МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ МЕТОДИ

УДК 621.039.56

С.Д. Винничук, д-р техн. наук
Ін-т проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова НАН України
(Україна, 03164, Київ, вул. Генерала Наумова, 15,
тел. (044) 4249171, e-mail: vynnychuk@i.ua)

Визначення потокорозподілу в мережах з переважаючою деревоподібною структурою графа на основі потенціалу в середній точці гілок-хорд

Запропоновано алгоритм RP розрахунку потокорозподілу в розподільчих мережах з графом G переважно деревоподібної структури, в якому число циклів h не перевищує корінь з числа його вузлів V, при лінійній залежності зміни потенціалу від струму. Алгоритм основано на приведенні графа до дерева внаслідок розриву гілок-хорд при визначенні значення потенціалу в їх середній точці. В алгоритмі двічі розраховуються значення струмів при фіксованих значеннях потенціалів, обчислювальна складність яких $T(E) = O(E)$, де E — число гілок графа. Для визначення невідомих потенціалів в середніх точках h гілок-хорд формується система лінійних рівнянь порядку h, коефіцієнти і праві частини якої формуються на підставі результатів h додаткових розрахунків струмів при різних варіантах фіксованих значень потенціалів. Обчислювальна складність визначення невідомих потенціалів є величиною $O(hE^* + E + h^3)$, де E^* — число гілок еквівалентованого графа G^*, тобто підграфа G, утвореного на основі згортання висячих вузлів. При $h < V^{1/2}$ обчислювальна складність алгоритму RP буде не вище $O(V^{3/2})$, а обсяг необхідної пам'яті пропорційний числу вузлів графа. Запропоновано спосіб аналізу структури графа розподільчої системи, що дозволяє виявити гілки графа, видалення яких призводить до розбиття графа G^* на окремі компоненти, внаслідок чого система лінійних рівнянь порядку h може бути розділена на підсистеми.

Ключові слова: розподільча мережа, потокорозподіл, еквівалентування, згортка, гілки-хорди.

Постановка задачі. Питання, пов'язані з розрахунком потокорозподілу в розподільчих системах (РС) в значній мірі вивчені [1—6]. При розрахунках потокорозподілу в електричних ланцюгах використовують в якості змінних значення струмів в гілках і напруг (потенціалів) у вузлах. В гідравлічних розподільчих системах (ГРС), які є мережами стисливої і нестисливої рідини, аналогом струму є масова витрата, а значення потенціалу в вузлі відповідає повному тиску. Надалі, аналогічно [7], для всіх технічних додатків методів розрахунку потокорозподілу для змінної, яка асоціюється з струмом, буде використано термін «струм», а для змінної, яка асоціюється з потенціалом, — термін «потенціал».

Для розрахунку струмів в гілках і потенціалів у вузлах найчастіше використовуються методи контурних струмів і вузлових потенціалів, обчислювальна складність яких визначається трудомісткістю рішення системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) щодо числа контурів або вузлів графа відповідно [8, 9]. При цьому в методах контурних струмів забезпечується менша похибка розрахунків, ніж в методах вузлових потенціалів, через що при розрахунках ГРС, як правило, не використовуються методи вузлових потенціалів. При розрахунках потокорозподілу в ГРС і електроенергетичних радіальних мережах граф РС містить значну кількість граничних вузлів, а циклів в графі або немає, або їх число відносно незначне в порівнянні із загальним числом вузлів. У таких випадках виникає необхідність у методах розв'язання системи рівнянь потокорозподілу, які враховують цю властивість РС.

Якщо для довільної гілки графа РС зміна потенціалу від струму має вигляд

$$\Delta U_k(i_k) = U(v_{k,1}) - U(v_{k,2}) = a_k + r_k i_k, \quad k = 1 \div E, \tag{1}$$

де a_k, $k = 1 \div E$, — деяке дійсне число; $r_k > 0$, $k = 1 \div E$, — еквівалент опору в електричних ланцюгах; i_k — струм в гілці k, $k = 1 \div E$; $v_{k,1}$ ($v_{k,2}$), $k = 1 \div E$, — вузол початку (кінця) гілки k; $U(v_{k,1})$ ($U(v_{k,2})$), $k = 1 \div E$, — значення потенціалу в вузлі початку (кінця) гілки k, то для графа типу дерева струми в гілках можуть бути визначені на основі згортки схеми. Тоді число кроків буде пропорційне числу вузлів графа при послідовному еквівалентуванні висячих вузлів однією гілкою [7, 10]. Аналогічні результати можна отримати при послідовному виключенні невідомих з системи рівнянь Максвелла щодо потенціалів у вузлах [11], але тоді істотне значення матиме забезпечення необхідної точності, особливо у випадках, коли значення коефіцієнтів опорів гілок відрізняються на багато порядків.

Відомо, що, використовуючи процедури еквівалентування, інколи можна змінювати структуру графа мережі. Якщо при цьому виявиться, що перетворений граф РС не містить циклів, то розрахунок струмів і потенціалів можна виконати за число кроків, лінійне числу вузлів [7]. Але при виконанні співвідношень (1), коли $a_k \neq 0$, $k = 1 \div E$, не вдається скористатися заміною паралельних гілок однією еквівалентною, а також виключенням вузла за допомогою перетворення активної багатопроменевої зірки в еквівалентний багатокутник. Тому для приведення графа до деревоподібної структури буде використано відомий метод еквівалентного генератора, коли до середньої частини однієї з гілок циклу додаються два вузли з однаковими значеннями потенціалу і відшукується таке його значення, при якому струм у двох утворених нових гілках співпаде [2, 3, 6, 12]. Для цього пропонуємо використовувати розрив гілок-хорд графа G РС з подальшим застосуванням методу згортки.

Структура множини вузлів та гілок переважно деревоподібного графа. Нехай задано граф РС $G(V, E)$ з числом вузлів V та гілок E. Вважаючи його неорієнтованим, визначимо наступні типи гілок та вузлів:

V_1 — множина граничних вузлів;

V_2 — множина вузлів циклів, для яких існує замкнений шлях (цикл), який починається і закінчується в них;

V_3 — множина вузлів, що належать шляху між двома вузлами з множини V_3, де всі інші вузли не є вузлами циклів;

V_4 — множина внутрішніх вузлів дерева: $V_4 = V - V_1 - V_2 - V_3$;

E_1— множина граничних гілок — один з інцидентних їй вузлів є граничним;

E_2 — множина гілок циклів — інцидентні їй вузли є вузлами циклів;

E_3 — множина гілок дерева — гілки, для яких хоча б один з інцидентних їм вузлів належить множині V_4, а інший не належить V_4;

E_4 — множина гілок: $E_4 = E - E_1 - E_2 - E_3$;

E_5 — множина гілок-хорд (підмножина E_2), тобто таке мінімальне число гілок циклів, при виключенні яких з множини E граф стає деревом.

Введемо поняття виділеного дерева, 1-дерева і графа з переважно деревоподібною структурою:

виділене дерево — це максимальний підграф графа $G(V, E)$, в якому тільки один вузол належить множині V_3 або V_4, а всі інші вузли — множині V_5;

1-дерево — це зв'язний граф, який містить всього одну гілку;

граф з переважно деревоподібною структурою — це граф, в якому число хорд менше числа вузлів.

На рис. 1, *а*, наведено граф з переважно деревоподібною структурою, а на рис. 1, *б*, — всі його виділені дерева. У наведеному графі множини V_1—V_4 містять такі вузли:

$V_1 = \{5, 10, 11, 12, 15, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 26\}$;

$V_2 = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\}$;

$V_3 = \{25\}$;

$V_4 = \{9, 13, 14, 16, 17, 18\}$.

Відповідно множини E_1 — E_5 містять такі гілки:

$E_1 = \{(5, 6), (9, 10), (9, 11), (12, 13), (7, 15), (18, 19), (16, 20), (16, 21), (17, 22), (17, 23), (18, 24), (25, 26)\}$;

$E_2 = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 6), (3, 6), (4, 7), (4, 8), (7, 8)\}$;

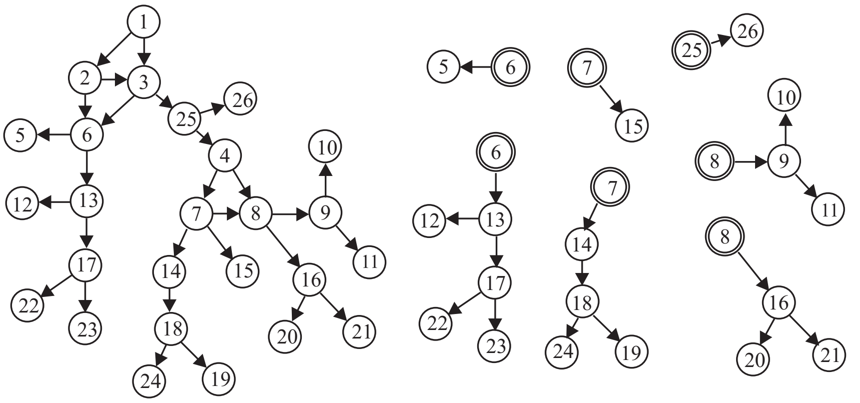

Рис. 1. Орієнтований граф з переважно деревоподібною структурою (*а*) і його виділені дерева (*б*)

$E_3 = \{(8, 9), (6, 13), (7, 14), (8, 16), (13,17), (14, 18)\}$;
$E_4 = \{(3, 25), (4, 25)\}$; $E_5 = \{(1, 3), (3, 6), (4, 8)\}$.

Нехай задано граф РС, що містить K циклів, для яких визначено гілки-хорди. Нехай також для кожної з гілок графа визначено коефіцієнти в залежності (1). Доведемо наступне твердження.

Твердження 1. Значення струмів в гілках РС є лінійною функцією від значень струму потенціалів в середній точці гілок-хорд.

Д о в е д е н н я. Кожну з гілок-хорд з номером k представимо двома граничними гілками з однаковим значенням потенціалу $X_{k,1} = X_{k,2} = X_k$, $k = 1 \div h$, в доданих граничних вузлах, де необхідно визначити струми $i_{k,1}$ та $i_{k,2}$ в гілках, суміжних вузлам $X_{k,1}$ та $X_{k,2}$. Для гілок, суміжних вузлам $X_{k,1}$ і $X_{k,2}$, визначимо співвідношення для зміни потенціалу від струму в гілці виду (1) як величину, в якій коефіцієнти a і r дорівнюють половині їх значень для гілки-хорди. Отриманий таким способом граф назвемо розширеним деревоподібним графом. Для графа, показаного на рис. 1, *а*, при хордах $\{1, 3\}$, $\{3, 6\}$, $\{4, 8\}$ розширений деревоподібний граф виглядає так, як показано на рис 2, де k-й гілці-хорді відповідають вузли $X_{k,1}$ та $X_{k,2}$.

Для будь-якого розширеного деревоподібного графа можна скласти лінійну систему рівнянь щодо невідомих потенціалів. В кожному з внутрішніх вузлів формуємо рівняння, що відповідає першому постулату Кірхгофа, а струм в кожній з суміжних вузлу гілок визначаємо із співвідношення (1) через значення потенціалів в інцидентних їй вузлах. Якщо виявиться, що для внутрішнього вузла відомі струми в усіх суміжних йому гілках, то такі вузли виключатимемо з розгляду для уникнення вироджених рівнянь виду 0 = 0. У такій системі рівнянь відомі значення потенціалів P_k, $k=1\div h$, задані в середній точці гілки-хорди, з'являться в правій частині сформованої системи рівнянь Максвелла. Отже, всі відшукувані невідомі значення потенціалів будуть лінійними функціями від P_k, $k=1\div h$, що випливає з правила Крамера визначення невідомих в СЛАР. Але значення потенціалу у вузлах, суміжних $X_{k,1}$ та $X_{k,2}$, також лінійно залежить від P_k, тому і різниця потенціалів буде лінійною функцією від P_k. Твердження 1 доведено.

З твердження 1 випливає, що значення струмів в гілках, суміжних $X_{k,1}$ та $X_{k,2}$, і різниця таких струмів є лінійними функціями від X_k. Останнє означає, що внаслідок лінійної залежності різниці струмів від P_k можна визначити таке його значення, при якому різниця струмів дорівнюватиме нулю.

Алгоритм RP визначення струмів в гілках і потенціалів у вузлах графа РС. При будь-яких граничних значеннях потенціалів чи струмів за умови, що серед граничних даних є хоча б одне значення потенціалу, визначене за допомогою алгоритму RPR_D [7], можна отримати невідомі значення струмів у гілках та потенціалів у вузлах. Але при переході від графа, що містить цикли, до розширеного деревоподібного графа при розривах гілок-хорд природною є вимога рівності в точці розриву значень струмів і потенціалів. Оскільки значення потенціалів співпадають, слід забезпечити рівність значень струмів

$$i_{k,1}(X_k)=i_{k,2}(X_k),\ k=1\div h, \tag{2}$$

в гілках, суміжних вузлам $X_{k,1}$ та $X_{k,2}$ при $k=1\div h$.

Для досягнення рівності (2) скористаємося тим, що значення струмів є лінійною функцією від потенціалів. Алгоритм RP визначення значень

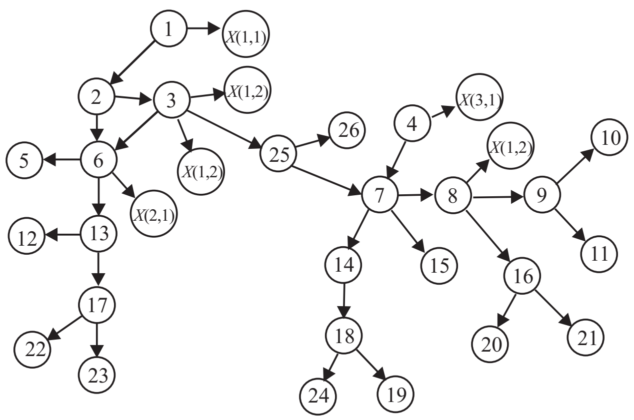

Рис. 2. Розширений деревоподібний граф для графа, показаного на рис. 1, *а*

струмів в гілках-хордах, при яких досягаються рівності (2), представимо наступною послідовністю кроків.

1. На основі деякої сформованої множини гілок-хорд побудувати розширений деревоподібний граф.

2. Вибрати початкове значення потенціалів $\overline{MP}$ в середній точці гілок-хорд і за допомогою алгоритму RPR-D [7] визначити значення струмів $i_{k,1}(X_k)$ та $i_{k,2}(X_k)$, $k=1\div K$, і їх різниць:

$$\Delta i_{k,0}(\overline{MP}) = i_{k,1,0}(\overline{MP}) - i_{k,2,0}(\overline{MP}),\ k=1\div h. \tag{3}$$

3. Для потенціалів $\overline{MP_j}$, $j=1\div h$, які відрізняються від потенціалів $\overline{MP}$ значенням струму тільки в j-й гілці-хорді на одиницю, за допомогою алгоритму RPR-D визначити прирости до різниць потенціалів:

$$\Delta i_{j,k} = \Delta i_{j,k}(\overline{MP_j}) = i_{k,1,j}(\overline{MP_j}) - i_{k,2,j}(\overline{MP_j}) - \Delta i_{k,0}(\overline{MP}),$$

$$k=1\div h,\ \ j=1\div h. \tag{4}$$

4. Визначити прирости δ_j, $j=1\div h$, до початкового значення потенціалів в гілках-хордах, при яких будуть досягнені рівності (2) з системи рівнянь

$$\sum_{n=1}^{K} \Delta i_{j,n}\delta_n = -\Delta i_{0,n},\ j=1\div h. \tag{5}$$

5. З урахуванням приростів, знайдених із СЛАР (5), визначити необхідні значення потенціалів в середній точці гілок-хорд, а виходячи з них, — невідомі значення струмів в гілках і потенціалів у вузлах графа РС.

Покажемо, що алгоритм RP дозволяє визначити значення струмів в гілках і потенціалів у вузлах графа РС. Дійсно, відповідно до твердження 1 для довільного вектора потенціалів $\overline{MP}$ в середніх точках гілок-хорд різниця струмів $i_{k,1}(\overline{MP}) - i_{k,2}(\overline{MP})$, $k=1\div h$, є лінійною функцією від $\overline{MP}$. Але коефіцієнти в цих функціях невідомі. Їх можна визначати як часткові похідні по відповідній змінній, які для лінійних залежностей точно визначаються чисельно співвідношеннями (4).

Для формування СЛАР, за допомогою якої можна визначити необхідні значення потенціалів X_k, $k=1\div h$, необхідно знайти праву частину кожного з рівнянь. У точці розв'язку похибки дорівнюють нулю. Тому невідомі прирости початкових значень струмів можна шукати методом Ньютона. Саме формула методу Ньютона для лінійної системи рівнянь має вигляд СЛАР (5). Оскільки значення потенціалів є лінійною функцією, для ітераційного процесу необхідно всього одна ітерація методу

Ньютона. Отже, алгоритм RP дозволяє визначити невідомі струми і потенціали в РС з графом, що містить цикли.

Обчислювальна складність алгоритму RP. На кроці 1 формується множина гілок-хорд, число яких K для однозв'язного графа дорівнює числу гілок мінус число вузлів плюс одиниця. При числі гілок-хорд, що не перевищує числа вузлів, алгоритми їх вибору характеризуються обчислювальною складністю $O(V)$.

Початкове наближення потенціалів в гілках-хордах можна вибрати довільно, оскільки для лінійних залежностей часткові похідні не залежать від значень змінних. Нехай всі значення потенціалів дорівнюють нулю. Для присвоєння значень потенціалам в середніх точках гілок-хорд і формування залежностей (1) в гілках, суміжних вузлам $X_{k,1}$, $X_{k,2}$, необхідне число кроків, пропорційне $h < V$. При довільних значеннях потенціалів визначення струмів $i_{k,1}$, $i_{k,2}$, $k = 1 \div h$, для розширеного деревоподібного графа потребує виконання числа кроків, яке оцінюється величиною $O(V + 2h)$, та $O(h)$ операцій визначення часткових похідних в (4). Тому на кроці 3 алгоритму число елементарних кроків є величиною порядку $O(hV)$.

На кроці 4 із СЛАР (5) визначаються прирости δ_j, $j = 1 \div h$, до початкового значення потенціалів $\overline{MP}$, при яких досягаються рівності в (2). Необхідне для цього число елементарних кроків не перевищує величини $O(h^3)$. На кроці 5 знову визначаються значення струмів в гілках і потенціалів у вузлах згідно з алгоритмом RPR_D аналогічно кроку 2, обчислювальна складність якого $T(V) = O(V)$. Підсумовуючи загальне число кроків, отримуємо загальну обчислювальну складність алгоритму RP: $T(V, h) = O((h + 2)V + h^3)$. При числі гілок-хорд не більше $\sqrt{V}$ вона виявиться величиною порядку $O(V^{1,5})$.

Прискорення роботи алгоритму RP. Якщо в графі РС відсутні цикли, алгоритм RP практично збігається з алгоритмом RPR_D. Але при числі циклів $h > 0$ слід проводити $h + 2$ розрахунки струмів в гілках і потенціалів у вузлах мережі, на кожному з яких у повному обсязі використовувати алгоритм RPR_D. При цьому необхідно додатково розраховувати збалансований у вузлах розподіл постійних значень струмів згідно (2), а при вирішенні СЛАР визначити K невідомих струмів в гілках-хордах. Обчислювальна складність одноразового використання алгоритму RPR_D є величиною порядку $O(V)$. Обчислювальну складність одноразового рішення СЛАР з повністю заповненою симетричною матрицею коефіцієнтів без гарантованого діагонального переважання можна оцінити величиною порядку $O(h^3)$. Тому загальна обчислювальна складність алгоритму RP $T(V, c) = O(\alpha_1 V + \alpha_2 cV + \alpha_3 c^3)$, де $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — деякі константи, які при $h < \sqrt{V}$ оцінюються зверху величиною $O(V^{3/2})$.

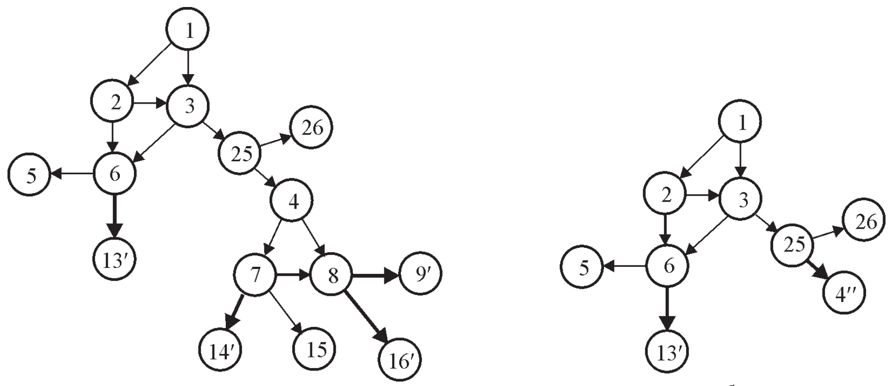

Рис. 3. Послідовне зменшення розміру графа: *а* — еквівалентований граф; *б* — еквівалентування частини графа, яка містить цикл, гілкою {25, 4″}

Важливо зазначити, що при h + 2 розрахунках струмів в гілках і потенціалів у вузлах мережі в алгоритмі RP кожен раз реалізується одна і та ж заміна висячих вузлів вихідного графа відповідними еквівалентними гілками. Очевидно, що обчислювальну складність алгоритму RP можна зменшити, якщо частину цих операцій виконувати всього один раз. До числа таких операцій входять розрахунок опору і провідності еквівалентної гілки та розрахунок граничного значення потенціалу для еквівалентної гілки при заміні нею внутрішнього вузла графа з множини V_5.

Нехай для орієнтованого графа (див. рис. 1) в якості граничних умов задано виключно значення потенціалів. Виберемо в якості початкового вузла для алгоритму RPR_D вузол 1. Тоді при відомих значеннях коефіцієнтів рівнянь (1) гілки, суміжні вузлам 17, 18, 16, 9, 14 і 13, можна послідовно замінювати однією еквівалентною гілкою згідно з алгоритмом згортки [7]. При еквівалентуванні значення коефіцієнтів в (1) не залежатимуть від $\overline{MP_j}$, $j=1\div h$. Отже, таку операцію згортання можна реалізовувати лише один раз для потенціалів, а всі наступні операції кроку 3 виконувати для підграфа меншого розміру, який умовно назвемо еквівалентованим. Еквівалентований граф G^* графа G (див. рис. 1) зображений на рис. 3, *а*, де напівжирними лініями означені еквівалентні гілки, а штрихом — еквівалентні вузли, для яких визначено еквівалентні граничні значення потенціалів. Еквівалентований граф містить меншу кількість гілок, E^*= 17, і вузлів, V^*= 15, що в деяких випадках може суттєво зменшити кількість кроків алгоритму RP.

Другий спосіб зменшення обчислювальної складності пов’язаний з тим, що у графів G і G^* наявна непуста множина гілок $E_4=\{(3,25),(4,25)\}$.

Розрив будь-якої з них призведе до поділу графа на дві компоненти з меншим числом циклів в кожній з них. При цьому в результаті двох послідовних розрахунків витрат в гілках і потенціалів у вузлах однієї з компонент її можна замінити однією гілкою. Для компоненти, що містить вузол циклу 8 (рис. 3, *б*), число гілок $E^{**} = 10$, вузлів $V^{**} = 9$, а число гілок-хорд дорівнює двом. При розв'язуванні СЛАР це забезпечує зменшення обчислювальної складності.

Необхідно зазначити, що в алгоритмі RP не передбачалося формування множини гілок E_4. Тому для оцінки обчислювальної складності варіанту модифікації алгоритму RP, в якому використано розбиття графа на компоненти по гілках множини E_4, необхідно розглянути алгоритм формування E_4. Згідно означення $E_4 = E - E_1 - E_2 - E_3$. Тому в алгоритмі формування E_4 передбачається окреме отримання множини гілок $E_1 \cup E_2$ та множини E_3.

Визначення множини гілок $E_1 \cup E_2$. Гілки графа G назвемо поміченими, якщо їх включено до $E_1 \cup E_2$. Всім гілкам графа в деякому масиві M присвоїмо значення $M[i] = 1$. Гілку i віднесемо до множини помічених та присвоїмо їй значення $M[i] = 0$, якщо серед множини гілок, суміжних вузлу, вона буде єдиною непоміченою. Нехай k_u, $u = 1 \div V$, — число гілок, суміжних вузлу u. Процес формування починається з граничних вузлів. Кожному з них суміжна всього одна гранична гілка. Тому всі граничні гілки i стають поміченими і для них $M[i] = 0$. При кожному включенні граничних гілок в число помічених у суміжному вузлі число непомічених гілок зменшується на одиницю та дорівнюватиме сумі $M[i_u]$, де j_u — гілки графа, суміжні вузлу u. За наявності внутрішніх вузлів u, для яких $k_u = 1$, поміченою стане непомічена гілка i, а для вузла w, суміжного u по гілці i, на одиницю зменшиться число k_w. Процес буде продовжуватися, доки будуть існувати вузли u, для яких $k_u = 1$.

Для графа, наведеного на рис. 1, *а*, послідовність вузлів u при $k_u = 1$ буде наступною (граничні вузли вказані в порядку зростання їх номера): 5, 10, 11, 12, 15, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 26, **9, 16, 17, 18, 13**, а множина гілок $E_1 \cup E_2$ = {(6, 5), (9, 10), (9, 11), (13, 12), (7, 15), (18, 19), (16, 20), (16, 21), (17, 22), (17, 23), (18, 24), (25, 26), **(8, 9), (8, 16), (13, 17), (14, 18), (6, 13)**}, де внутрішні вузли та відповідні їм помічені гілки позначено напівжирним шрифтом.

Визначення множини гілок E_3. Для алгоритму визначення невідомих струмів у гілках та потенціалів у вузлах RPR_D однією з обов'язкових операцій була побудова кореневого дерева методом пошуку в ширину, де коренем є деякий граничний вузол [7]. Для кожного вузла були визначені його гілка-предок та вузол-предок. Така ж операція необхідна і для алго-

Послідовне формування множини E_3 на основі гілок-хорд

Гілка-хорда	Аналізований вузол	Рівень аналізованого вузла	Гілка-предок аналізованого вузла	Вузол-предок аналізованого вузла	Чи співпали вузли-предки
(2, 3)	2	2	(2, 6)	6	Так
	3	2	(3, 6)	6	
(1, 3)	1	3	(1, 2)	2	—
	3	2			
	2	2	(2, 6)	6	Так
	3	2	(3, 6)	6	
(7, 8)	7	5	(4, 7)	4	Так
	8	5	(4, 8)	4	

ритму RP, оскільки потрібно визначати гілки-хорди, а метод пошуку в ширину для цього є найефективніший, що обумовлено обчислювальною складністю $O(E)$.

Нехай в результаті роботи алгоритму пошуку в ширину визначено множину гілок-хорд E_5. Помітимо їх іншим способом, ніж гілки множин $E_1 \cup E_2$. Наприклад, гілці-хорді j в масиві M надамо значення 2, тобто $M[j] = 2$. Сформуємо множину E_3 на основі побудови циклів, починаючи з гілок-хорд. Довільну гілку-хорду j віднесемо до множини E_3 та надамо їй значення $M[j] = 2$. Визначимо інцидентні їй вузли u та v, які для зручності будемо називати аналізованими. При роботі алгоритму методу в ширину визначалися рівні вузлів в кореневому остовному дереві. Якщо рівень одного з аналізованих вузлів, наприклад вузла v, більший на одиницю за рівень іншого, то для вузла v визначаємо гілку-предка i_v, надаємо їй значення $M[i_v] = 2$, а замість v новим аналізованим вузлом стає вузол-предок v.

Порівнюємо значення аналізованих вузлів u та v. Якщо вони співпали, то цикл сформовано, і переходимо до формування множини гілок іншого циклу для наступної гілки-хорди. Якщо $u \neq v$, то визначаємо гілки-предки i_u та i_v, вносимо їх до множини E_3, надаємо їм значення $M[i_u] = 2$ і $M[i_v] = 2$, а вузли u та v замінюємо їх предками. Такі операції проводимо, доки не буде виконано умову $u = v$.

Для графа, наведеного на рис. 1, *а*, при роботі алгоритму методу пошуку в ширину для початкового вузла 5 отримаємо наступні рівні вузлів:

0: 5;

1: 6;

2: 2, 3, 13;

3: 1, 25, 12, 17;

4: 26, 4, 22, 23;

5: 7, 8;
6: 14, 15, 9, 16;
7: 18, 10, 11, 20, 21;
8: 19, 24

та гілки-хорди:

(2, 3), (1, 3), (7, 8).

Послідовне формування множини E_3 на основі гілок-хорд наведено в таблиці, з якої видно, що до множини E_3 внесено гілки (2, 3), (2, 6), (3, 6), (1, 3), (1, 2), (7, 8), (4, 7) та (4, 8). Оскільки $E_4 = E - E_1 - E_2 - E_3$, до множини E_4 ввійдуть гілки, що не ввійшли до $E_1 \cup E_2 \cup E_3$, тобто гілки k, для яких $M[k] = 1$, а саме гілки (3, 25) та (25, 4).

За результатами аналізу обчислювальної складності алгоритму формування множини E_4 отримаємо наступне:

число кроків при формуванні множини $E_1 \cup E_2$ є величиною $O(E)$;

кожна операція визначення гілок циклів для гілки-хорди потребує числа кроків, яке не перевищує $O(V)$ при числі гілок-хорд $h < V^{1/2}$, тобто є величиною порядку $O(V^{3/2})$;

виявлення гілок k, для яких $M[k] = 1$ потребує числа кроків $O(E)$.

Отже, загальна обчислювальна складність алгоритму формування множини E_4 є величиною порядку $O(V^{3/2})$. Такі операції виконуються окремо до початку розрахунку невідомих струмів у гілках та потенціалів у вузлах, тому не змінюють загального рівня обчислювальної складності порядку $O(V^{3/2})$.

Слід також зазначити, що обчислювальну складність алгоритму RP може бути зменшено також внаслідок того, що при обчисленнях на кроці 3 значення еквівалентних коефіцієнтів опору не залежать від $\overline{MP}$ та $\overline{MP_j}$, $j = 1 \div K$, при роботі алгоритму RPR_D і тому їх можна визначати лише один раз.

Висновки

В запропонованому алгоритмі RP визначення струмів в гілках і потенціалів у вузлах використано ідею методу еквівалентного генератора. Для РС, графи яких містять відносно невелике число циклів, що менше кореня з числа вузлів, обчислювальна складність алгоритму RP асимптотично не перевищує складності інших методів неітераційного визначення струмів у гілках та потенціалів у вузлах при лінійних залежностях різниць потенціалів від струмів. При цьому на кожному кроці обчислень необхідний обсяг пам’яті є величиною не вище $O(E)$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Бунь Р.А., Васильев Е.Д., Семотюк В.Н.* Моделирование электрических цепей методом подсхем. Отв. ред. Грицык В.В. Киев: Наук. думка, 1991, 176 с.
2. *Максимович Н.Г.* Линейные электрические цепи и их преобразования. М.-Л.: Госэнергоиздат, 1961, 267 с.
3. *Пухов Г.Е.* Методы анализа и синтеза квазианалоговых электронных цепей. Киев: Наук. думка, 1967, 568 с.
4. *Сешу С., Рид М.Б.* Линейные графы и электрические цепи. Пер. с англ., под ред. П.А.Ионкина. Учеб. пособие для вузов. М.: Высш.школа, 1971, 448 с.
5. *Сигорский В.П., Петренко А.И.* Алгоритмы анализа электронных схем. Киев: Техніка, 1970, 396 с.
6. *Шакиров И.А.* Универсальные преобразования и диакоптика электрических цепей / Автореф. дисс. … д-ра техн. наук. Ленинград, 1980, 32 с.
7. *Винничук С.Д.* Определение потокораспределения в сетях с древовидным графом // Электрон. моделирование. 2016, **38**, № 4, с. 65—80.
8. *Меренков А.П., Хасилев В.Я.* Теория гидравлических цепей. М.: Наука, 1985, 280 с.
9. *Акопян С.Г.* Электрическая теория гидравлических цепей и методические основы анализа режимов и оптимального проектирования газотранспортных систем / Автореф. дисс… д-ра техн. наук. Государственный инженерный университет Армении. Ереван, 1993, 56 с.
10. *Винничук С.Д., Самойлов В.Д.* Определение токов в коммутационных структурах электроэнергетических сетей с древовидной структурой графа // Электрон. моделирование. 2015, **37**, № 5, с. 89—104.
11. *Шаргин Ю.М., Меркурьев А.Г.* Расчет электрических режимов методом эквивалентных преобразований // Электричество. 2003, №4, с. 53—55.
12. *Бессонов Л.А.* Теоретические основы электротехники: Электрические цепи / Учебник для студентов вузов. 7-е изд., перераб. и доп. М.: Высш. школа, 1978, 528 с.

Отримано 05.02.18

REFERENCES

1. Bun, R.A., Vasiliev, E.D. and Semotyuk, V.N. (1991), Modelirovanie elektricheskikh tsepey metodom podskhem, Otv. red. Gritsyk, V.V., AN Ukrainy, Fiziko-mekhanicheskiy in-t. [Simulation of electrical circuits by subcircuits, Ed. Grytsyk, V.V., Academy of Sciences of Ukraine, Physical-Mechanical inst.], Naukova dumka, Kiev, Ukraine.
2. Maksimovich, N.G. (1961), Lineinye elektricheskie tsepi i ikh preobrazovaniya [Linear circuits and their conversion], Gosenergoizdat, Moscow-Leningrad, Russia.
3. Pukhov, G.Ye. (1967), Metody analiza i sinteza kvazi analogovykh elektronnykh tsepey [Methods of analysis and synthesis of the quasi analog electronic circuits], Naukova Dumka, Kiev, Ukraine.
4. Seshu, S. and Rid, M.B. (1971), Lineinye grafy i elektricheskie tsepi, Per. s angl., pod red. P.A. Ionkina, Uchebnoe posobie dlya vuzov spetsialnostey radiotekhnika, elektronnaya tekhnika, elektropriborostroenie i avtomatika [Line graphs and circuits, Transl. from English., Ed. Ionkin, P.A., Textbook for Universities radio engineering specialties, electronic engineering, electrical instrumentation and automation], Vysshaya shkola, Moscow, Russia.
5. Sigorskiy, V.P. and Petrenko, A.I. (1970), Algoritmy analiza elektronnykh skhem [Algorithms analysis of electronic circuits], Tekhnika, Kiev, Ukraine.
6. Shakirov, I.A. (1980), “Universal conversion and diakoptics circuits”, Abstract of Dr. Sci. (Tech.) dissertation, Leningrad, Russia.

7. Vynnychuk, S.D. (2016), “Definition of stream distribution in networks with a tree-like graph”, Elektronnoe modelirovanie, Vol. 38, no. 4, pp. 65-80.
8. Merenkov, A.P. and Khasilev, V.Ya. (1985), Teoriya gidravlicheskikh tsepey [Theory of hydraulic circuits], Nauka, Moscow, Russia.
9. Akopyan, S.G. (1993), “Electrical theory of hydraulic circuits and methodical bases of modes analysis and optimal design of gas transmission systems”, Abstract of Dr. Sci. (Tech.) dissertation, 05.13.12, 05.15.13. Gosudarstvennyi inzhenernyi universitet, Yerevan, Armenia.
10. Shargin, Yu.M. and Merkuriev, A.G. (2003), “Calculation of electrical modes of the method of equivalent transformation”, Elektrichestvo, no. 4, pp. 53-55.
11. Vynnychuk, S.D. and Samoylov, V.D. (2015), “Determination of the currents in the switching structures of the electrical energy networks with tree graph’s structure”, Elektronnoe modelirovanie, Vol. 37, no. 5, pp. 89—104.
12. Bessonov, L.A. (1978), Teoreticheskie osnovy elektrotekhniki: Elektricheskie tsepi. Uchebnik dlya studentov elektrotekhnicheskikh, energeticheskikh i priborostroitelnykh spetsialnostey vuzov, 7-ye izd., pererabotannoye i dop. [Theoretical fundamentals of electrical engineering: Electric circuits. Textbook for students of electrical, power and instrument engineering specialties of universities, 7-th ed., revised and additional], Vysshaya shkola, Moscow, Russia.

Received 05.02.18

С.Д. Винничук

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОТОКОРАСПРЕДЕЛЕНИЯ В СЕТЯХ С ПРЕОБЛАДАЮЩЕЙ ДРЕВОВИДНОЙ СТРУКТУРОЙ ГРАФА НА ОСНОВЕ ЗНАЧЕНИЙ ПОТЕНЦИАЛА В СРЕДНЕЙ ТОЧКЕ ВЕТВЕЙ-ХОРД

Предложен алгоритм RP расчета потокораспределения в распределительных сетях с графом G преобладающей древовидной структуры, в котором число циклов h не превышает корня из числа его узлов V, при линейных зависимостях изменения потенциала от тока. Алгоритм основан на приведении графа к дереву вследствие разрыва ветвей-хорд и определения значения потенциала в их средней точке. В алгоритме предусмотрено два варианта расчета значений токов при фиксированных значениях потенциалов, вычислительная сложность которых $T(E) = O(E)$, где E — число ветвей графа. Для определения неизвестных потенциалов в средних точках h ветвей-хорд формируется система линейных уравнений порядка h, коэффициенты и правые части которой формируются по результатам h дополнительных расчетов токов при разных вариантах фиксированных значений потенциалов. Вычислительная сложность определения неизвестных потенциалов и токов является величиной порядка $O(hE^* + E + h^3)$, где E^* — число ветвей эквивалентованного графа G^*, т.е. подграфа G, полученного на основании сворачивания висячих узлов. При $h < V^{1/2}$ вычислительная сложность алгоритма RP будет величиной порядка не выше $O(V^{3/2})$, а объем необходимой памяти пропорционален числу узлов графа. Предложен способ анализа структуры графа распределительной системы, позволяющий выявить ветви графа, удаление которых приводит к разбиению графа G^* на компоненты, вследствие чего система линейных уравнений порядка h может быть разделена на подсистемы.

Ключевые слова: распределительная сеть, потокораспределение, эквивалентирование, свертка, ветви-хорды.

S.D. Vynnychuk

DEFINITION OF FLOW DISTRIBUTION IN NETWORKS WITH THE PREDOMINANT TREE STRUCTURE OF THE GRAPH ON THE BASIS OF POTENTIAL VALUES AT THE MIDPOINT OF BRANCH-CHORDS

An algorithm RP is proposed for calculating the flow distribution in distributive networks with graph G of the dominant tree structure, in which the number of cycles h does not exceed the root from the number of its nodes V, with linear dependences of the potential change on the current. The algorithm is based on reducing the graph to a tree by breaking the branches-chords and determining the value of the potential at their midpoint. The algorithm provides for the calculation of two currents for fixed potentials, the computational complexity of which is $T(E) = O(E)$, where E is the number of branches of the graph. To determine the unknown potentials at the midpoints h of the branches-chords, a system of linear equations of the order h is formed, the coefficients and right-hand parts of which are formed from the results of h additional calculations of currents for different variants of fixed values of the potentials. The computational complexity of determining the unknown potentials and currents is of the order $O(hE^* + E + h^3)$, where E^* is the number of branches of the equivalent graph G^*, i.e., the subgraph G obtained on the basis of the folding of the hanging nodes. For $h < V^{1/2}$, the computational complexity of the RP algorithm will be the order of magnitude no higher than $O(V^{3/2})$, and the amount of necessary memory is proportional to the number of nodes in the graph. For $h < V^{1/2}$, the computational complexity of the RP algorithm will be the order of magnitude no higher than $O(V^{3/2})$, and the amount of necessary memory is proportional to the number of nodes in the graph. A method for analyzing the structure of the graph of the distribution system is proposed, which allows identifying the branches of the graph, the removal of which leads to the decomposition of the graph G^* into components whereby the system of linear equations of order h can be divided into subsystems.

K e y w o r d s: distribution network, flow distribution, equivalence, convolution, branches-chords.

ВИННИЧУК Степан Дмитрович, д-р техн. наук, зав. від. Ін-ту проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова НАН України. В 1977 р. закінчив Чернівецький державний університет. Область наукових досліджень — моделі, методи і програмні засоби для аналізу систем стисливої та нестисливої рідин, теорія алгоритмів.