166 \cdot O+0,026 \cdot V}. \quad (15)$$

Також було обчислено виробничу функцію зі сталими коефіцієнтами:

$$Yc = 3,78 \times O^{0,521} \times V^{0,326}. \quad (16)$$

Отримані функції відображено на графіках (рис. 1, рис. 2).

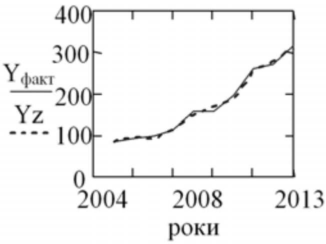

Рис. 1. *Функція зі змінними коефіцієнтами еластичності (15)*

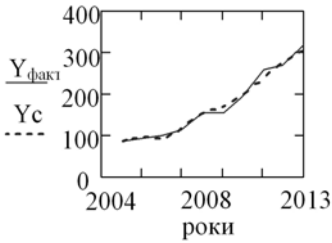

Рис. 2. *Функція за сталими коефіцієнтами (16)*

Для функції зі змінними коефіцієнтами середньоквадратичне відхилення — $\sigma_1 = 0,029$, а для функції зі сталими коефіцієнтами — $\sigma_2 = 0,042$.

Таким чином, підтверджено, що функція зі змінними коефіцієнтами $f(O,V,a)$, $g(O,V,b)$ дає краще наближення.

Математична модель 2. Нехай виробнича функція зображується в наступному вигляді:

$$Y(L,K,C_1,a,b) = e^{C_1} \cdot L^{f(L,K,a)} \cdot K^{g(L,K,b)}, \quad (17)$$

$$f(L,K,a) = \sum_{i=0}^{M} \sum_{m=0}^{N} a_{im} \varphi_i(L) \varphi_m(K); \quad (18)$$

$$g(L,K,b) = \sum_{i=0}^{M} \sum_{m=0}^{N} b_{im} \varphi_i(L) \varphi_m(K); \quad (19)$$

$$\varphi_i(L) = L^i; \ \varphi_m(K) = K^m,$$

де Y — ВВП сільського господарства України, K — основні засоби сільського господарства, L — кількість найманих працівників, C_1, a_{im}, b_{im} — невідомі параметри (коефіцієнти), M, N — параметри, покладемо $M = 1,\ N = 1$.

Згідно з теоремою 1 проведено обчислювальний експеримент. Отримали такі значення коефіцієнтів: $C_1 = 29,089$, $a_{00} = -23,818$, $a_{10} = -7,391$, $a_{01} = 0,046$, $b_{00} = -12,302$, $b_{10} = 5,69$, $b_{01} = 0,014$. Відповідно, виробнича функція:

$$Yz = e^{29,089} \times L^{-23,818-7,391 \cdot L+0,046K} \times K^{-12,302+5,69 \cdot L+0,014 \cdot K}. \quad (20)$$

За цими ж даними виробнича функція зі сталими коефіцієнтами:

$$Yc = 2,374 \times L^{-0,779} \times K^{0,91}. \quad (21)$$

Для цих функцій маємо такі графіки:

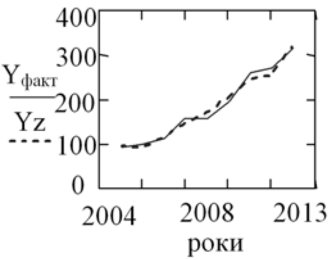

***Рис. 3.** Виробнича функція зі змінними коефіцієнтами (20)*

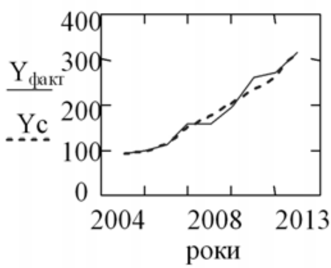

***Рис. 4.** Функція зі сталими коефіцієнтами (21)*

Бачимо, що виробнича функція зі змінними коефіцієнтами краще наближує функцію, ніж зі сталими коефіцієнтами. Це підтверджують і значення середньоквадратичного відхилення. Для функції (20) середньоквадратичне відхилення $\sigma_3 = 0,047$, а для функції (21) — $\sigma_4 = 0,057$.

Висновки. Таким чином, в даній роботі ми стверджуємо, що, взагалі кажучи, виробничі функції зі змінними частинними коефіцієнтами еластичності дозволяють більш точно відновлювати взаємозв’язок між обсягом виробленої продукції та факторами, що впливають на нього. Крім того, враховуючи, що дивідіра другого роду — це коефіцієнт еластичності обсягу виробництва в залежності від факторів, які впливають на обсяг виробництва (коефіцієнт еластичності попиту в залежності від ціни) або еластичність заміни факторів, то доцільно виробничі функції будувати з використанням дивідіріального та мультигрального числень, як найбільш природно пов'язаних із досліджуваними економічними процесами.

Список використаних джерел:

1. Cobb C. W. A Theory of Production / C. W. Cobb, P. H. Douglas // American Economic Review. — 1928. — P. 139–165.
2. Гераськин М. И. Математическая экономика: теория производства и потребительского выбора : учеб. пособие / М. И. Гераськин. — Самара : Самар. гос. аэроксом. ун-т, 2004. — 102 с.
3. Зацеркляний М. М. Основи економічної кібернетики : навч. посібник / М. М. Зацеркляний, О. Ф. Мельников. — Чернівці : ТОВ «Видавництво «Наші книги», 2008. — 392 с.
4. Артюх М. В. Виробнича функція зі змінними коефіцієнтами еластичності, побудована на основі даних Кобба-Дугласа / М. В. Артюх, О. М. Лит-

вин // Вісник Національного технічного університету «ХПІ» : зб. наук. праць. Тематичний випуск: Математичне моделювання в техніці та технологіях. — Харків : НТУ «ХПІ», 2012. — № 27. — С. 124–129.
5. Литвин О. М. Дивідіріальні та мультигральні числення : монографія / О. М. Литвин. — К. : Наук. думка, 2006. — 144 с.
6. Статистичний щорічник України (2008–2013 р.). — К. : Державний комітет статистики України, 2009-2013.
7. Праця України (2008–2013): Статистичний збірник.

In this paper the basic concept of dyvidirial and multyhral calculus, considered production function with variable coefficients of elasticity. Developed mathematical models of production functions to study agricultural economics of Ukraine.

Key words: *dyvidirial calculus, multyhral calculus, production function, elasticity coefficient, fixed assets, current assets.*

Отримано: 25.04.2016

УДК [519.876.5:530.182]:553.98

А. Я. Бомба, д-р, техн. наук, професор,
С. В. Ярощак, канд. техн. наук,
В. І. Бойцов

Рівненський державний гуманітарний університет, м. Рівне

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НЕІЗОТЕРМІЧНОЇ БАГАТОФАЗНОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ В СИСТЕМІ ПАРАЛЕЛЬНИХ СВЕРДЛОВИН ЗА ТЕХНОЛОГІЄЮ ТЕРМОГРАВІТАЦІЙНОГО ДРЕНАЖУ

У роботі розвинуто методи комплексного аналізу математичного моделювання ізотермічної багатофазної фільтрації на випадок витіснення нафти теплоносієм з використанням групи паралельних свердловин за технологією термогравітаційного дренажу.

Ключові слова: *математичне моделювання, неізотермічна фільтрація термогравітаційний дренаж, квазіконформні відображення.*

Вступ. Тепловий вплив на пласт змінює основні фільтраційні параметри процесу: в'язкість флюїду, капілярні сили, реологічні властивості агентів, і т.п. [6]. Найбільш ефективними є технології нагнітання в пласт різних робочих агентів — теплоносіїв, з метою підтримки пластового тиску [1, 4–6]. При цьому за рахунок переносу течією тепла здійснюється розігрів зон пласта між свердловинами в зв'язку з чим знижується в'язкість нафти в цих зонах і, тим самим, покращується гідродинамічний зв'язок між ними [6, 7].

