УДК 519.6

В.Г. ПРИКАЗЧИКОВ, Н.В. МАЙКО

ПРЕДЕЛЬНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ТОЧНОСТИ ДИСКРЕТНОГО АНАЛОГА СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

Аннотация. Рассмотрена задача на собственные значения для оператора Лапласа с краевым условием Дирихле на границе двумерной области произвольной формы. С помощью конечно-разностной аппроксимации исходной задачи получена предельная оценка точности простого собственного числа. На основании асимптотической формулы доказана оценка снизу для простых собственных чисел.

Ключевые слова: оператор Лапласа, спектральная задача, разностная схема, асимптотическая формула, оценка снизу.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $C^{(2,\mu)}(\overline{\Omega})$ — класс функций, у которых производные второго порядка удовлетворяют условию Гёльдера с показателем $\mu > 0$ в ограниченной выпуклой двумерной области Ω; $A^{(2,\mu)}$ — класс ограниченных выпуклых двумерных областей, для которых функция, задающая уравнение кривой $\Gamma = \partial\Omega$ в местных координатах, принадлежит классу $C^{(2,\mu)}$.

Рассмотрим спектральную задачу [1]

$$\Delta u + \lambda u = 0, \ (t_1, t_2) \in \Omega \in A^{(2,\mu)}, \tag{1}$$

$$u = 0, \ (t_1, t_2) \in \Gamma = \partial\Omega . \tag{2}$$

Из [2] следует, что собственные функции (с.ф.) задачи (1), (2) принадлежат $C^{(2,\mu)}(\overline{\Omega})$. Из [3, с. 77] следует, что с.ф. можно продолжить вне $\overline{\Omega}$ с сохранением гладкости.

В настоящей статье получена оценка снизу простых собственных чисел (с.ч.) задачи (1), (2). В [1, с. 374] приведено другое доказательство оценок с.ч. при условии, что с.ф. принадлежат классу $C^{(4)}(\overline{\Omega})$.

КОНЕЧНО-РАЗНОСТНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ

Введем квадратную сетку с шагом h. Обозначим ω узлы (x_1, x_2) сетки, лежащие внутри Ω; ω_0 — узлы, для которых соседние узлы по пятиточечному шаблону лежат внутри Ω; γ — узлы, лежащие на Γ; γ_0 — узлы, граничные для ω_0.

Рассмотрим разностный аналог задачи (1), (2):

$$y_{\bar{t}_1 \hat{t}_1} + y_{\bar{t}_2 \hat{t}_2} + \lambda^h y = 0, \ (x_1, x_2) \in \omega, \tag{3}$$

$$y = 0, \ (x_1, x_2) \in \gamma. \tag{4}$$

Ввиду наличия узлов, примыкающих к границе Γ, в (3) используется пятиточечный оператор на неравномерной сетке. Здесь

$$y_{\bar t_1 \hat t_1} = y_{\bar t_1 \hat t_1}(x_1, x_2) = \left[\frac{y(x_1 + h_1^+, x_2) - y(x_1, x_2)}{h_1^+} - \frac{y(x_1, x_2) - y(x_1 - h_1^-, x_2)}{h_1^-}\right]\frac{1}{\hbar_1},$$

$$y_{\bar t_2 \hat t_2} = y_{\bar t_2 \hat t_2}(x_1, x_2) = \left[\frac{y(x_1, x_2 + h_2^+) - y(x_1, x_2)}{h_2^+} - \frac{y(x_1, x_2) - y(x_1, x_2 - h_2^-)}{h_2^-}\right]\frac{1}{\hbar_2},$$

где $\hbar_i = \dfrac{h_i^+ + h_i^-}{2}$, $i = 1, 2$. В узлах сетки ω_0 пятиточечный разностный оператор Лапласа $\Delta^h y = y_{\bar t_1 \hat t_1} + y_{\bar t_2 \hat t_2}$ записывается на равномерной сетке.

Рассмотрим формулы Грина и укажем их разностные аналоги:

$$\iint_\Omega u\,\Delta v\, dx_1 dx_2 + \iint_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_2}\right) dx_1 dx_2 = \oint_\Gamma u \frac{\partial v}{\partial n} ds \equiv \oint_\Gamma u \left(\frac{\partial v}{\partial x_1} dx_2 - \frac{\partial v}{\partial x_2} dx_1\right),$$

$$(u, \Delta^h v) + (u_{\bar t_1}, v_{\bar t_1}]_1 + (u_{\bar t_2}, v_{\bar t_2}]_2 =$$

$$= \sum_{\gamma_1^-} u v_{t_1} \hbar_2 - \sum_{\gamma_1^+} u v_{\bar t_1} \hbar_2 + \sum_{\gamma_2^+} u v_{\bar t_2} \hbar_1 - \sum_{\gamma_2^-} u v_{t_2} \hbar_1, \tag{5}$$

$$\iint_\Omega u \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} dx_1 dx_2 = \iint_\Omega v \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} dx_1 dx_2 + \oint_\Gamma \left(u \frac{\partial v}{\partial x_1} - v \frac{\partial u}{\partial x_1}\right) dx_2, \tag{6}$$

$$(u, v_{\bar t_1 \hat t_1}) = (v, u_{\bar t_1 \hat t_1}) + \sum_{\gamma_1^-} (v\, u_{t_1} - u\, v_{t_1}) \hbar_2 + \sum_{\gamma_1^+} (u\, v_{\bar t_1} - v\, u_{\bar t_1}) \hbar_2, \tag{7}$$

$$\iint_\Omega u \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} dx_1 dx_2 = \iint_\Omega v \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} dx_1 dx_2 + \oint_\Gamma \left(v \frac{\partial u}{\partial x_2} - u \frac{\partial v}{\partial x_2}\right) dx_1, \tag{8}$$

$$(u, v_{\bar t_2 \hat t_2}) = (v, u_{\bar t_2 \hat t_2}) + \sum_{\gamma_2^-} (v\, u_{t_2} - u\, v_{t_2}) \hbar_1 + \sum_{\gamma_2^+} (u\, v_{\bar t_2} - v\, u_{\bar t_2}) \hbar_1. \tag{9}$$

Сумма формул (6) и (8) дает соотношение

$$\iint_\Omega u\,\Delta v\, dx_1 dx_2 = \iint_\Omega v\,\Delta u\, dx_1 dx_2 + -\oint_\Gamma v \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} dx_2 - \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_1\right) -$$

$$-\oint_\Gamma v \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} dx_2 - \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_1\right) \equiv \iint_\Omega v\,\Delta u\, dx_1 dx_2 + \oint_\Gamma \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}\right) ds,$$

разностным аналогом которого служит сумма формул (7) и (9):

$$(u, v_{\bar t_1 \hat t_1} + v_{\bar t_2 \hat t_2}) = (v, u_{\bar t_1 \hat t_1} + u_{\bar t_2 \hat t_2}) + \sum_{\gamma_1^-} (v\, u_{t_1} - u\, v_{t_1}) \hbar_2 + \sum_{\gamma_1^+} (u\, v_{\bar t_1} - v\, u_{\bar t_1}) \hbar_2 +$$

$$+ \sum_{\gamma_2^-} (v\, u_{t_2} - u\, v_{t_2}) \hbar_1 + \sum_{\gamma_2^+} (u\, v_{\bar t_2} - v\, u_{\bar t_2}) \hbar_1 . \tag{10}$$

Здесь

$$(v, w) = \sum_{\omega} v w \hbar_1 \hbar_2, \ (v, w]_1 = \sum_{\omega \cup \gamma_1^+} v w h_1^- \hbar_2, \ (v, w]_2 = \sum_{\omega \cup \gamma_2^+} v w \hbar_1 h_2^-,$$

γ_1^+ и γ_1^- — множества соответственно правых и левых граничных узлов по направлению t_1; γ_2^+ и γ_2^- — множества соответственно верхних и нижних граничных узлов по направлению t_2.

Задача (1), (2) эквивалентна экстремальной задаче

$$\lambda_s = \inf_u \iint_\Omega \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 \right) dx_1 dx_2 , \; s = 1, 2, \dots , \tag{11}$$

при условиях

$$\iint_\Omega u^2 dx_1 dx_2 = 1, \quad \iint_\Omega u u^{(k)} dx_1 dx_2 = 0, \; k = 1, 2, \dots, s-1 . \tag{12}$$

Разностный аналог задачи (11), (12) зададим в виде

$$\lambda_s^h = \inf_v \{(1, v_{\bar{t}_1}^2]_1 + (1, v_{\bar{t}_2}^2]_2 \} \tag{13}$$

при условиях

$$(1, v^2) = 1 , \; (v, y^{(k)}) = 0 , \; k = 1, 2, \dots, s-1 . \tag{14}$$

Формула (5) согласует задачу (3), (4) с задачей (13), (14).

Для равномерной относительно шага h ограниченности с.ф. в сеточных нормах L_2 , W_2^1 и W_2^2 используем соотношения

$$(y^{(k)}, y^{(k)}) = 1, \quad (1, (y_{\bar{t}_1}^{(k)})^2]_1 + (1, (y_{\bar{t}_2}^{(k)})^2]_2 = \lambda_k^h ,$$

$$((y_{\bar{t}_1 \hat{t}_1}^{(k)} + y_{\bar{t}_2 \hat{t}_2}^{(k)})^2 , 1) = (\lambda_k^h)^2 ,$$

$$\sum_{\gamma_1^-} y_{t_1}^{(k)} \hbar_2 - \sum_{\gamma_1^+} y_{\bar{t}_1}^{(k)} \hbar_2 + \sum_{\gamma_2^-} y_{t_2}^{(k)} \hbar_1 - \sum_{\gamma_2^+} y_{\bar{t}_2}^{(k)} \hbar_1 = \lambda_k^h (y^{(k)}, 1) \tag{15}$$

и двумерную оценку с.ч. при $h < \min\left\{ \dfrac{l_1}{3k_1}, \dfrac{l_2}{3k_2} \right\}$

$$9\left[\left(\frac{k_1}{L_1} \right) + \left(\frac{k_2}{L_2} \right) \right]^2 \le \lambda_k^h \equiv \lambda_{k_1 k_2}^h \le \pi^2 \left[\left(\frac{k_1}{l_1} \right) + \left(\frac{k_2}{l_2} \right) \right]^2 ,$$

где l_1, l_2, L_1, L_2 — длины сторон соответственно вписанного в Ω и описанного около Ω прямоугольников. Формула (15) следует из (3) с использованием (10) при $v = y^{(k)}$ и $u \equiv 1$.

ВЫВОД АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ФОРМУЛЫ

Обозначим $z = y - u$ погрешность с.ф. номера k в узлах сетки $\overline{\omega} = \omega \cup \gamma$. Для z получим задачу

$$z_{\bar{t}_1 \hat{t}_1} + z_{\bar{t}_2 \hat{t}_2} + \lambda^h z = -u_{\bar{t}_1 \hat{t}_1} - u_{\bar{t}_2 \hat{t}_2} - \lambda^h u, \; (x_1, x_2) \in \omega , \tag{16}$$

$$z = 0, \; (x_1, x_2) \in \gamma . \tag{17}$$

Обозначим Ψ правую часть в (16). Введем операторы усреднения [4, с. 56]

$$(T_1 u)(x_1, x_2) =$$

$$= \frac{1}{\hbar_1}\left[\int\limits_{x_1-h_1^-}^{x_1}\left(1+\frac{t_1-x_1}{h_1^-}\right)u(t_1, x_2)dt_1 + \int\limits_{x_1}^{x_1+h_1^+}\left(1-\frac{t_1-x_1}{h_1^+}\right)u(t_1, x_2)dt_1\right], \quad (18)$$

$$(T_2 u)(x_1, x_2) =$$

$$= \frac{1}{\hbar_2}\left[\int\limits_{x_2-h_2^-}^{x_2}\left(1+\frac{t_2-x_2}{h_2^-}\right)u(x_1, t_2)dt_2 + \int\limits_{x_2}^{x_2+h_2^+}\left(1-\frac{t_2-x_2}{h_2^+}\right)u(x_1, t_2)dt_2\right]. \quad (19)$$

Сглаживание уравнения (1) дает соотношение

$$T_1 T_2 (\Delta u + \lambda u) = (T_2 u)_{\bar{t}_1 \hat{t}_1} + (T_1 u)_{\bar{t}_2 \hat{t}_2} + \lambda\, T_1 T_2 u = 0\,. \quad (20)$$

Подставив (20) в правую часть равенства (16), получим дивергентную запись погрешности аппроксимации Ψ:

$$\Psi = (T_2 u - u)_{\bar{t}_1 \hat{t}_1} + (T_1 u - u)_{\bar{t}_2 \hat{t}_2} + \lambda\,(T_1 T_2 u - u) + (\lambda - \lambda^h)\, u\,. \quad (21)$$

Заметим, что при сглаживании в окрестности узла $(x_1, x_2) \in \omega_0$ формулы (18) и (19) упрощаются:

$$(T_1 u)(x_1, x_2) = \frac{1}{h}\int\limits_{x_1-h}^{x_1+h}\left(1-\frac{|t_1-x_1|}{h}\right)u(t_1, x_2)\, dt_1,$$

$$(T_2 u)(x_1, x_2) = \frac{1}{h}\int\limits_{x_2-h}^{x_2+h}\left(1-\frac{|t_2-x_2|}{h}\right)u(x_1, t_2)\, dt_2.$$

Задача (16), (17) с правой частью из (21) с использованием формул (7), (9) и (10) приводит к формуле

$$(\lambda - \lambda^h)(u,\, y) = \lambda(u - T_1 T_2 u,\, y) + (u - T_2 u,\, y_{\bar{t}_1 \hat{t}_1}) + (u - T_1 u,\, y_{\bar{t}_1 \hat{t}_1}) +$$
$$+\sum_{\gamma_1^+}(T_2 u - u)\, y_{\bar{t}_1}\hbar_2 - \sum_{\gamma_1^-}(T_2 u - u)\, y_{t_1}\hbar_2 + \sum_{\gamma_2^+}(T_1 u - u)\, y_{\bar{t}_2}\hbar_1 - \sum_{\gamma_2^-}(T_1 u - u)\, y_{t_2}\hbar_1. \quad (22)$$

Заметим, что ввиду гладкого продолжения с.ф. выражения $T_1 u$ и $T_2 u$ в (22) определены в одномерных суммах. Интегрируя по частям и пользуясь теоремой о среднем значении для интегралов, получаем

$$T_1 u = u(x_1, x_2) + \frac{h_1^+ - h_1^-}{3}\frac{\partial u}{\partial t_1}(x_1, x_2) + \frac{(h_1^+)^3 + (h_1^-)^3}{24\hbar_1}\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2}(\xi_1, x_2)\,, \quad (23)$$

$$T_2 u = u(x_1, x_2) + \frac{h_2^+ - h_2^-}{3}\frac{\partial u}{\partial t_2}(x_1, x_2) + \frac{(h_2^+)^3 + (h_2^-)^3}{24\hbar_2}\frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2}(x_1, \xi_2)\,, \quad (24)$$

где $\xi_1 \in [x_1 - h_1^-, x_1 - h_1^+]$, $\xi_2 \in [x_2 - h_2^-, x_2 - h_2^+]$. Если узел (x_1, x_2) принадлежит ω_0, то

$$T_1 u = u(x_1, x_2) + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2} (\xi_1, x_2),$$

$$T_2 u = u(x_1, x_2) + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2} (x_1, \xi_2).$$

Суперпозиция формул (23), (24) дает

$$T_1 T_2 u = u(x_1, x_2) + \frac{h_1^+ - h_1^-}{3} \frac{\partial u}{\partial t_1} (x_1, x_2) + \frac{h_2^+ - h_2^-}{3} \frac{\partial u}{\partial t_2} (x_1, x_2) +$$

$$+ \frac{(h_1^+ - h_1^-)(h_2^+ - h_2^-)}{9} \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} (x_1, x_2) +$$

$$+ \frac{(h_1^+)^3 + (h_1^-)^3}{24 \hbar_1} \frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2} (\xi_1, x_2) + \frac{(h_2^+)^3 + (h_2^-)^3}{24 \hbar_2} \frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2} (x_1, \xi_2).$$

Если узел $(x_1, x_2) \in \omega_0$, то

$$T_1 T_2 u = u(x_1, x_2) + \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2} (\xi_1, x_2) + \frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2} (x_1, \xi_2) \right).$$

Переход к пределу при $h \to 0$ в слагаемых

$$-\frac{h_1^+ - h_1^-}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial t_1}, y_{\bar{t}_2 \hat{t}_2} \right), \quad -\frac{h_2^+ - h_2^-}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial t_2}, y_{\bar{t}_1 \hat{t}_1} \right)$$

в формуле (22) дает соответственно

$$-\lim_{h \to 0} \frac{h_1^+ - h_1^-}{3} \iint_\Omega \frac{\partial u}{\partial t_1} \frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2} dt_1 dt_2, \quad -\lim_{h \to 0} \frac{h_2^+ - h_2^-}{3} \iint_\Omega \frac{\partial u}{\partial t_2} \frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2} dt_1 dt_2.$$

Преобразовывая двойные интегралы по формуле Грина, получаем равенства

$$-\iint_\Omega \frac{\partial u}{\partial t_1} \frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2} dt_1 dt_2 = \frac{1}{2} \iint_\Omega \frac{\partial}{\partial t_1} \left(\frac{\partial u}{\partial t_2} \right)^2 dt_1 dt_2 + \oint_\Gamma \frac{\partial u}{\partial t_1} \frac{\partial u}{\partial t_2} dt_1,$$

$$-\iint_\Omega \frac{\partial u}{\partial t_2} \frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2} dt_1 dt_2 = \frac{1}{2} \iint_\Omega \frac{\partial}{\partial t_2} \left(\frac{\partial u}{\partial t_1} \right)^2 dt_1 dt_2 - \oint_\Gamma \frac{\partial u}{\partial t_1} \frac{\partial u}{\partial t_2} dt_2.$$

Здесь и далее в криволинейных интегралах принято положительное (против часовой стрелки) направление обхода граничной кривой Γ. В то же время при переходе к пределу при $h \to 0$ в выражениях

$$\frac{h_1^+ - h_1^-}{3} \left(\sum_{\gamma_2^+} \frac{\partial u}{\partial t_1} y_{\bar{t}_2} \hbar_1 - \sum_{\gamma_2^-} \frac{\partial u}{\partial t_1} y_{t_2} \hbar_1 \right), \quad \frac{h_2^+ - h_2^-}{3} \left(\sum_{\gamma_1^+} \frac{\partial u}{\partial t_2} y_{\bar{t}_1} \hbar_2 - \sum_{\gamma_1^-} \frac{\partial u}{\partial t_2} y_{t_1} \hbar_2 \right)$$

получим соответственно

$$-\lim_{h\to 0}\frac{h_1^+-h_1^-}{3}\oint_\Gamma \frac{\partial u}{\partial t_1}\frac{\partial u}{\partial t_2}dt_1,\quad \lim_{h\to 0}\frac{h_2^+-h_2^-}{3}\oint_\Gamma \frac{\partial u}{\partial t_1}\frac{\partial u}{\partial t_2}dt_2.$$

Следовательно, предел при $h\to 0$ равенства (22) не содержит указанных интегралов по границе Γ от произведения первых производных.

С учетом (15) из сходимость с.ч. и с.ф. (см. [5, 6, 7]) получаем

$$\lim_{h\to 0}(u,\ y)=1,$$

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{u-T_2u}{h^2},\ y_{\bar t_1\hat t_1}\right)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{u-T_2u}{h^2},\ y_{\bar t_1 t_1}\right)=$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{u-T_1u}{h^2},\ y_{\bar t_2\hat t_2}\right)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{u-T_1u}{h^2},\ y_{\bar t_2 t_2}\right)=-\frac{1}{12}\iint_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2}dt_1dt_2,$$

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{u-T_1T_2u}{h^2},\ y\right)=-\frac{1}{12}\iint_\Omega u\,\Delta u dt_1dt_2,$$

$$\lim_{h\to 0}\left(\sum_{\gamma_2^+}\frac{T_1u-u}{h^2}y_{\bar t_2}\hbar_1-\sum_{\gamma_2^-}\frac{T_1u-u}{h^2}y_{t_2}\hbar_1\right)=-\frac{1}{12}\oint_\Gamma\frac{\partial u}{\partial t_2}\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2}dt_1,$$

$$\lim_{h\to 0}\left(\sum_{\gamma_1^+}\frac{T_2u-u}{h^2}y_{\bar t_1}\hbar_2-\sum_{\gamma_1^-}\frac{T_2u-u}{h^2}y_{t_1}\hbar_2\right)=\frac{1}{12}\oint_\Gamma\frac{\partial u}{\partial t_1}\frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2}dt_2.$$

Подставляя найденные предельные значения в (22), имеем

$$\lim_{h\to 0}\frac{\lambda-\lambda^h}{h^2}=\frac{1}{12}\iint_\Omega\left((\Delta u)^2-2\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2}\right)dt_1dt_2+\frac{1}{12}\oint_\Gamma\frac{\partial u}{\partial t_2}\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2}dt_1+\frac{\partial u}{\partial t_1}\frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2}dt_2.$$

В результате перехода в точках границы к новой системе координат $\{\vec n;\vec s\}$, где $\vec n$ — единичный вектор внешней нормали, а $\vec s$ — единичный вектор касательной, как и в [1, с. 378], получим

$$\oint_\Gamma\frac{\partial u}{\partial t_2}\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2}dt_1+\frac{\partial u}{\partial t_1}\frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2}dt_2=\oint_\Gamma u_n^2\sin^2 2\tau\,d\tau.$$

Здесь $u_n=\dfrac{\partial u}{\partial n}$, τ — угол между осью t_1 и положительным направлением касательной $\vec s$. В результате получаем асимптотическую формулу

$$\lim_{h\to 0}\frac{\lambda-\lambda^h}{h^2}=\frac{1}{12}\iint_\Omega\left((\Delta u)^2-2\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2}\right)dt_1dt_2+\frac{1}{12}\oint_\Gamma u_n^2\sin^2 2\tau\,d\tau. \qquad (25)$$

Из формулы (25) при достаточно малом h следует оценка $\lambda_k>\lambda_k^h$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вазов В., Форсайт Дж. Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных. — М.: ИЛ, 1963 — 488 с.
2. Ильин В.А., Шишмарёв И.А. Равномерные в замкнутой области оценки для собственных функций эллиптического оператора и их производных // Известия АН СССР. Серия математика. — 1960. — **24.** — С. 883–896.
3. Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа. — М.: ИЛ, 1957. — 256 с.
4. Самарский А.А., Лазаров Р.Д., Макаров В.Л. Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями. — М.: Высш. школа, 1987. — 296 с.
5. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. — М.: Наука, 1973. — 408 с.
6. Приказчиков В.Г. Точность дискретного аналога спектральной задачи для оператора линейной теории упругости // Дифференциальные уравнения. — 1999. — **35**, № 2. — С. 273–279.
7. Майко Н.В., Приказчиков В.Г., Рябичев В.Л. Точность разностной схемы решения задачи на собственные значения для оператора Лапласа // Кибернетика и системный анализ. — 2011. — № 5. — С 131–139.

Надійшла до редакції 05.08.2015

В.Г. Приказчиков, Н.В. Майко

ГРАНИЧНА ХАРАКТЕРИСТИКА ТОЧНОСТІ ДИСКРЕТНОГО АНАЛОГА СПЕКТРАЛЬНОЇ ЗАДАЧІ

Анотація. Розглянуто задачу на власні значення для оператора Лапласа з крайовими умовами Діріхле на межі двовимірної області довільної форми. За допомогою скінченно-різницевої апроксимації доведено граничну оцінку точності простого власного числа. З асимптотичної формули виведено оцінку знизу для простих власних чисел.

Ключові слова: оператор Лапласа, спектральна задача, різницева схема, асимптотична формула, оцінка знизу.

V.G. Prikazchikov, N.V. Mayko

THE LIMIT ACCURACY PROPERTY FOR THE DISCRETE ANALOGUE OF THE SPECTRAL PROBLEM

Abstract. The spectral problem for the Laplace operator with the Dirichlet boundary condition in a two-dimensional domain is investigated. By using the finite-difference approximation the limit accuracy estimate for a simple eigenvalue is obtained. From the asymptotic formula the lower estimate for a simple eigenvalue is drawn.

Keywords: Laplace operator, spectral problem, simple eigenvalue, finite-difference scheme, asymptotic formula, estimate from below.

Приказчиков Виктор Георгиевич,
доктор физ.-мат. наук, профессор Киевского национального университета имени Тараса Шевченко.

Майко Наталия Валентиновна,
кандидат физ.-мат. наук, доцент Киевского национального университета имени Тараса Шевченко, e-mail: natmaiko@gmail.com.