УДК 519.85

О.А. ЕМЕЦ, Т.Н. БАРБОЛИНА

РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ БЕЗУСЛОВНЫХ ЗАДАЧ КОМБИНАТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ НА РАЗМЕЩЕНИЯХ СО СТОХАСТИЧЕСКОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬЮ

Аннотация. Рассматривается решение линейной безусловной задачи комбинаторной оптимизации на размещениях со стохастической неопределенностью. Минимум при этом определяется на основе последовательного сравнения числовых характеристик случайных величин. Для рассматриваемой стохастической задачи установлены свойства решения, использующие свойства решения специально сформулированных детерминированных задач. Предложен также редукционный метод решения линейной безусловной задачи комбинаторной стохастической оптимизации на размещениях, основанной на полученных свойствах решения.

Ключевые слова: евклидова задача комбинаторной оптимизации, задача оптимизации на размещениях, стохастическая неопределенность, стохастическая оптимизация, стохастическая комбинаторная оптимизация.

ВВЕДЕНИЕ

Теория и методы комбинаторной оптимизации [1–10] в настоящее время активно развиваются на основе погружения комбинаторных множеств в евклидово пространство в рамках евклидовой комбинаторной оптимизации [4–10]. Развитие евклидовой комбинаторной оптимизации, необходимость построения адекватных моделей в условиях неполной информации привело к исследованию задач с различными видами неопределенности, в том числе вероятностной. Изучению задач со стохастической неопределенностью посвящена достаточно обширная библиография (например, [11–16]), однако вопрос о решении задач, в которых имеют место как комбинаторные ограничения, так и вероятностная неопределенность, недостаточно изучен.

В работах [7–9] изложен подход к постановкам евклидовых задач комбинаторной оптимизации с вероятностной неопределенностью, основанный на введении отношения порядка на множестве случайных величин. Один из рассмотренных порядков вводится на фактор-множестве по некоторому отношению эквивалентности [7]. Такой порядок тесно связан с отношением предпочтения на множестве случайных величин. В данной статье предлагается постановка стохастических оптимизационных задач на основе введения отношения предпочтения, а также исследуются свойства сформулированной задачи. Показана возможность построения детерминированной задачи, решение которой определяют некоторые существенные свойства решения стохастической задачи. Также обоснован редукционный метод решения комбинаторной стохастической оптимизационной задачи: разбиение исходной задачи на подзадачи меньшей размерности.

НЕОБХОДИМЫЕ ПОНЯТИЯ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Определим для случайной величины A характеристический вектор в виде $H(A)=(h_1(A),\ldots,h_s(A))$, где $h_i(A)$, $i\in J_s=\{1,2,\ldots,s\}$, — некоторые числовые характеристики случайной величины A (здесь и далее J_n обозначает множество n первых натуральных чисел). Будем полагать, что характеристический вектор удовлетворяет условию

$$h_i(aA+bB)=a^{\lambda_i}h_i(A)+b^{\lambda_i}h_i(B) \quad \forall i\in J_s, \tag{1}$$

где A, B — независимые случайные величины, $a, b\in R^1$ — действительные числа, $\lambda_i \in Z$ — целые положительные константы.

В частности, числовыми характеристиками в условии (1) может быть математическое ожидание или дисперсия. Действительно, из свойств математического ожидания $M(\cdot)$ и дисперсии $D(\cdot)$ [17] следует справедливость таких соотношений: $M(aA+bB)=aM(A)+bM(B)$ (при $\lambda=1$), $D(aA+bB)=a^2D(A)+b^2D(B)$ ($\lambda=2$).

Пусть $<_l$ обозначает лексикографическое упорядочение в s-мерном евклидовом пространстве, т.е. для любых u, $u'\in R^s$ по определению считается $u<_l u'$, если первая ненулевая компонента разности $u-u'$ отрицательна. Будем записывать $u\le_l u'$, если $u<_l u'$ или $u=u'$.

Определение. Назовем две случайные величины A и B упорядоченными в неубывающем порядке $\preceq$ (и обозначим это $A\preceq B$) тогда и только тогда, когда $H(A)\le_l H(B)$.

Несложно убедиться, что введенное отношение является транзитивным (если $H(A)\le_l H(B)$ и $H(B)\le_l H(C)$, то $H(A)\le_l H(C)$) и полным [18] (так как для любых двух векторов $H(A)$ и $H(B)$ выполняется одно из соотношений: $H(A)\le_l H(B)$ либо $H(B)\le_l H(A)$, тогда для любых двух случайных величин, A и B имеем $A\preceq B$ либо $B\preceq A$). Таким образом, отношение $\preceq$ является отношением предпочтения [16]. Как известно [16], минимальным элементом в множестве Ω, на котором задано отношение предпочтения, является элемент $A\in\Omega$ такой, что $A\preceq B$ для всех $B\in\Omega$.

Пусть $X=(X_1, X_2,\ldots, X_k)$ — многомерная случайная величина. Рассмотрим линейную функцию $C(X)=\sum_{j=1}^{k}c_jX_j$, где $c_j\in R^1$, $X_j\in\Omega$ $\forall j\in J_k$, причем значения функции также принадлежат множеству Ω при любых $X_j\in\Omega$ $\forall j\in J_k$. Тогда линейная задача стохастической оптимизации на некоторой области D состоит в нахождении минимума и минимали функции $C(X)$ при условии $X\in D$.

В частности, область D может быть евклидовым комбинаторным множеством, определение которого дано в [6]. Под мультимножеством G понимаем совокупность элементов, среди которых могут быть одинаковые. Любое мультимножество $G=\{g_1,\ldots, g_\eta\}$ можно задать его основой $S(G)$, т.е. кортежем всех его различных элементов, и кратностью — числом повторов каждого элемента основы. Кортеж кратностей в порядке, соответствующем элементам основы, называют первичной спецификацией и обозначают $[G]$. Евклидовым комбинаторным множеством называют множество, различными элементами которого являются различные упорядоченные k-выборки из мультимножества $G=\{g_1,\ldots, g_\eta\}$ вида

$$(g_{i_1}, g_{i_2},\ldots, g_{i_k}), \tag{2}$$

$g_{i_j}\in G$, $i_j\ne i_t$ $\forall i_j, i_t\in J_n$, $\forall j, t\in J_k$. Примерами евклидовых комбинаторных множеств являются [6] общее множество размещений $E_\eta^k(G)$ — множество всех k-выборок вида (2) из мультимножества G, общее множество перестановок $E_\eta(G)=E_\eta^\eta(G)$.

Введение понятия евклидового комбинаторного множества позволяет выделить из задач комбинаторной природы класс задач, в которых допустимое множество является евклидовым комбинаторным множеством. В частности, евклидова безусловная задача оптимизации на размещениях с линейной целевой функцией заключается в нахождении пары $\langle L(x^*), x^* \rangle$ (состоящей из экстремума и экстремали) такой, что

$$L(x^*) = \underset{x \in E_\eta^k(G)}{\text{extr}} \sum_{j=1}^{k} c_j x_j , \; x^* = \underset{x \in E_\eta^k(G)}{\text{argextr}} \sum_{j=1}^{k} c_j x_j \,, \tag{3}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_k) \in R^k$, $c_j \in R^1$ $\forall j \in J_k$. Критерий решения задачи (3) устанавливает следующая теорема.

Теорема 1 [10]. Пусть элементы мультимножества в задаче (3) упорядочены по неубыванию, а коэффициенты целевой функции удовлетворяют условию

$$c_{p_1} = \ldots = c_{p_2 - 1} > c_{p_2} = \ldots = c_{p_3 - 1} > \ldots > c_{p_s} = \ldots = c_k ,$$

причем r — наибольший индекс такой, что $c_{p_r} > 0$, а t — наименьший индекс такой, что $c_{p_t} < 0$. Точка x^* является минималью в решении задачи (3) тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условиям

$$(x^*_{p_w}, \ldots, x^*_{p_{w+1}-1}) \in E_{m_w}(G^w) \;\; \forall w \in J_r \,, \; G^w = \{g_{p_w}, \ldots, g_{p_{w+1}-1}\} \,, \; m_w = |G^w| \,,$$

$$(x^*_{p_w}, \ldots, x^*_{p_{w+1}-1}) \in E_{\overline{m}_w}(\overline{G}^w) \;\; \forall w \in J_k \setminus J_{t-1},$$
$$\overline{G}^w = \{g_{\eta - k + p_w}, \ldots, g_{\eta - k + p_{w+1} - 1}\} \,, \; \overline{m}_w = |\overline{G}^w| \,.$$

Настоящая статья посвящена изучению свойств линейной безусловной задачи стохастической комбинаторной оптимизации на размещениях в следующей постановке: найти пару $\langle L(X^*), X^* \rangle$ такую, что

$$L(X^*) = \min_{X \in E_\eta^k(\Gamma)} \sum_{j=1}^{k} c_j X_j , \; X^* = \arg \min_{X \in E_\eta^k(\Gamma)} \sum_{j=1}^{k} c_j X_j , \tag{4}$$

где $c_j \in R^1$ $\forall j \in J_k$, $E_\eta^k(\Gamma)$ — общее множество k-размещений из элементов мультимножества $\Gamma = \{G_1, \ldots, G_\eta\}$. Элементы Γ являются независимыми случайными величинами, причем $H(G_i) \ge_l 0$ $\forall i \in J_\eta$. Также будем считать, что коэффициенты целевой функции упорядочены по невозрастанию:

$$c_1 \ge c_2 \ge \ldots \ge c_\alpha > 0 = c_{\alpha+1} = \ldots = c_{\beta-1} > c_\beta \ge \ldots \ge c_k . \tag{5}$$

ВЗАИМОСВЯЗЬ СТОХАСТИЧЕСКИХ И ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ НА РАЗМЕЩЕНИЯХ

Сформируем мультимножества $Q_r = \{q_{r1}, \ldots, q_{r\eta}\}$, где $q_{rj} = h_r(G_j)$ $\forall j \in J_\eta$, и вместе с задачей (4) будем рассматривать детерминированные задачи минимизации функций $\overline{L}_r(x) = \sum_{j=1}^{k} c_j^{\lambda_r} x_j$, где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$, на соответствующих множествах $E_\eta^k(Q_r)$:

$$\overline{L}_r(x') = \min_{x \in E_\eta^k(Q_r)} \sum_{j=1}^{k} c_j^{\lambda_r} x_j \;, \; x' = \arg \min_{x \in E_\eta^k(Q_r)} \sum_{j=1}^{k} c_j^{\lambda_r} x_j \,. \tag{6}$$

Рассмотрим характеристический вектор $H(A) = (h_1(A), \ldots, h_s(A))$, а также векторы $H_r(A) = (h_1(A), \ldots, h_r(A))$ для всех $r \in J_s$, $H_0(A) = \varnothing$. Пусть $r \in J_s$ — такой индекс, что элементы мультимножества Γ удовлетворяют условию

$$H_{r-1}(G_i) = H_{r-1}(G_j) \;\; \forall i, j \in J_\eta, \; G_i, G_j \in \Gamma \tag{7}$$

(в случае $r = 1$ условие (7) всегда выполняется, так как $H_0(G_i) = \varnothing$ $\forall i \in J_\eta$).

Пример 1. Пусть для элементов мультимножества $\Gamma = \{G_1, G_2, G_3, G_4\}$ соответствующие характеристические векторы имеют вид $H(G_1) = (5; -2; 0; 1)$, $H(G_2) = (5; -2; 0; 2)$, $H(G_3) = (5; -2; 4; 0)$, $H(G_4) = (5; -2; 4; 2)$. Тогда $H_2(G_j) = (5; -2)$ $\forall j \in J_4$, однако для $r = 4$ условие (7) не выполняется (в частности, $H_3(G_1) \neq H_3(G_3)$). Мультимножества имеют вид $Q_1 = \{5; 5; 5; 5\}$, $Q_2 = \{-2; -2; -2; -2\}$, $Q_3 = \{0; 0; 4; 4\}$, $Q_4 = \{1; 2; 0; 2\}$.

Отметим, что при выполнении условия (7) мультимножества Q_j для всех $j \in J_{r-1}$ содержат η равных элементов.

Теорема 2. Пусть характеристический вектор случайной величины удовлетворяет условию (1), причем выполняются соотношения (7). Тогда существует минималь $X' \in E_\eta^k(\Gamma)$ в задаче (4) такая, что

$$h_r(X'_j) = x'_j \quad \forall j \in J_k, \tag{8}$$

где $\langle \overline{L}^r(x'), x' \rangle$ — решение задачи (6).

Доказательство. Для точки $X \in E_\eta^k(\Gamma)$ обозначим $\rho(X) = (h_r(X_1), \ldots, h_r(X_k))$. Очевидно, что $E_\eta^k(Q_r) = \{\rho(X) \mid X \in E_\eta^k(\Gamma)\}$. Так как характеристический вектор удовлетворяет условию (1), то

$$h_r(L(X)) = h_r\Big(\sum_{j=1}^{k} c_j X_j\Big) = \sum_{j=1}^{k} c_j^{\lambda_r} h_r(X_j) = \overline{L}_r(\rho(X)).$$

Из условия (6) следует, что для любой точки $x \in E_\eta^k(Q_r)$ выполняется неравенство $\overline{L}_r(x') \le \overline{L}_r(x)$, а так как $\overline{L}_r(\rho(X)) = h_r(L(X))$, то также $\overline{L}_r(x') \le h_r(L(X))$ для любой точки $X \in E_\eta^k(\Gamma)$, в частности $\overline{L}_r(x') \le h_r(L(X^*))$, где X^* — минималь в задаче (4). Однако поскольку X^* — минималь в задаче (4), то $L(X^*) \preceq L(X')$, где точка X' удовлетворяет условию (8). Следовательно, $H(L(X^*)) \le_l H(L(X'))$. Так как выполняются условия (7), то $h_r(L(X^*)) \le h_r(L(X')) = \overline{L}_r(\rho(X')) = \overline{L}_r(x')$. Таким образом, $\overline{L}_r(x') = h_r(L(X^*))$.

Следовательно, $\rho(X^*)$ является минималью в задаче (6). Тогда, как следует из теоремы 1, выполняются условия: вектор $(h_r(X^*_{p_w}), \ldots, h_r(X^*_{p_{w+1}-1}))$ является перестановкой из элементов мультимножества $\{x'_{p_w}, \ldots, x'_{p_{w+1}-1}\}$, где индексы p_w таковы, что $c_{p_w} = \ldots = c_{p_{w+1}-1} \neq c_{p_{w+1}}$ ($p_1 = 1$, $p_{s+1} - 1 = k$). Значит, ряд распределения дискретной случайной величины $\sum_{j=p_w}^{p_{w+1}-1} c_j X_j = \sum_{j=p_w}^{p_{w+1}-1} c X_j$ (где $c = c_{p_w} = \ldots = c_{p_{w+1}-1}$) не зависит от порядка величин X_j, т.е. $\sum_{j=p_w}^{p_{w+1}-1} c X_j^* = \sum_{j=p_w}^{p_{w+1}-1} c X'_j$, где вектор $(X'_{p_w}, \ldots, X'_{p_{w+1}-1})$ является такой перестановкой элементов мультимножества $\{X^*_{p_w}, \ldots, X^*_{p_{w+1}-1}\}$, для которой $h_r(X'_{p_w}) = x'_{p_w}$, ...

$\ldots,\ h_r(X'_{p_{w+1}-1}) = x'_{p_{w+1}-1}$. Таким образом, точка $X' = (X'_1, \ldots, X'_{p_w}, \ldots, X'_{p_{w+1}}, \ldots$ $\ldots, X'_k)$ удовлетворяет условию (8), при этом выполнено равенство

$$L(X') = \sum_{j=1}^{k} c_j X'_j = \sum_{w=1}^{s} \sum_{j=p_w}^{p_{w+1}-1} c_j X'_j = \sum_{w=1}^{s} \sum_{j=p_w}^{p_{w+1}-1} c_j X_j^* = L(X^*) .$$

Теорема доказана.

Пример 2. Пусть элементы мультимножества $\Gamma = \{A_1, A_2, A_2, A_3\}$ $(\eta = 4)$ являются независимыми нормально распределенными случайными величинами, имеющие следующие математические ожидания и дисперсии, соответствуют $M(A_1) = M(A_2) = 3$, $M(A_3) = 5$; $D(A_1) = 4$, $D(A_2) = 5$, $D(A_3) = 1$. Пусть также $h_1(A) = M(A)$, $h_2(A) = D(A)$, т.е. $H(A) = (M(A); D(A))$. Тогда $H(A_1) \le_l$ $\le_l H(A_2) \le_l H(A_3)$ и, следовательно, $A_1 \preceq A_2 \preceq A_3$. Рассмотрим общее множество 3-размещений. Оно содержит 12 элементов:

$$E_4^3(\Gamma) = \{(A_1, A_2, A_2), (A_2, A_1, A_2), (A_2, A_2, A_1),$$

$$(A_1, A_2, A_3), (A_1, A_3, A_2), (A_2, A_1, A_3), (A_2, A_3, A_1), (A_3, A_1, A_2), (A_3, A_2, A_1),$$

$$(A_2, A_2, A_3), (A_2, A_3, A_2), (A_3, A_2, A_2)\}.$$

Рассмотрим решение задачи (4), где $k = 3$, $L(X) = 5X_1 + 3X_2 - 2X_3$. Так как $h_1(A_3) \ne h_1(A_2)$, $h_1(A_2) = h_1(A_1)$, то в условии (7) $r = 1$. Мультимножество Q_1 равно $\{3, 3, 3, 5\}$, и так как для математического ожидания в формуле (1) величина $\lambda_1 = 1$, то целевая функция в задаче (6) имеет вид $\overline{L}_1(x) = 5x_1 + 3x_2 - 2x_3$. Минималью в задаче (6) в соответствии с теоремой 1 является точка $x' = (3; 3; 5)$. Тогда согласно теореме 2 для некоторой минимали в задаче стохастической комбинаторной оптимизации (4) выполняются условия $h_1(X_1) = h_1(X_2) = 3$, $h_1(X_3) = 5$. Этим условиям удовлетворяют три элемента множества размещений $E_\eta^k(\Gamma)$: $X' = (A_1, A_2, A_3)$, $X'' = (A_2, A_1, A_3)$, $X''' = (A_2, A_2, A_3)$. При этом $M(L(X')) = M(L(X'')) = M(L(X''')) = \overline{L}_1(x') = 14$, а так как $D(L(X)) = 25X_1 +$ $+ 9X_2 + 4X_3$, то $D(L(X')) = 149$, $D(L(X'')) = 165$, $D(L(X''')) = 174$. Таким образом, $H(X') \le_l H(X'') \le_l H(X''')$, откуда $X' \preceq X'' \preceq X'''$, т.е. минималью в задаче (4) является точка X'.

Следствие 1. Пусть характеристический вектор случайной величины удовлетворяет условию (1), причем выполняются соотношения (7) и неравенство

$$h_r(G_1) \le \ldots \le h_r(G_\eta) . \tag{9}$$

Если также все коэффициенты целевой функции $L(X)$ в задаче (4) положительны (т.е. в условии (5) $\alpha = k$), то существует минималь X' в задаче (4) такая, что

$$h_r(X'_j) = h_r(G_j) \ \ \forall j \in J_k . \tag{10}$$

Доказательство. Так как в соответствии с условием теоремы $c_1 \ge c_2 \ge \ldots \ge c_k > 0$, то также $c_1^{\lambda_r} \ge c_2^{\lambda_r} \ge \ldots \ge c_k^{\lambda_r} > 0$. Тогда на основании решения детерминированной линейной безусловной задачи оптимизации на размещениях (теорема 1) и исходя из условия (9) следует, что одной из минималей задачи (6) является точка, удовлетворяющая условию (10). Следствие доказано.

Пример 3. Как и в примере 2, будем считать, что $H(A) = (M(A); D(A))$. Рассмотрим решение задачи (4) при $k = 3$; если $L(X) = 5X_1 + 3X_2 + X_3$, элементы мультимножества $\Gamma = \{G_1, G_2, G_3, G_4\}$ являются независимыми случайными величинами, характеристические векторы которых соответственно имеют вид $H(G_1) = (7;3)$, $H(G_2) = (7;7)$, $H(G_3) = (7;12)$, $H(G_4) = (7;15)$. Так как $h_1(G_j) = 7$ $\forall j \in J_4$, то для элементов мультимножества Γ выполняется условие (7) при $r = 2$. Кроме того, имеет место условие (9).

Целевая функция в задаче (6) имеет вид $\overline{L}_2(x) = 25x_1 + 9x_2 + x_3$. При этом $Q_2 = \{3, 7, 12, 15\}$. В соответствии с теоремой 1 минималью в этой задаче является точка $x' = (3; 7; 12)$. Следовательно, для некоторой минимали X' в задаче (4) выполняется условие $D(X'_1) = 3$, $D(X'_2) = 7$, $D(X'_3) = 12$. Такая точка единственная — это $X' = (G_1, G_2, G_3)$; таким образом, она является минималью в решении задачи (4).

Рассмотрим теперь свойства минимали в задаче (4), если не все коэффициенты целевой функции положительны.

Обозначим $J_n^m = \{m, \ldots, n\}$ (таким образом, $J_n = J_n^1$).

Следствие 2. Пусть характеристический вектор случайной величины удовлетворяет условию (1), причем выполняются соотношения (7), (9) и λ_r — нечетное положительное число. Тогда существует минималь X' в задаче (4) такая, что

$$h_r(X'_j) = h_r(G_j) \ \ \forall j \in J_\alpha, \ \ h_r(X'_i) = h_r(G_{\eta-k+i}) \ \ \forall j \in J_k^\beta. \qquad (11)$$

Доказательство. Так как λ_r — нечетное положительное число, то условие (5) равносильно условию $c_1^{\lambda_r} \geq \ldots \geq c_\alpha^{\lambda_r} > 0 = \ldots = c_{\beta-1}^{\lambda_r} > c_\beta^{\lambda_r} \geq \ldots \geq c_k^{\lambda_r}$. Тогда из теоремы 1 и условия (9) следует, что одной из минималей задачи (6) является точка, удовлетворяющая условию (11). Следствие доказано.

Пример 4. Пусть элементы мультимножества $\Gamma = \{G_1, G_2, G_3, G_4, G_5\}$ являются независимыми дискретными случайными величинами с конечным числом значений. Пусть также $H(A) = (h_1(A); h_2(A); h_3(A))$, где $h_1(A) = M(A)$, $h_2(A)$ — наименьшее значение случайной величины A; $h_3(A) = D(A)$. Несложно убедиться, что $h_2(A)$ удовлетворяет условию (1), где $\lambda_2 = 1$.

Рассмотрим решение задачи (4), где $L(X) = 4X_1 - X_2 - 2X_3 - 4X_4$. Пусть характеристические векторы элементов мультимножества Γ соответственно имеют вид $H(G_1) = (7; 2; 25)$, $H(G_2) = (7; 5; 12)$, $H(G_3) = (7; 5; 8)$, $H(G_4) = (7; 5; 4)$, $H(G_5) = (7; 5; 2)$. Условие (7) выполняется для $r = 2$; и так как $\lambda_2 = 1$, то целевая функция в задаче (6) имеет вид $\overline{L}_2(x) = 4x_1 - x_2 - 2x_3 - 4x_4$, а элементы мультимножества $Q_2 = \{2, 5, 5, 5, 5\}$ удовлетворяют условию (9). Так как коэффициенты $\overline{L}_2(x)$ упорядочены по убыванию, причем один из них положительный, то минималью в решении задачи (6) является, как известно [6], точка x', для которой $x'_1 = q_{21} = 2$; $x'_2 = q_t$, где $t = 5 - 4 + 2$, т.е. $x'_2 = q_{23} = 5$; $x'_3 = q_{24} = 5$; $x'_4 = q_{25} = 5$. Следовательно, для некоторой минимали X' в задаче (4) выполняются условия $h_2(X'_1) = 2$, $h_2(X'_2) = h_2(X'_3) = h_2(X'_4) = 5$. Это означает, что первая координата минимали определяется однозначно $X'_1 = G_1$, а $(X'_2, X'_3, X'_4) \in E_4^3(\widetilde{\Gamma})$, где $\widetilde{\Gamma} = \{G_2, G_3, G_4, G_5\}$.

Следствие 3. Пусть характеристический вектор случайной величины удовлетворяет условию (1), λ_r — четное положительное число, причем выполняются соотношение (7) и неравенство

$$h_r(G_1) \geq \ldots \geq h_r(G_\eta). \qquad (12)$$

Если также все коэффициенты целевой функции $L(X)$ в задаче (4) отрицательны (т.е. в условии (5) $\beta = 1$), то существует минималь X' в задаче (4) такая, что

$$h_r(X'_j) = h_r(G_{\eta-k+j}) \ \ \forall j \in J_k. \qquad (13)$$

Доказательство. Рассмотрим мультимножество $\widetilde{Q}_r$ с элементами $\widetilde{q}_{rj} = h_r(G_{\eta-j+1})\ \forall j \in J_\eta$. Так как выполняется условие (12), то для элементов мультимножества $\widetilde{Q}_r$ справедливы неравенства $\widetilde{q}_{r\eta} \geq \ldots \geq \widetilde{q}_{r1}$.

Поскольку λ_r — четное положительное число и $0 > c_1 \geq c_2 \geq \ldots \geq c_k$, то $c_k^{\lambda_r} \geq c_{k-1}^{\lambda_r} \geq \ldots \geq c_1^{\lambda_r} > 0$. Задача (6) эквивалентна задаче максимизации функции $-\sum_{j=1}^{k} c_j^{\lambda_r} x_j = \sum_{j=1}^{k} (-c_j^{\lambda_r}) x_j$ на множестве $E_\eta^k(\widetilde{Q}_r)$, причем $0 > -c_1^{\lambda_r} \geq \ldots \geq -c_k^{\lambda_r}$. В соответствии с леммой 3 [10] одной из максималей в этой задаче является точка $x_j = \widetilde{q}_{r,k-j+1}$, т.е. $x_j = h_r(G_{\eta-k+j})$. Тогда в соответствии с теоремой 2 существует минималь X' в задаче (4), для которой выполняется условие (13). Следствие доказано.

Пример 5. Пусть характеристический вектор случайной величины определяется как в примере 4. Рассмотрим решение задачи (4), где $L(X) = -X_2 - 2X_3 - 4X_4$, мультимножество $\Gamma = \{G_2, G_3, G_4, G_5\}$, причем элементы мультимножества удовлетворяют условиям из примера 4. Характеристические векторы элементов мультимножества удовлетворяют условию (7) при $r = 3$, и поскольку $h_3(A) = D(A)$, т.е. $\lambda_3 = 2$, то целевая функция в задаче (6) имеет вид $\overline{L}_3(x) = x_2 + 4x_3 + 16x_4$, а мультимножество $Q_3 = \{12, 8, 4, 2\}$ (элементы мультимножества Q_3 удовлетворяют условию (12)). Минимум функции $\overline{L}_3(x)$ на множестве $E_4^3(Q_3)$ достигается в точке $x' = (8,4,2)$; следовательно, для некоторой минимали X' в задаче (4) выполняются условия $h_3(X_2') = 8$, $h_3(X_2') = 4$, $h_3(X_2') = 2$. Таким образом, $X' = (G_3, G_4, G_5)$.

ОБОСНОВАНИЕ СХЕМЫ РЕДУКЦИОННОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ БЕЗУСЛОВНЫХ ЗАДАЧ СТОХАСТИЧЕСКОЙ КОМБИНАТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ НА РАЗМЕЩЕНИЯХ

Пусть для элементов мультимножества Γ выполняется условие (7). Пусть также коэффициенты целевой функции задачи (6) удовлетворяют условию

$$c_{i_1}^{\lambda_r} \geq \ldots \geq c_{i_\gamma}^{\lambda_r} > 0 \ldots = c_{i_{\delta-1}}^{\lambda_r} > c_{i_\delta}^{\lambda_r} \ldots \geq c_{i_k}^{\lambda_r}. \tag{14}$$

Заметим, что если в условии (5) $\alpha = k$ или λ_r — нечетное положительное число, то $i_j = j\ \forall j \in J_k$. Если среди коэффициентов целевой функции есть отрицательные и при этом λ_r четно, то упорядочение коэффициентов целевых функций в задачах (4) и (6) может различаться.

Из условия (14) и теоремы 1 следует, что одна из минималей x' в задаче (6) удовлетворяет условиям

$$x'_{i_j} = G_j^r\ \ \forall j \in J_\gamma,\ \ x'_{i_t} = G_{\eta-k+t}^r\ \ \forall t \in J_k^\delta.$$

Тогда в соответствии с теоремой 2 для некоторой минимали X' в задаче (4) выполняются условия

$$h_r(X'_{i_j}) = G_j^r\ \ \forall j \in J_\gamma,\ \ h_r(X'_{i_t}) = G_{\eta-k+t}^r\ \ \forall t \in J_k^\delta.$$

Поскольку вследствие выполнения условий (7) и $X' \in E_\eta^k(\Gamma)$ имеют место равенства $H_{r-1}(X_1') = \ldots = H_{r-1}(X_k')$, то также

$$H_r(X'_{i_j}) = H_r(G_j)\ \ \forall j \in J_\gamma,\ \ H_r(X'_{i_t}) = H_r(G_{\eta-k+t})\ \ \forall t \in J_k^\delta. \tag{15}$$

Рассмотрим мультимножество $\Gamma^r = \{H_r(G_1), ..., H_r(G_\eta)\}$ с основой $S(\Gamma^r) = (\overline{H}_1, ..., \overline{H}_m)$ и первичной спецификацией $[\Gamma^r] = (n_1, \ldots, n_m)$. Элементы мультимножества Γ^r и его основы $S(\Gamma^r)$ будем считать расположенными в соответствии с порядком $\le_l$. Пусть также

$$\eta_1 = 1, \ \eta_{p+1} = \eta_p + n_p = 1 + \sum_{j=1}^{p} n_j \ \text{ для } \ p \in J_m. \tag{16}$$

Так как элементы мультимножества Γ^r расположены в соответствии с порядком $\le_l$, то

$$H_r(G_{\eta_p}) = \ldots = H_r(G_{\eta_p + n_p - 1}) = \overline{H}_p, \ \ p \in J_m. \tag{17}$$

Для всех $p \in J_m$ сформируем мультимножества

$$\Gamma_p^r = \{G_{\eta_p}, \ldots, G_{\eta_p + n_p - 1}\}. \tag{18}$$

Очевидно, что $|\Gamma_p^r| = n_p$. Пусть также σ — наименьший индекс, для которого выполняется условие $\eta_{\sigma+1} > i_\gamma$, а τ — наибольший индекс, для которого выполняется условие $\eta - k + i_\delta \ge \eta_\tau$. Обозначим $k_p = n_p$ для $p \in J_{\sigma-1} \cup J_k^{\tau+1}$; также если $\sigma \ne \tau$, то $k_\sigma = i_\gamma - \eta_\sigma + 1$, а $k_\tau = \eta_{\tau+1} - \eta + k - i_\delta$, при $\sigma = \tau$ положим $k_\sigma = k_\tau = i_\gamma - n_{\sigma+1} - \eta + k - i_\delta + 1$.

Так как точка X' удовлетворяет условиям (15), то для всех $p \in J_\sigma \cup J_k^\tau$ выполняются равенства

$$H_r(X'_{i_j}) = \overline{H}_p \ \ \forall j \in \{\eta_p, \ldots, \eta_p + k_p - 1\}. \tag{19}$$

Рассмотрим задачу минимизации функции $\displaystyle\sum_{j=\eta_p}^{\eta_p + k_p - 1} c_{i_j} \widetilde{X}_j$ на множестве $E_{n_i}^{k_i}(\Gamma_i^r)$. Пусть точка $(\widetilde{X}''_{\eta_p}, \ldots, \widetilde{X}''_{\eta_p + k_p - 1})$ является минималью, т.е. для любой точки $(\widetilde{X}_{\eta_p}, \ldots, \widetilde{X}_{\eta_p + k_p - 1}) \in E_{n_i}^{k_i}(\Gamma_i^r)$ выполняется неравенство $\displaystyle\sum_{j=\eta_p}^{\eta_p + k_p - 1} c_{i_j} \widetilde{X}''_j \preceq$ $\displaystyle\preceq \sum_{j=\eta_p}^{\eta_p + k_p - 1} c_{i_j} \widetilde{X}_j$, откуда $H\left(\displaystyle\sum_{j=\eta_p}^{\eta_p + k_p - 1} c_{i_j} \widetilde{X}''_j\right) \le_l H\left(\displaystyle\sum_{j=\eta_p}^{\eta_p + k_p - 1} c_{i_j} \widetilde{X}_j\right)$. В частности, $H\left(\displaystyle\sum_{j=\eta_p}^{\eta_p + k_p - 1} c_{i_j} \widetilde{X}''_j\right) \le_l H\left(\displaystyle\sum_{j=\eta_p}^{\eta_p + k_p - 1} c_{i_j} \widetilde{X}'_j\right)$, где $\widetilde{X}'_j = X'_{i_j}$ $\forall j \in J_{\eta_p + k_p - 1}^{\eta_p}$ (вследствие (19) $(\widetilde{X}'_{\eta_p}, \ldots, \widetilde{X}'_{\eta_p + k_p - 1}) \in E_{n_i}^{k_i}(\Gamma_i^r)$).

Тогда для точки $X'' = (X''_1, \ldots, X''_k)$, для которой $X''_{i_j} = \widetilde{X}''_j$ $\forall j \in J_{\eta_p + k_p - 1}^{\eta_p}$ для всех $p \in J_\sigma \cup J_k^\tau$, имеем

$$H(L(X'')) = H\left(\sum_{p=1}^{\sigma} \sum_{j=\eta_p}^{\eta_p + k_p - 1} c_{i_j} X''_{i_j} + \sum_{p=\tau}^{k} \sum_{j=\eta_p}^{\eta_p + k_p - 1} c_{i_j} X''_{i_j}\right) = \sum_{p=1}^{\sigma} H\left(\sum_{j=\eta_p}^{\eta_p + k_p - 1} c_{i_j} X''_{i_j}\right) +$$

$$+\sum_{p=\tau}^{k} H\left(\sum_{j=\eta_p}^{\eta_p+k_p-1} c_{i_j} X''_{i_j}\right)=\sum_{p=1}^{\sigma} H\left(\sum_{j=\eta_p}^{\eta_p+k_p-1} c_{i_j} \widetilde{X}''_j\right)+\sum_{p=\tau}^{k} H\left(\sum_{j=\eta_p}^{\eta_p+k_p-1} c_{i_j} \widetilde{X}''_j\right) \preceq_l$$

$$\preceq_l \sum_{p=1}^{\sigma} H\left(\sum_{j=\eta_p}^{\eta_p+k_p-1} c_{i_j} \widetilde{X}'_j\right)+\sum_{p=\tau}^{k} H\left(\sum_{j=\eta_p}^{\eta_p+k_p-1} c_{i_j} \widetilde{X}'_j\right)=$$

$$=\sum_{p=1}^{\sigma} H\left(\sum_{j=\eta_p}^{\eta_p+k_p-1} c_{i_j} X'_{i_j}\right)+\sum_{p=\tau}^{k} H\left(\sum_{j=\eta_p}^{\eta_p+k_p-1} c_{i_j} X'_{i_j}\right)=H(L(X'))\,.$$

Следовательно, $L(X'')\preceq L(X')$, а так как X' — минималь в задаче (4), то $L(X')\preceq L(X'')$, поэтому $L(X'')=L(X')$, т.е. точка X'' также является минималью в задаче (4). Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 3. Пусть характеристический вектор случайной величины удовлетворяет условию (1), причем выполняются соотношения (7), (14). Тогда существует минималь X^* в задаче (4), удовлетворяющая условиям $X^*_{i_j}=\widetilde{X}^*_j$ $\forall j\in J^{\eta_p}_{\eta_p+k_p-1}$, где для всех $p\in J_m$

$$(\widetilde{X}^*_{\eta_p},\ldots,\widetilde{X}^*_{\eta_p+k_p-1})=\underset{(\widetilde{X}_{\eta_p},\ldots,\widetilde{X}_{\eta_p+k_p-1})\in E^{k_p}_{n_p}(\Gamma_p)}{\arg\min}\sum_{j=\eta_p}^{\eta_p+k_p-1} c_j X_j\,. \tag{20}$$

Пример 6. Пусть характеристический вектор определяется так, как в примере 3, т.е. $H(A)=(M(A);D(A))$, мультимножество $\Gamma=\{G_1,G_2,G_3,G_4,G_5,G_6\}$; при этом $H(G_1)=(5;8)$, $H(G_2)=(6;4)$, $H(G_3)=H(G_4)=(6;7)$, $H(G_5)=(8;2)$, $H(G_6)=(8;4)$. Рассмотрим решение задачи (4), в которой $L(X)=4X_1+X_2-$ $-2X_3-3X_4-4X_5$. Условие (7) выполняется только при $r=1$. Так как $\lambda_1=1$, то $\overline{L}_1(x)=4x_1+x_2-2x_3-3x_4-4x_5$ и минималью функции $\overline{L}_1(x)$ на множестве $E^5_6(Q_1)$, где $Q_1=\{5;6;6;6;8;8\}$, является точка $x'=(5,6,6,8,8)$.

Рассмотрим мультимножество $\Gamma^1=\{5;6;6;6;8;8\}$. Здесь $m=3$, $n_1=1$, $n_2=3$, $n_3=2$; соответственно $\eta_1=1$, $\eta_2=2$, $\eta_3=5$, $\eta_4=7$, а также $\sigma=2$ ($\eta_3=5>i_\gamma=2$), $\tau=2$ ($\eta-k+i_\delta=4>\eta_2$) и поскольку $\sigma=\tau$, то $k_2=2$, $k_1=1$, $k_3=2$. Сформируем мультимножества (18): $\Gamma^1_1=\{G_1\}$, $\Gamma^1_2=\{G_2,G_3,G_4\}$, $\Gamma^1_3=\{G_5,G_6\}$. В соответствии с теоремой 3 существует минималь X^* в задаче (4), удовлетворяющая условиям $X^*_1=\arg\min\limits_{X_1\in E^1_1(\Gamma^1_1)} 4X_1$, $(X^*_2,X^*_3)=$ $=\arg\min\limits_{(X_2,X_3)\in E^2_3(\Gamma^1_2)}(X_2-2X_3)$, $(X^*_4,X^*_5)=\arg\min\limits_{(X_4,X_5)\in E^2_2(\Gamma^1_3)}(-3X_4-4X_5)$.

Теорема 4. Пусть выполняются следующие условия:

— характеристический вектор случайной величины удовлетворяет условию (1);

— элементы мультимножества удовлетворяют условию

$$H(G_1)\preceq_l\ldots\preceq_l H(G_\eta); \tag{21}$$

— все коэффициенты целевой функции $L(X)$ в задаче (4) положительны (т.е. в условии (5) $\alpha=k$).

Тогда точка $X,^*$ для которой выполняются условия

$$X_j^* = G_j \quad \forall j \in J_k, \tag{22}$$

является минималью в задаче (4).

Доказательство. Пусть $r \in J_s$ такой индекс, что выполняются соотношения (7). Так как выполняются условия (7) и (21), то также выполняются соотношения (9). Тогда в соответствии со следствием 1 существует минималь X' в задаче (4), которая удовлетворяет условию (10), и с учетом (7) выполняется $H_r(X'_j) = H_r(G_j)\ \forall j \in J_k$. Сформируем для всех $p \in J_m$ мультимножества (18), где η_p определяются в соответствии с (16). Пусть σ — наименьший индекс, для которого выполняется неравенство $\eta_{\sigma+1} > k$, $k_p = n_p$ для $p \in J_{\sigma-1}$, $k_\sigma = k - \eta_\sigma$. Если согласно теореме 3 $\forall p \in J_\sigma$ точка $(X''_{\eta_p}, \ldots, X''_{\eta_p+k_p-1})$ удовлетворяет (20), то точка $(X''_{\eta_1}, \ldots, X''_{\eta_1+k_1-1}, X''_{\eta_2}, \ldots, X''_{\eta_\sigma+k_\sigma-1})$ является минималью в задаче (4).

Рассмотрим вопрос нахождения точки (20). Так как выполняются условия (17) и (21), то $h_{r+1}(G_{\eta_p}) \le \ldots \le h_{r+1}(G_{\eta_p+n_p-1})$. Следовательно, $h_{r+1}(X''_j) = h_{r+1}(G_j)\ \forall j \in J^{\eta_p}_{\eta_p+k_p-1}$. Так как последние равенства выполняются при всех $p \in J_m$, то $h_{r+1}(X''_j) = h_{r+1}(G_j)\ \ \forall j \in J_k$. Тогда также $H_{r+1}(X''_j) = H_{r+1}(G_j)$ $\forall j \in J_k$.

Продолжив решение задач на множествах $E^{k_i}_{n_i}(\Gamma^r_i)$, увеличим значение r на единицу и сформируем мультимножества вида (18). Проведя для таких мультимножеств аналогичные рассуждения, получим, что для некоторой минимали в задаче (4) выполняются условия $H_{r+2}(X'''_j) = H_{r+2}(G_j)\ \forall j \in J_k$. Продолжая рассуждения для следующих значений $r+2, \ldots, s-1$, получаем, что точка $\widetilde{X}$, для которой выполняются условия $H(\widetilde{X}_j) = H(G_j)\ \forall j \in J_k$, является минималью в задаче (4). При этом для всех $r \in J_s$

$$h_r(L(\widetilde{X})) =$$

$$= h_r\Big(\sum_{j=1}^{k} c_j \widetilde{X}_j\Big) = \sum_{j=1}^{k} c_j^{\lambda_r} h_r(\widetilde{X}_j) = \sum_{j=1}^{k} c_j^{\lambda_r} h_r(G_j) = \sum_{j=1}^{k} c_j^{\lambda_r} h_r(X_j^*) = h_r(L(X^*)),$$

где X^* удовлетворяет (22). Это означает, что также $H(L(\widetilde{X})) = H(L(X^*))$, откуда $L(X^*) \preceq L(\widetilde{X})$, а так как $\widetilde{X}$ — минималь в задаче (4), то X^* — также минималь в задаче (4). Теорема доказана.

Рассмотрим характеристический вектор $H(A) = (h_1(A), \ldots, h_s(A))$, а также вектор $H'(A) = (h'_1(A), \ldots, h'_s(A))$, компоненты которого определяются следующим образом: $h'_r(A) = (-1)^{\lambda_r+1} h_r(A)\ \forall r \in J_s$, где λ_r — показатели степени в (1).

Теорема 5. Пусть выполняются следующие условия:

— характеристический вектор случайной величины удовлетворяет условию (1);

— элементы мультимножества удовлетворяют условию

$$H'(G_1) \le_l \ldots \le_l H'(G_\eta); \tag{23}$$

— все коэффициенты целевой функции $L(X)$ в задаче (4) отрицательны (т.е. в условии (5) $\beta = 1$).

Тогда точка X^*, для которой выполняются условия

$$X_j^* = G_{\eta-k+j} \quad \forall j \in J_k, \tag{24}$$

является минималью в задаче (4).

Доказательство. Пусть $r \in J_s$ такой, что выполняются соотношения (7). Тогда также $H'_{r-1}(G_i) = H'_{r-1}(G_j)$ $\forall i, j \in J_\eta$, и так как выполняются условия (23), то имеют место соотношения $h'_r(G_1) \le \ldots \le h'_r(G_\eta)$ т.е. $(-1)^{\lambda_r+1} h_r(G_1) \le \ldots$ $\ldots \le (-1)^{\lambda_r+1} h_r(G_\eta)$. Если при этом λ_r — нечетно, то $h_r(G_1) \le \ldots \le h_r(G_\eta)$ и в соответствии со следствием 2 существует минималь X' в задаче (4), которая удовлетворяет (13). Если λ_r — четно, то $-h_r(G_1) \le \ldots \le -h_r(G_\eta)$, т.е. выполняются неравенства (12) и согласно следствию 3 также для некоторой минимали в задаче (4) выполняется (13). Таким образом, при выполнении условий (7) и (23) существует минималь X' в задаче (4), которая удовлетворяет (13). Проведя рассуждения, аналогичные доказательству теоремы 4, получаем, что точка X^*, удовлетворяющая (24), является минималью в задаче (4). Теорема доказана.

Основываясь на теоремах 3–5, предложим следующую схему решения линейной безусловной задачи стохастической оптимизации (4):

1) пусть r — наибольшее число, при котором выполняются условия (7);

2) решаем задачу (6) и формируем соответствующие мультимножества (18);

3) если для некоторого мультимножества соответствующие коэффициенты целевой функции имеют одинаковый знак, то решение может быть записано, исходя из теоремы 4 или 5;

4) если соответствующие коэффициенты целевой функции имеют разные знаки, то увеличиваем r на единицу и решаем задачу вида (6) для этого мультимножества.

Процесс завершается, если $r = s$ или для всех мультимножеств соответствующие коэффициенты целевой функции будут иметь одинаковый знак.

Пример 7. Завершим решение задачи из примера 6. Очевидно, что $X_1^* = \arg \min\limits_{X_1 \in E_1^1(\Gamma_1^1)} 4X_1 = G_1$. Также

$$(X_4^*, X_5^*) = \arg \min_{(X_4, X_5) \in E_2^2(\Gamma_3^1)} (-3X_4 - 4X_5) = (G_6, G_5),$$

поскольку $0 > c_4 > c_5$, $H'(G_6) = (-8; -4) \le_l H'(G_5) = (-8; -2)$. Для нахождения минимали функции $L'(X_2, X_3) = X_2 - 2X_3$ на множестве $E_3^2(\Gamma_2^1)$ решим задачу вида (6): $Q_2 = \{4, 7, 7\}$, а так как $\lambda_2 = 2$, то $\overline{L}_2 = 4x_3 + x_2$. Решение этой задачи дает точка $(x_2'', x_3'') = (7, 4)$, поэтому $(X_2^*, X_3^*) = (G_3, G_2)$ или $(X_2^*, X_3^*) = (G_4, G_2)$. В обоих случаях значение целевой функции будет одинаковым.

Таким образом, одной из минималей в исходной задаче является точка $X^* =$ $= (G_1, G_3, G_2, G_6, G_5)$, при этом $L(X^*) = 4G_1 + G_3 - 2G_2 - 3G_6 - 4G_5$, $H(L(X^*)) =$ $= (-472; 219)$. Отметим, что $H(L(X^*)) = H(L(X'))$, где $X' = (G_1, G_4, G_2, G_6, G_5)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье исследуются свойства линейной безусловной задачи комбинаторной стохастической оптимизации на размещениях, постановка которой осуществлена с использованием отношения предпочтения на множестве случайных величин. Рассматриваемое отношение предпочтения основывается на лексикографическом упорядочении векторов, компонентами которых являются числовые характеристики случайных величин с определенными свойствами. Установлена взаимосвязь некоторых свойств решения линейной безусловной задачи комбинаторной оптимизации на размещениях с решением специально построенных детерминированных задач на размещениях. На основе полученных результатов предложен редукционный метод решения стохастической задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сергиенко И.В., Каспшицкая М.Ф. Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации. — К. : Наук. думка, 1981. — 288 с.
2. Сергиенко И.В., Гуляницкий Л.Ф., Сиренко С.И. Классификация прикладных методов комбинаторной оптимизации // Кибернетика и системный анализ. — 2009. — № 5. — С. 71–83.
3. Донець Г.П., Колєчкіна Л.М. Екстремальні задачі на комбінаторних конфігураціях. — Полтава: РВВ ПУЕТ, 2011. — 309 с. — http://dspace.puet.edu.ua/handle/123456789/560.
4. Stoyan Y.G., Zlotnik M.V., Chugay A.M. Solving an optimization packing problem of circles and non-convex polygons with rotations into a multiply connected region // Journal of the Operational Research Society. — 2012. — **63.** — P. 379–391.
5. Емец О.А., Барболина Т.Н. Комбинаторная оптимизация на размещениях. — К.: Наук. думка, 2008. — 159 с. — http://dspace.puet.edu.ua/handle/123456789/473.
6. Стоян Ю.Г., Ємець О.О. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. — К.: Інститут системних досліджень освіти, 1993. — 188 с. — http://dspace.puet.edu.ua/handle/123456789/487.
7. Емец О.А., Барболина Т.Н. Об оптимизационных задачах с вероятностной неопределенностью // Доповіді НАН України. — 2014. — № 11. — С. 40–45.
8. Емец О.А., Барболина Т.Н. Комбинаторная оптимизационная модель упаковки прямоугольников со стохастическими параметрами // Кибернетика и системный анализ. — 2015. — № 4. — С. 99–111.
9. Ємець О.О., Барболіна Т.М. Побудова і дослідження математичної моделі задачі директора зі стохастичними параметрами // Вісник Черкаського університету. Серія Прикладна математика. Інформатика. — 2014. — № 18 (311). — С. 3–11.
10. Барболіна Т.М. Властивості лінійних безумовних задач оптимізації на розміщеннях // Зб. наукових праць викладачів, аспірантів, магістрантів і студентів фізико-математичного факультету. — Полтава: Астрая, 2015. — С. 12–14.
11. Сергиенко И.В., Гупал А.М., Островский А.В. Предсказание структуры генов с использованием смесей вероятностных распределений // Кибернетика и системный анализ. — 2015. — № 3. — С. 44–53.
12. Ермольев Ю.М., Норкин В.И. Стохастический обобщенный градиентный метод для решения невыпуклых негладких задач стохастической оптимизации // Кибернетика и системный анализ. — 1998. — № 2. — С. 50–71.
13. Ермольева Т.Ю., Ермольев Ю.М., Хавлик П., Монье А., Леклер Д., Краксенер Ф., Хабаров Н., Оберштайнер М. Системный анализ робастных стратегических решений для планирования безопасного снабжения продовольствием, энергией, водой на основе стохастической модели ГЛОБИОМ // Кибернетика и системный анализ. — 2015. — № 1. — С. 144–154.
14. Наумов А.В., Иванов С.В. Исследование задачи стохастического линейного программирования с квантильным критерием // Автоматика и телемеханика. — 2011. — № 2. — С. 142–158.
15. Ruszczynski A., Shapiro A. (Eds.) Stochastic programming // Handbooks in OR & MS. — Amsterdam: Elsevier, 2003. — **10.** — 688 p.

16. Новоселов А.А. Математическое моделирование финансовых рисков. Теория измерения. — Новосибирск: Наука, 2001. — 102 с.

17. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей: учебник. — Изд. 8-е. — М.: Едиториал УРСС, 2005. — 448 с.

18. Мельников О.В., Ремесленников В.Н., Романьков В.А. и др. Общая алгебра. Т.1. Под ред. Л.А. Скорнякова. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. — 592 с.

Надійшла до редакції 01.07.2015

О.О. Ємець, Т.М. Барболіна

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЛІНІЙНИХ БЕЗУМОВНИХ ЗАДАЧ КОМБІНАТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ НА РОЗМІЩЕННЯХ ЗІ СТОХАСТИЧНОЮ НЕВИЗНАЧЕНІСТЮ

Анотація. Розглядається розв'язування лінійної безумовної задачі комбінаторної оптимізації на розміщеннях зі стохастичною невизначеністю. Мінімум при цьому визначається на основі послідовного порівняння числових характеристик випадкових величин. Для розглянутої стохастичної задачі встановлено властивості розв'язку, які використовують властивості розв'язку спеціально сформульованих детермінованих задач. Запропоновано також редукційний метод розв'язування лінійної безумовної задачі комбінаторної стохастичної оптимізації на розміщеннях, яка ґрунтується на одержаних властивостях розв'язку.

Ключові слова: евклідова задача комбінаторної оптимізації, задача оптимізації на розміщеннях, стохастична невизначеність, стохастична оптимізація, стохастична комбінаторна оптимізація.

O.O. Iemets, T.M. Barbolina

SOLVING LINEAR UNCONDITIONAL PROBLEMS OF COMBINATORIAL OPTIMIZATION ON ARRANGEMENTS UNDER STOCHASTIC UNCERTAINTY

Abstract. Linear unconditional problem of combinatorial optimization on arrangements under stochastic uncertainty is solved. The minimum is defined as the result of consecutive comparison of numerical characteristic of random variables. The properties of the solution of the considered optimization problem are obtained. These properties use the properties of special constructed deterministic problems. We also propose the reducing method of solution of linear unconditional problem of combinatorial stochastic optimization, which is based on obtained solution's properties.

Keywords: Euclidian combinatorial optimization problem, optimization on arrangements, stochastic uncertainty, stochastic optimization, stochastic combinatorial optimization.

Емец Олег Алексеевич,
доктор физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой Полтавского университета экономики и торговли, e-mail: yemetsli@ukr.net.

Барболина Татьяна Николаевна,
кандидат физ.-мат. наук, доцент, заведующая кафедрой Полтавского национального педагогического университета им. В.Г. Короленко, e-mail: tm-b@ukr.net.