4. Ким Д. П. Теория автоматического управления : учеб. пособие / Д. П. Ким. — М. : Физматлит, 2004. —Т. 2. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы. — 464 с.
5. Пыркин А. А. Методы адаптивного и робастного управления в условиях запаздывания и возмущающих воздействий : дис. … канд. техн. наук : 05.13.01 / А. А. Пыркин. — СПб., 2010. — 151 с.

The problems of identification of dynamic objects with delay are examined. The tasks are solved by the method of moments, whereby the parameters of the transfer function of the object are determined. The quality of the developed software tools that implement this method is studied by means of computational experiments.

Key words: *identification, modelling, dynamic systems with delay, Matlab.*

Отримано: 9.04.2015

УДК 517.44

О. І. Махович, аспірант

Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, м. Кам’янець-Подільський

ЗАСТОСУВАННЯ ІНТЕГРАЛЬНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ЗІ СКІНЧЕННИМИ МЕЖАМИ ПРИ МОДЕЛЮВАННІ ОБ’ЄКТІВ ІЗ РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Розглянуто метод інтегральних перетворень зі скінченними межами та його застосування на прикладі рівняння теплопровідності. Наведено вирази для ідентифікації ядра інтегрального перетворення та позаінтегрального доданку в залежності від різного роду граничних умов. Виведена формула знаходження оригінала за відомим зображенням.

Ключові слова: *інтегральне перетворення, зображення функції, ядро інтегрального перетворення.*

Вступ. Для інтегральних перетворень Лапласа, Лапласа-Карсона, Фур’є, Мелліна з нескінченними межами, які алгебраїзують диференціальні рівняння, незважаючи на те, що для них є досить детальні таблиці прямих і зворотних перетворень, проте перехід від зображення до оригіналу в багатьох випадках є неможливим, оскільки така задача відноситься до класу некоректних [1]. Вказаного недоліку позбавлений метод інтегрального перетворення зі скінченними межами, в якому перехід від зображення до оригіналу завжди можливий.

Основна частина. Розглянемо пряме інтегральне перетворення [2], застосоване до деякої функції-оригінала $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ за однією із змінних x_k ($k = \overline{1, n}$). В результаті отримаємо зображення цієї функції за змінною x_k:

$$\overline{f}\left(x_1,x_2,...,x_{k-1},\gamma_k,x_{k+1},...,x_n\right)=\int\limits_a^b f\left(x_1,x_2,...,x_k,...,x_n\right)K\left(x_k,\gamma_k\right)dx_k\,, \qquad (1)$$

де $x_k\in\left(a,b\right)$, $K\left(x_k,\gamma_k\right)$ — ядро інтегрального перетворення за змінною x_k, $\overline{f}$ — зображення, f — оригінал.

Розглянемо процес теплоперенесення, який із деякими спрощеннями описується рівнянням теплопровідності з частинними похідними параболічного типу

$$\begin{gathered}\frac{1}{a_0}\frac{\partial T\left(x,y,z,t\right)}{\partial t}=a\left(x,y,z\right)\frac{\partial^2 T\left(x,y,z,t\right)}{\partial x^2}+b\left(x,y,z\right)\frac{\partial T\left(x,y,z,t\right)}{\partial x}+\\ +c\left(x,y,z\right)T\left(x,y,z,t\right)+\Delta_{y,z}T\left(x,y,z,t\right)+f\left(x,y,z,t\right),\end{gathered} \qquad (2)$$

де $x\in\left(a_x,b_x\right)$, $\Delta_{y,z}T\left(x,y,z,t\right)$ — частина диференціальних операцій, які не залежать від змінної x.

Пряме перетворення. Застосуємо до рівняння (2) інтегральне перетворення (1) зі скінченними межами за змінною x та ядром $K(x)$:

$$\begin{gathered}\frac{1}{a_0}\int\limits_{a_x}^{b_x}\frac{\partial T}{\partial t}K\left(x\right)dx=\int\limits_{a_x}^{b_x}a\left(x,y,z\right)\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}K\left(x\right)dx+\int\limits_{a_x}^{b_x}b\left(x,y,z\right)\frac{\partial T}{\partial x}K\left(x\right)dx+\\ +\int\limits_{a_x}^{b_x}c\left(x,y,z\right)TK\left(x\right)dx+\int\limits_{a_x}^{b_x}\Delta_{y,z}TK\left(x\right)dx+\int\limits_{a_x}^{b_x}fK\left(x\right)dx.\end{gathered} \qquad (3)$$

Ліва частина рівняння запишеться:

$$\frac{1}{a_0}\int\limits_{a_x}^{b_x}\frac{\partial T}{\partial t}K\left(x\right)dx=\frac{1}{a_0}\int\limits_{a_x}^{b_x}\frac{\partial TK\left(x\right)}{\partial t}dx=\frac{1}{a_0}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{a_x}^{b_x}TK\left(x\right)dx=\frac{1}{a_0}\frac{\partial\overline{T}}{\partial t}\,. \qquad (4)$$

Для правої частини є два варіанти [3]:

1) $c=c\left(y,z\right)$ — коефіцієнт не залежить від змінної x

$$\begin{gathered}\frac{1}{a_0}\frac{\partial\overline{T}}{\partial t}=\int\limits_{a_x}^{b_x}\left(a\left(x,y,z\right)\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+b\left(x,y,z\right)\frac{\partial T}{\partial x}\right)K\left(x\right)dx+\\ +c\left(y,z\right)\overline{T}+\overline{\Delta_{y,z}T}+\overline{f}\left(x,y,z,t\right);\end{gathered} \qquad (5)$$

2) $c=c\left(x,y,z\right)$ — коефіцієнт залежить від змінної x

$$\begin{gathered}\frac{1}{a_0}\frac{\partial\overline{T}}{\partial t}=\\ =\int\limits_{a_x}^{b_x}\left(a\left(x,y,z\right)\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+b\left(x,y,z\right)\frac{\partial T}{\partial x}+c\left(x,y,z\right)T\right)K\left(x\right)dx+\overline{\Delta_{y,z}T}+\overline{f}.\end{gathered} \qquad (6)$$

Застосувавши інтегрування частинами, отримаємо для цих випадків відповідно:

$$\frac{1}{a_0}\frac{\partial \overline{T}}{\partial t} = \left[\left(a\frac{\partial T}{\partial x} + bT\right)K - T\frac{\partial aK}{\partial x}\right]\Bigg|_{a_x}^{b} + \\ + \int_{a_x}^{b_x}\left[\frac{\partial^2 aK}{\partial x^2} - \frac{\partial bK}{\partial x}\right]Tdx + c\overline{T} + \overline{\Delta_{y,z}T} + f; \tag{7}$$

та

$$\frac{1}{a_0}\frac{\partial \overline{T}}{\partial t} = \left[\left(a\frac{\partial T}{\partial x} + bT\right)K - T\frac{\partial aK}{\partial x}\right]\Bigg|_{a_x}^{b_x} + \\ + \int_{a_x}^{b_x}\left[\frac{\partial^2 aK}{\partial x^2} - \frac{\partial bK}{\partial x} + cK\right]Tdx + \overline{\Delta_{y,z}T} + f. \tag{8}$$

Щоб позбутись інтегральних доданків, накладемо вимогу на ядро $K(x)$:

1) $$\frac{\partial^2 aK}{\partial x^2} - \frac{\partial bK}{\partial x} = -\mu^2 K, \tag{9}$$

тоді $\int_{a_x}^{b_x}\left[\frac{\partial^2 aK}{\partial x^2} - \frac{\partial bK}{\partial x}\right]Tdx = \int_{a_x}^{b_x}\left(-\mu^2\right)KTdx = -\mu^2\overline{T}$, а перетворене рівняння набере вигляду

$$\frac{1}{a_0}\frac{\partial \overline{T}}{\partial t} = -\mu^2\overline{T} + c\overline{T} + \overline{\Delta_{y,z}T} + \overline{f} + L_1; \tag{10}$$

2) $$\frac{\partial^2 aK}{\partial x^2} - \frac{\partial bK}{\partial x} + cK = -\mu^2 K, \tag{11}$$

тоді $\int_{a_x}^{b_x}\left[\frac{\partial^2 aK}{\partial x^2} - \frac{\partial bK}{\partial x} + cK\right]Tdx = -\mu^2\overline{T}$, а перетворене рівняння набере вигляду

$$\frac{1}{a_0}\frac{\partial \overline{T}}{\partial t} = -\mu^2\overline{T} + \overline{\Delta_{y,z}T} + \overline{f} + L_1, \tag{12}$$

де

$$L_1 = \left[\left(a\frac{\partial T}{\partial x} + bT\right)K - T\frac{\partial aK}{\partial x}\right]\Bigg|_{a_x}^{b_x}. \tag{13}$$

Визначимо ядро інтегрального перетворення. Для цього представимо його у вигляді $K(x) = \frac{1}{C_\mu}\rho(x)K_1(x,\mu)$. Маємо:

$$\frac{\partial bK}{\partial x}=\frac{1}{C_\mu}\frac{\partial b\rho(x)K_1(x,\mu)}{\partial x}=$$
$$=\frac{1}{C_\mu}K_1(x,\mu)\frac{\partial b\rho(x)}{\partial x}+\frac{1}{C_\mu}b\rho(x)\frac{\partial K_1(x,\mu)}{\partial x}, \tag{14}$$

$$\frac{\partial^2 aK}{\partial x^2}=\frac{1}{C_\mu}\left(K_1\frac{\partial^2 a\rho}{\partial x^2}+2\frac{\partial K_1}{\partial x}\frac{\partial a\rho}{\partial x}+a\rho\frac{\partial^2 K_1}{\partial x^2}\right). \tag{15}$$

Враховуючи (14) і (15), вимоги до ядра інтегрального перетворення (9) і (11) набудуть відповідно вигляду:

1) $$a\rho\frac{\partial^2 K_1}{\partial x^2}+\left(2\frac{\partial a\rho}{\partial x}-b\rho\right)\frac{\partial K_1}{\partial x}+\left(\frac{\partial^2 a\rho}{\partial x^2}-\frac{\partial b\rho}{\partial x}\right)K_1+\mu^2\rho K_1=0, \tag{16}$$

2) $$a\rho\frac{\partial^2 K_1}{\partial x^2}+\left(2\frac{\partial a\rho}{\partial x}-b\rho\right)\frac{\partial K_1}{\partial x}+\left(\frac{\partial^2 a\rho}{\partial x^2}-\frac{\partial b\rho}{\partial x}\right)K_1+\left(\mu^2+c\right)\rho K_1=0. \tag{17}$$

Для спрощення вигляду рівнянь (16), (17) накладемо умову на вагову функцію $\rho(x)$ так, щоб виконувалась рівність

$$\frac{\partial a\rho}{\partial x}-b\rho=0, \tag{18}$$

звідки $\frac{\partial^2 a\rho}{\partial x^2}-\frac{\partial b\rho}{\partial x}=0$.

Тоді умови (16), (17) набудуть вигляду:

1) $$\frac{\partial}{\partial x}\left(a\rho\frac{\partial K_1}{\partial x}\right)+\mu^2\rho K_1=0, \tag{19}$$

2) $$\frac{\partial}{\partial x}\left(a\rho\frac{\partial K_1}{\partial x}\right)+\left(\mu^2+c\right)\rho K_1=0. \tag{20}$$

З умови (18) визначимо вагову функцію $\rho(x)$:

$$a\frac{\partial\rho}{\partial x}+\rho\frac{\partial a}{\partial x}-b\rho=0,\ \frac{d\rho}{dx}=\frac{1}{a}\rho\left(b-\frac{\partial a}{\partial x}\right).$$

Можливі випадки:

1) коефіцієнт *a* не залежить від *x*. Тоді $\frac{\partial a}{\partial x}=0$, і, проінтегрувавши за змінною *x*, отримаємо: $\int\limits_{a_x}^{b_x}\frac{d\rho}{\rho}=\int\limits_{a_x}^{b_x}\frac{b}{a}dx$, звідки $\ln|\rho|=\frac{1}{a}\int\limits_{a_x}^{b_x}bdx$, або

$$|\rho|=e^{\frac{1}{a}\int_{a_x}^{b_x}b(x)dx}; \tag{21}$$

2) коефіцієнт a залежить від x, тоді $\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dx}=\frac{1}{a}\left(b-\frac{\partial a}{\partial x}\right)$, а проінтегрувавши за змінною x, отримаємо

$$|\rho| = e^{\int_{a_x}^{b_x}\frac{1}{a(x)}\left(b(x)-\frac{\partial a(x)}{\partial x}\right)dx}. \tag{22}$$

Для визначення головної частини ядра K_1 розв'яжемо задачу (19) (або (20)), в залежності від коефіцієнта c із граничними умовами, які отримуються із граничних умов вихідної задачі, при прирівнюванні їх до нуля:

$$\left.\left(\alpha_1\frac{\partial K_1}{\partial x}+\beta_1 K_1\right)\right|_{x=a_x}=0\,,\ \left.\left(\alpha_2\frac{\partial K_1}{\partial x}+\beta_2 K_1\right)\right|_{x=b_x}=0\,. \tag{23}$$

Умови (19) або (20), накладені на ядро K_1, разом із однорідними граничними умовами (23) утворюють класичну задачу Штурма-Ліувілля на знаходження власних функцій K_{1_i} і власних чисел μ_i^2.

Перетворення граничної умови

$$\left.\left(\alpha_y\frac{\partial T}{\partial y}+\beta_y T\right)\right|_{y=a_y}=F_{гр3}$$

за іншими змінними будемо проводити наступним чином. Вважаючи, що α_y,β_y не залежать від змінної x, застосуємо інтегральне перетворення до граничної умови:

$$\left.\left(\alpha_y\frac{\partial \overline{T}}{\partial y}+\beta_y \overline{T}\right)\right|_{y=a_y}=\overline{F_{гр3}}\,.$$

Для обчислення позаінтегрального доданку L_1, виходячи із (13) і, враховуючи (18), отримаємо:

$$\begin{aligned}L_1 &= \frac{1}{C_\mu}\left[\left(a\frac{\partial T}{\partial x}+bT\right)\rho K_1 - T\frac{\partial a\rho K_1}{\partial x}\right]\Bigg|_{a_x}^{b_x}=\\ &=\frac{1}{C_\mu}\left[a\rho\left(K_1\frac{\partial T}{\partial x}-T\frac{\partial K_1}{\partial x}\right)\right]\Bigg|_{a_x}^{b_x}.\end{aligned} \tag{24}$$

В залежності від роду граничних умов вираз (24) для обчислення L_1 приймає вигляд:

а) у випадку граничних умов I роду

$$\begin{cases} T|_{x=a_x}=F^-_{гр1}(t) \\ T|_{x=b_x}=F^+_{гр1}(t)\end{cases},\ \begin{cases} K_1|_{x=a_x}=0 \\ K_1|_{x=b_x}=0\end{cases},$$

$$L_1 = \frac{1}{C_\mu}\left[a(a_x)\rho(a_x)F^-_{гр1}(t)\frac{dK_1}{dx}\bigg|_{x=a_x} - a(b_x)\rho(b_x)F^+_{гр1}(t)\frac{dK_1}{dx}\bigg|_{x=b_x} \right]; \quad (25)$$

б) у випадку граничних умов II роду

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x=a_x} = F^-_{гр2}(t) \\ \dfrac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x=b_x} = F^+_{гр2}(t) \end{cases}, \quad \begin{cases} \dfrac{dK_1}{dx}\bigg|_{x=a_x} = 0 \\ \dfrac{dK_1}{dx}\bigg|_{x=b_x} = 0 \end{cases},$$

$$L_1 = \frac{1}{C_\mu}\left[a(b_x)\rho(b_x)F^+_{гр2}(t)K_1(b_x) - a(a_x)\rho(a_x)F^-_{гр2}(t)K_1(a_x) \right]; \quad (26)$$

в) у випадку граничних умов III роду

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial T}{\partial x} \pm h_1 T\right)\bigg|_{x=a_x} = F^-_{гр3}(t) \\ \left(\dfrac{\partial T}{\partial x} \pm h_1 T\right)\bigg|_{x=b_x} = F^+_{гр3}(t) \end{cases}, \quad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial K_1}{\partial x} \pm h_1 K_1\right)\bigg|_{x=a_x} = 0 \\ \left(\dfrac{\partial K_1}{\partial x} \pm h_1 K_1\right)\bigg|_{x=b_x} = 0 \end{cases},$$

$$L_1 = \frac{1}{C_\mu}\left[a(b_x)\rho(b_x)K_1(b_x)F^+_{гр3}(t) - a(a_x)\rho(a_x)K_1(a_x)F^-_{гр3}(t) \right]. \quad (27)$$

Зворотне перетворення. Розв'язавши рівняння в зображеннях (12), ми отримаємо його розв'язок у зображеннях. Для розв'язування вихідної задачі потрібно здійснити перехід від зображень до оригіналів.

Із розв'язку задачі Штурма-Ліувілля (19), (20), (23) знаходимо K_1 і визначаємо ядро інтегрального перетворення $K(x) = \dfrac{1}{C_\mu}\rho(x)K_1(x,\mu)$.

Запишемо шукану функцію T у вигляді ряду, який є розкладом за власними функціями:

$$T = \sum_{i=1}^{\infty} s_i K_{1_i} . \quad (28)$$

Помноживши (28) на ρK_{1_ξ} та проінтегрувавши у межах від a_x до b_x, отримаємо

$$\int_{a_x}^{b_x} \rho K_{1_\xi} T dx = \sum_{i=1}^{\infty} s_i \int_{a_x}^{b_x} \rho K_{1_\xi} K_{1_i} dx . \quad (29)$$

У зв'язку із умовою ортогональності власних функцій інтеграл у правій частині (29) відмінний від нуля лиш при $\xi = i$:

$$\int_{a_x}^{b_x} \rho K_{1_\xi} K_{1_i} dx = \begin{cases} 0, \xi \neq i, \\ C_\xi, \xi = i. \end{cases} \quad (30)$$

Тоді (29) можна записати

$$\int_{a_x}^{b_x} \rho K_{1_\xi} T dx = s_\xi C_\xi ,$$

звідки

$$s_\xi = \frac{1}{C_\xi} \int_{a_x}^{b_x} \rho K_{1_\xi} T dx = \int_{a_x}^{b_x} K T dx = \overline{T} .$$

Підставивши отримане значення s_ξ у (28), маємо можливість обчислити оригінал шуканого розв'язку вихідного рівняння

$$T = \sum_{i=1}^{\infty} \overline{T} K_{1_i}(x) . \quad (31)$$

Висновки. Розглянутий метод інтегрального перетворення зі скінченними межами виявився ефективним при розв'язуванні диференціального рівняння із частинними похідними. Серед переваг методу слід виділити можливість переходу від зображення до оригіналу, яке можливо здійснити завжди. Перспективними дослідженнями з даного напрямку можна зазначити відшукання комбінацій вказаного та інших, можливо наближених, методів для спрощення числової реалізації розв'язку.

Список використаних джерел:

1. Крылов В. И. Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа / В. И. Крылов, Н. С. Скобля. — М. : Наука, 1974. — 223 с.
2. Кошляков Н. С. Уравнения в частных производных математической физики : учеб. пособие [для мех.-мат. фак. ун-тов] / Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов. — М. : Высшая школа, 1970. — 712 с.
3. Федоткін І. М. Математичне моделювання технологічних процесів: Методи математичного моделювання і розв'язання процесних задач / І. М. Федоткін, І. Ю. Бурляй, М. О. Рюмшин. — К. : Техніка, 2002. — 407 с.

The method of integral transforms with finite boundaries was considered in the article and as an example the heat equation was solved by this method. The expressions for the calculation of the kernel of the integral transformation and of the outside integral summand, depending on the different kinds of boundary conditions were shown. The formulas of recovering the original corresponding to a given transform were deduced.

Key words: *integral transform, function transform, kernel of the integral transform.*

Отримано: 25.03.2015