УДК 519.85

О.С. ПИЧУГИНА*

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОМБИНАТОРНЫХ КОНФИГУРАЦИЙ И ПРИМЕНЕНИЕ В ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ

*Харьковский национальный университет радиоэлектроники, г. Харьков, Украина

Анотація. *У роботі запропоновано підхід до побудови функціонально-аналітичних представлень скінченних точкових конфігурацій, що є образами множин комбінаторних конфігурацій в арифметичному евклідовому просторі. Побудовано ряд таких представлень множин евклідових конфігурацій перестановок. Запропоновано схему побудови еквівалентної моделі до задачі оптимізації на загальній евклідовій множині перестановок векторів у вигляді задачі дискретного програмування. Показано застосування отриманих результатів до задач розміщення об'єктів довільної вимірності.*

Ключові слова: *конфігурація, евклідова комбінаторна конфігурація, загальна множина перестановок, функціонально-аналітичне представлення, евклідова комбінаторна множина, задача розміщення, метричні характеристики, параметри розміщення.*

Аннотация. *В работе предложен подход к построению функционально-аналитических представлений конечных точечных конфигураций, являющихся образами множеств комбинаторных конфигураций в арифметическом евклидовом пространстве. Построен ряд таких представлений множеств евклидовых конфигураций перестановок. Предложена схема построения эквивалентной модели к задаче оптимизации на общем евклидовом множестве перестановок векторов в виде задачи дискретного программирования. Показано применение полученных результатов к задачам размещения объектов произвольной размерности.*

Ключевые слова: *конфигурация, евклидова комбинаторная конфигурация, общее множество перестановок, функционально-аналитическое представление, евклидово комбинаторное множество, задача размещения, метрические характеристики, параметры размещения.*

Abstract. *In the paper, an approach to the construction of functional-analytic representations of finite point configurations being the images of sets of combinatorial configurations' sets in the arithmetic Euclidean space is presented. A number of the representations for the Euclidean permutation configuration sets is constructed. A scheme of forming an equivalent model of an optimization problem on the general Euclidean permutation of vectors set as a discrete problem is proposed. Applicability of the results to placement problems for arbitrary dimension objects is demonstrated.*

Keywords: *configuration, Euclidean combinatorial configuration, the general permutation set, functional-analytic representation, Euclidean combinatorial set, placement problem, metric characteristics, placement parameters.*

1. Введение

Конфигурации в разных контекстах встречаются в различных теоретических областях. Наиболее распространенным является понятие конфигурации как множества прямых на плоскости или в пространстве в совокупности с их точками пересечения [1, 2]. Это понятие конфигурации в смысле Т. Рейе, часто называемой геометрической, было обобщено в нескольких направлениях. На сегодняшний момент они подразделяются на топологические, геометрические и комбинаторные [3]. Конфигурацию называют топологической, если она задает некоторое размещение псевдолиний в проективной плоскости с соответствующим множеством их пересечения. Конфигурации относят к геометрическим, если линии рассматриваются в евклидовой или проективной плоскости, а точки формируются в результате пересечения этих линий. Наиболее распространенными являются комбинаторные конфигурации, в которых в качестве точек и линий рассматриваются абстрактные множества. Именно в последнем контексте конфигурации рассматривались К. Бержем [4] для решения задач комбинаторного анализа и было введено строгое математическое понятие конфигурации как отображение

$$\chi : A \to B \tag{1}$$

некоторого исходного множества A элементов произвольной природы в конечное абстрактное результирующее множество

$$B = \{b_1,...,b_k\} \tag{2}$$

определенной структуры при выполнении заданного набора ограничений Ω. Хотя формально Берж не накладывал ограничений на мощность исходного множества, фактически он рассматривал их конечный случай, полагая

$$A = \{a_1,...,a_n\}. \tag{3}$$

Именно в этом контексте конфигурации рассматривались в дальнейшем, например, в [5–8], с применением для этого случая понятия комбинаторной конфигурации или конфигурации в смысле К. Бержа.

Комбинаторная конфигурация (1) осуществляет структурирование результирующего множества (2), а ее результат π представляет собой упорядоченную последовательность элементов из B:

$$\pi = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ b_{j_1} & \dots & b_{j_n} \end{pmatrix} = \left[b_{j_1}, b_{j_2}, ..., b_{j_n} \right], \tag{4}$$

которую можно также представить четвёркой:

$$\langle A, B, \psi, \Omega \rangle. \tag{5}$$

Рассмотрим задачу комбинаторной оптимизации в следующей постановке. Пусть на множестве Π комбинаторных конфигураций (4) задана функция $f : \Pi \to R^1$. Требуется найти

$$\pi^* = arg \min_{\pi \in P \subseteq \Pi} f(\pi), \tag{6}$$

где P – множество допустимых решений задачи.

Отобразим множество Π в пространство $R^{n'}$, $n' \geq n$ так, что для образа E множества Π выполнено

$$\exists \phi : \ E = \phi(\Pi), \ \Pi = \phi^{-1}(E), \tag{7}$$

после чего перейдем к рассмотрению задачи вида

$$x^* = arg \min_{x \in X \subseteq E} h(x). \tag{8}$$

(8) представляет собой задачу оптимизации на множестве $E \subset R^{n'}$ евклидовых комбинаторных конфигураций размерности n' или е-конфигураций [9–11], каждая из которых представима в виде $\forall x \in E \ \exists \pi \in \Pi : \ x = \phi(\pi), \ \pi = \phi^{-1}(x)$ и задается пятеркой:

$$\langle A, B, \psi, \phi, \Omega \rangle. \tag{9}$$

Целью данной работы является поиск подходов: а) к математическому моделированию множества Π комбинаторных конфигураций и множества E е-конфигураций в зависимости от параметров четверки (5) и пятёрки (9) соответственно; б) к эквивалентному формулированию задачи (6) как задачи дискретной оптимизации, то есть к построению задачи (6) такой, что

$$\pi^* = \phi^{-1}(x^*); \tag{10}$$

в) к решению задачи (6). Также будут указаны возможные приложения полученных результатов в геометрическом проектировании.

2. Теоретические сведения и обозначения

Приведем некоторые сведения из [9]. Пусть E – конечное и не вырожденное в точку множество точек в R^n, а $\mathcal{F} = \{f_j(x)\}_{j \in J_m}$ – множество функций, определенных на E, где $J_m = \{1,...,m\}$.

Представление множества E с помощью функциональных зависимостей

$$f_j(x) = 0,\ j \in J_{m'}, \tag{11}$$

$$f_j(x) \le 0,\ j \in J_m \setminus J_{m'} \tag{12}$$

называется функционально-аналитическим или f-представлением множества E.

Система (11) называется строгой частью f-представления, система (12) – нестрогой частью, а количество ограничений – его порядком. Так, m будет порядком f-представления (11), (12), а $m', m'' = m - m'$ – порядком его строгой и нестрогой частей соответственно.

Геометрически f-представление (11), (12) задает E как пересечение m' поверхностей: $S_j = \{x \in R^n : f_j(x) = 0\},\ j \in J_{m'}$, после чего из образованного надмножества множества E выделяется непосредственно E при помощи ограничений (12), задающих некоторые подобласти R^n: $C_j = \{x \in R^n : f_{j+m'}(x) \le 0\},\ j \in J_{m''}$.

Классификация f-представлений может быть произведена в зависимости от вида входящих в них функций, а также порядка строгой и нестрогой его частей и f-представления в целом. Так, по виду функций (4), (12) f-представления множества E могут быть линейные и нелинейные, непрерывные, дифференцируемые, гладкие, выпуклые, полиномиальные, тригонометрические и т.п.

В свою очередь, для этих видов может быть введена дальнейшая классификация. Например, (11), (12) – полиномиальное f-представление E, если все функции семейства $\mathcal{F}$ – полиномы. Введя понятие степени полиномиального f-представления как наивысшей степени этих полиномов, можно выделить линейные, квадратичные, кубические, биквадратичные и полиномиальные представления высших степеней.

Общая задача построения функционального представления множества E состоит в нахождении некоторой системы ограничений (11), (12), задающей множество E. Поскольку E конечно, существует бесчисленное множество его f-представлений, поэтому данная задача всегда разрешима. Более того, теоретически разрешимой является также задача построения полиномиального f-представления [12].

Классификация f-представлений в зависимости от соотношения параметров m, m', m'' осуществляется следующим образом: система (11), (12) называется:

• строгим представлением E, если в нем присутствует только строгая часть, то есть

$$m' = m, m'' = 0;$$

• нестрогим – если в f -представлении есть только нестрогая часть, то есть

$$m' = 0, m'' = m;$$

• общим f -представлением, если присутствуют строгая и нестрогая части, то есть

$$m'(m - m') > 0.$$

Если $A = a_1,...,a_n$ – мультимножество, то символами $\langle A \rangle = \langle a_1,...,a_n \rangle$, $[A] = [a_1,...,a_n]$ будем обозначать упорядоченную последовательность элементов A. Если к тому же A – числовое мультимножество, то $a = (A) = (a_1,...,a_n)$ будет вектором из его элементов. И, наоборот, если $x = [x_1,...,x_n]$ – кортеж элементов, в частности, вектор $x = (x_1,...,x_n)$, то $X = \{x\} = \{x_1,...,x_n\}$ будет мультимножеством его элементов.

$$\forall x \in E \quad G(x) \subseteq G, \ \forall g \in G \, \exists x \in E : G(x) \nsubseteq G \setminus \{g\}.$$

Если множество A состоит из упорядоченных последовательностей элементов, то индуцирующим его мультимножеством называется $\overline{A}$ такое, что

$$\overline{A} = \{a_1^{n_1},...,a_k^{n_k}\}: \ a_1 \prec ... \prec a_k; \ \forall a \in A \ \{a\} \subseteq \overline{A}; \ \forall i \in J_k \ \exists a \in A: \ \{a\} \not\subset \overline{A} \setminus \{a_i\}.$$

Основа $S(\overline{A}) = \{a_1,...,a_k\}$ индуцирующего мультимножества называется образующим множеством для A.

3. Математическая модель

Заметим, что, исходя из (4), каждой конфигурации $\pi \in \Pi$ можно поставить во взаимно-однозначное соответствие некоторый вектор $(j_1,...,j_n)$: $1 \le j_i \le n, \ i \in J_n$. Для того же, чтобы отобразить произвольную конфигурацию как элемент множества Π, далее будем использовать обозначения:

$$\pi = [\pi_1,...,\pi_n], \ \pi_j = (\pi_{ij})^T_{i \in J_m}, \ j \in J_n. \tag{13}$$

Будем также считать, что вся необходимая информация о задаче оптимизации сосредоточена в комбинаторной конфигурации, а именно в таких параметрах четверки (5), как исходное множество (3) и результирующее множество (2).

Остановимся на случае, когда множества A, B представляют собой совокупность векторов одинаковой размерности, то есть существуют $s, m \in N$:

$$a_i = (a_{1i},...,a_{si})^T \in R^s, \ i \in J_n, \tag{14}$$

$$b_l = (b_{1l},...,b_{ml})^T \in R^m, \ l \in J_k. \tag{15}$$

Перепишем задачу (6) в следующем виде:

$$\pi^* = arg \ min \ f(\mathbf{a}, \pi), \tag{16}$$

$$\pi \in P(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \tag{17}$$

где

$$P(\mathbf{a}, b) = \{\pi \in \Pi(\mathbf{b}): \ f_i(\mathbf{a}, \pi) \le 0, \ i \in J_t\}, \tag{18}$$

$$\mathbf{a} = [a_i]_{i \in J_n}, \ \mathbf{b} = [b_j]_{j \in J_k}. \tag{19}$$

Учитывая (18), представим условие (17) в виде

$$\pi \in \Pi(\mathbf{b}), \qquad (20)$$

$$f_i(\mathbf{a},\pi) \le 0,\ i \in J_t \qquad (21)$$

и перейдем к рассмотрению задачи (16), (20), (21).

Положим теперь, что элементы исходного множества могут быть переменными, а элементы результирующего множества – фиксированными. Условимся использовать обозначение a и $\bar{a}$ для числовой величины или вектора, рассматриваемого как константа и как переменная соответственно, в результате чего формулы (14), (19) преобразуются в $\bar{a}_i = (\bar{a}_{1i},...,\bar{a}_{si})^T \in R^s$, $i \in J_n$, $\bar{\mathbf{a}} = [\bar{a}_i]_{i\in J_n}$, $\mathbf{b} = [b_j]_{j\in J_k}$, а задача (16), (20), (21) приобретает форму (20),

$$\pi^* = arg\ min\ f(\bar{\mathbf{a}},\pi), \qquad (22)$$

$$f_i(\bar{\mathbf{a}},\pi) \le 0,\ i \in J_t. \qquad (23)$$

При этом (5) переходит в четверку $\left\langle \bar{A},B,\psi,\Omega \right\rangle$, где $\bar{A} = \{\bar{a}_1,...,\bar{a}_n\}$.

Пусть множество Π содержит все комбинаторные конфигурации вида (4), удовлетворяющие условию

$$\Omega = \{\psi :\ \{\pi\} = \mathbf{G}\}, \qquad (24)$$

где $\mathbf{G} = \{b_1^{n_1},...,b_k^{n_k}\}$, $n_1 + ... + n_k = n$, то есть $\forall \pi \in \Pi\ \exists\, j_1,...,j_n :\ \{\pi\} = \{b_{j_1}, b_{j_2},...,b_{j_n}\} = \mathbf{G}$.

По построению видно, что множество Π включает все перестановки из мультимножества $\mathbf{G}$, состоящего из n элементов, k из которых различны. Иначе говоря, это общее евклидово множество перестановок или общее е-множество перестановок [13] из мультимножества числовых векторов $\mathbf{G}$:

$$\Pi = P_{nk}(\mathbf{G}). \qquad (25)$$

Тогда наша цель состоит в решении задачи оптимизации вида (20), (22), (23), (25). Сформулируем ее как задачу (33) на множестве е-конфигураций. С этой целью зададим биективное отображение φ между элементами результирующего множества B и множеством $\mathcal{E}$ действительных чисел:

$$\mathcal{E} = \{e_1,...,e_k\},\ e_i < e_{i+1},\ i \in J_{k-1}, \qquad (26)$$

такое, что $e_j = \varphi(\mathbf{b}_j)$, $\mathbf{b}_j = \varphi^{-1}(e_j)$, $j \in J_k$. Тогда множество

$$E = \phi(\Pi) = \{x = (x_1,...,x_n) \in R^n :\ x = \phi(\pi) = (\varphi(\pi_1),...,\varphi(\pi_n))\}_{\pi\in\Pi} \qquad (27)$$

будет представлять собой общее множество евклидовых конфигураций перестановок размерности $n' = n$ или общее $\mathcal{C}$-множество перестановок [9]:

$$E = E_{nk}(G), \qquad (28)$$

индуцирующим мультимножеством которого является числовое мультимножество:

$$G = \{e_1^{n_1},...,e_k^{n_k}\} = \{g_1,...,g_n\},\ g_i \le g_{i+1},\ i \in J_{n-1},$$

а образующим – числовое множество $\mathcal{E}$ вида (26).

Представим задачу (20), (22), (23) в эквивалентной форме:

$$x^* = arg\ min\ f(\bar{\mathbf{a}}, \phi^{-1}(x)), \tag{29}$$

$$h_i(\bar{\mathbf{a}}, \phi^{-1}(x)) \le 0,\ i \in J_t, \tag{30}$$

$$x \in E, \tag{31}$$

где E – множество вида (28).

Задача (29–31) представляет собой задачу евклидовой комбинаторной оптимизации [13] на $\mathcal{C}$-множестве E вида (28), решив которую и учитывая (10), мы одновременно найдем оптимальное решение π^* исходной задачи.

Для того, чтобы представить (29–31) как задачу математического программирования, рассмотрим возможные пути аналитического описания условия (31) принадлежности допустимого решения x дискретному множеству E. Иначе говоря, перейдем к задаче построения функционально-аналитического представления множества $E_{nk}(G)$.

4. Функционально-аналитические представления $E_{nk}(G)$

Рассмотрим случай, когда

$$n = k, \tag{32}$$

то есть мощности исходного и результирующего множеств для рассматриваемого нами множества комбинаторных конфигураций совпадают. Соответственно, множество Π является евклидовым множеством перестановок без повторений из $\mathbf{G}$ [13, 14]: $\Pi = P_n(\mathbf{G})$, а его образ E – это $\mathcal{C}$-множество перестановок без повторений [9]:

$$E = E_n(G) = E_n(\mathcal{E}).$$

В этом случае условие (31) имеет форму $x \in E_n(G)$ и может быть представлено двумя условиями: а) координаты вектора x принимают значения из $\mathcal{E}$ (далее Ограничение 1); б) координаты вектора x попарно различны (далее Ограничение 2).

Ограничение 1 можно записать в виде

$$x_i \in \mathcal{E},\ i \in J_n \tag{33}$$

или в векторном виде $x \in \mathcal{E}^n$.

В качестве функционально-аналитического представления Ограничения 1 можно предложить следующее равенство:

$$\prod_{j=1}^{n}(x_i - e_j) = 0,\ i \in J_n. \tag{34}$$

Ограничение 2 представим в виде

$$x_i \ne x_j,\ 1 \le i < j \le n$$

или

$$\left|x_i - x_j\right|^r \ge \delta^r,\ 1 \le i < j \le n, \tag{35}$$

где $r \in R^1$, $\delta = \min\limits_{i \in J_{n-1}} \{e_{i+1} - e_i\}$.

Перемножив левые и правые части ограничений (35), имеем еще одну форму Ограничения 2 – $\prod_{1\le i<j\le n} \left|x_i - x_j\right|^r \ge \delta C_n^2$.

Это неравенство можно ужесточить до вида

$$\prod_{1\le i<j\le n} \left|x_i - x_j\right|^r = \Delta_r, \tag{36}$$

где $\Delta_r = \prod_{1\le i<j\le n} \left|e_i - e_j\right|^r$, поскольку функция

$$u(x,r) = \prod_{1\le i<j\le n} \left|x_i - x_j\right|^r \tag{37}$$

принимает единственное значение Δ_r на $E_n(G)$.

Так, например, при $r = 2$ равенство (36) принимает вид квадратичного ограничения:

$$\prod_{1\le i<j\le n} (x_i - x_j)^2 = \prod_{1\le i<j\le n} (e_i - e_j)^2, \tag{38}$$

а неравенства (35) обращаются в систему квадратичных ограничений

$$(x_i - x_j)^2 \ge \delta^2,\ 1 \le i < j \le n. \tag{39}$$

В результате имеем ряд f-представлений множества $E_n(G)$ таких, как (34), (38) (далее ($E_n(G)$.FR1)) и (34), (39) (далее ($E_n(G)$.FR2)). Оба они – невыпуклые полиномиальные f-представления $E_n(G)$ степени C_n^2. При этом ($E_n(G)$.FR1) – строгое f-представление порядка $n+1$, а ($E_n(G)$.FR2) – общее порядка $C_n^2 + n = C_{n+1}^2$.

Предположим теперь, что условие (32) не выполнено. Это означает, что

$$n > k. \tag{40}$$

Для этого случая на множестве E Ограничение 1 также выполнено и может быть записано в формах (33), (34), чего нельзя сказать об Ограничении 2. Действительно, поскольку, в силу (40), индуцирующим для E является мультимножество, произвольная е-конфигурация из E будет содержать кратные координаты, следовательно,Ограничение 2 не выполняется. А это означает, что для функционально-аналитического представления условия

$$x \in E_{nk}(G)$$

необходимо найти другие признаки элементов данного множества е-конфигураций перестановок, обеспечивающие повторение координат его элементов заданное число раз.

Теорема 1. Если функция $f(x)$ – симметрична, то она принимает постоянное значение на множестве е-конфигураций перестановок, индуцированных одним и тем же мультимножеством G , а именно,

$$f(x) \underset{E'}{=} f(g), \tag{41}$$

где $E' \subseteq E_{nk}(G)$, $\text{g}=(G)=(\text{g}_1,...,\text{g}_n)$.

Доказательство. Пусть $x \in E'$, тогда $\forall y \in E', y \neq x \quad \exists\, i_1,...,i_n : \{i_1,...,i_n\} = J_n$, $y_{i_j} = x_j, j \in J_n$, то есть е-конфигурация y получена из x перестановкой ее координат. А поскольку по условию $f(x)$ – симметричная функция, то для любого $y \in E'$ $f(x) = f(y)$, то есть на всем множестве E' е-конфигураций перестановок $f(x)$ принимает постоянное значение и $\exists f_0 : f(x) \underset{E'}{=} f_0$.

Более того, $f(x)$ принимает значение f_0 на всем множестве $E_{nk}(G)$:

$$f(x) \underset{E_{nk}(G)}{=} f_0. \tag{42}$$

Определим f_0, выбирая в (42) в качестве x вектор $g \in E_{nk}(G)$, получая $f(x) \underset{E_{nk}(G)}{=} f_0 = f(g)$ и, в частности, (41).

Заметим, что функция (37) принимает постоянное значение на множестве (28). Действительно, она симметрична, а согласно теореме 1, произвольная симметричная функция принимает постоянное значение на множестве е-конфигураций перестановок, индуцированных одним мультимножеством, а именно $\forall r > 0\ u(x,r) \underset{E_{nk}(G)}{=} u(g,r)$. Таким образом, все точки $E_{nk}(G)$ удовлетворяют ограничению (36), где Δ_r определяется по формуле

$$\Delta_r = \prod_{1 \le i < j \le n} \left| g_i - g_j \right|^r .$$

В частности, аналогом квадратичного уравнения (38) будет

$$\prod_{1 \le i < j \le n} (x_i - x_j)^2 = \prod_{1 \le i < j \le n} (g_i - g_j)^2 . \tag{43}$$

Итак, построено f-представление множества $E_{nk}(G)$ вида (34), (43) (далее ($E_{nk}(G)$.FR1)). Подобно ($E_n(G)$.FR1), это представление строгое, невыпуклое, полиномиальное степени C_n^2 и имеет порядок $1+n$.

Возникает вопрос о возможности построения полиномиальных представлений $E_{nk}(G)$ низших степеней, в том числе выпуклых.

Для того, чтобы построить такие f-представления множества $E_{nk}(G)$, перепишем условие (24) в эквивалентной форме $\Omega = \{\psi : X = \{x\} = G\}$ или $\forall x \in E_{nk}(G)$:

$$\{x_1,...,x_n\} = \{g_1,...,g_n\} . \tag{44}$$

Представим условие (44) в эквивалентной форме:

$$(x - g_1) \cdot ...(x - g_n) = 0, \ x \in R. \tag{45}$$

Действительно, решение уравнения (45) по переменной x предполагает нахождение множества $x_1,...,x_n$ его корней, которые в точности образуют мультимножество G, обеспечивая тем самым выполнение условия (44). Перепишем уравнение (45) в терминах его корней, воспользовавшись формулой Виета:

$$x^n - (g_1 + ... + g_n)x^{n-1} + (g_1 g_2 + ... + g_{n-1} g_n)x^{n-2} + ... + (-1)^n g_1 \cdot g_2 \cdot ... g_n = 0.$$

В результате имеем систему из n уравнений:

$$\sum_{\omega \subseteq J_n, |\omega| = j} \prod_{i \in \omega} x_i = \sum_{\omega \subseteq J_n, |\omega| = j} \prod_{i \in \omega} g_i, \ j \in J_n, \tag{46}$$

решением которой будет множество n действительных чисел $x_1,...,x_n$ вида (44) и только они. С другой стороны, рассматривая каждое из уравнений системы (46) как уравнение поверхности в R^n, связывающее координаты вектора $x = (x_1,...,x_n)$, получаем, что полным решением этой системы будет в точности общее $\mathcal{C}$-множество перестановок $E_{nk}(G)$. Соответственно, (46) – это строгое полиномиальное представление этого множества (далее $E_{nk}(G)$.FR2)), степень и порядок которого совпадают с размерностью пространства и равно n.

Введем обозначения для элементарных симметрических полиномов

$$u_j(x) = \sum_{\omega \subseteq J_n, |\omega| = j} \prod_{i \in \omega} x_i, \ j \in J_n \tag{47}$$

и перепишем ($E_{nk}(G)$.FR2) в виде

$$u_j(x) = u_j(g) \ , j \in J_n. \tag{48}$$

Заметим, что для больших размерностей преставление ($E_{nk}(G)$.FR2) становится неприменимым из-за трудоемкости вычисления значений функций (47). В самом деле, пусть, к примеру, n – четно и рассматривается $j = \frac{n}{2}$-ое уравнение этой системы. Оно содержит $C_n^{n/2}$ слагаемых, каждое из которых, в свою очередь, состоит из $\frac{n}{2}$ множителей, то есть вычисление значения функции $u_{\frac{n}{2}}(x)$ в точке требует выполнения неполиномиального по n числа операций.

Построим еще одно функциональное представление множества $E_{nk}(G)$ на базе ($E_{nk}(G)$.FR2), основанное на известных соотношениях элементарных симметрических полиномов (47) со степенными суммами:

$$q_j(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^j, \ j \in J_n^0, \tag{49}$$

устанавливаемыми с помощью тождеств Ньютона-Жирарда [15]:

$$q_j(x) = j \cdot (-1)^{-j+1} h_j(x) + \sum_{i=1}^{j-1} (-1)^{i-j+1} q_i(x) \cdot h_{j-i}(x) \ , j \in J_n. \tag{50}$$

Применяя рекуррентно формулу (50) к обеим частям (48), получаем $q_j(x) = q_j(g)$, $j \in J_n$ или, учитывая (49),

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^j = \sum_{i=1}^{n} g_i^j, \ j \in J_n. \tag{51}$$

Подобно (46), система уравнений (51) может быть рассмотрена в двух контекстах: первый – как система для определения множества решений уравнения (45); второй – как система, задающая множество поверхностей в пространстве R^n, в пересечении которых образуется в точности множество $E_{nk}(G)$. Таким образом, найдено еще одно f-представление (51) множества $E_{nk}(G)$ (далее ($E_{nk}(G)$.FR3)). Как и ($E_{nk}(G)$.FR2), оно строгое, полиномиальное, а его степень и порядок равны n. В то же время оно обладает видимыми преимуществами по сравнению с ($E_{nk}(G)$.FR2), а именно, простотой входящих в него функций и его выпуклостью в ортанте R_+^n.

Использование понятия евклидовых комбинаторных конфигураций и свойства (44) e-конфигураций перестановок позволило предложить новое, значительно более простое, доказательство следующей теоремы, представленной в [16].

Теорема 2. Каждая из систем уравнений (46), (51) задает строгое функционально-аналитическое представление множества $E_{nk}(G)$.

Сформулируем обобщение теоремы 2.

Теорема 3. Если ξ-биективное отображение между элементами образующего $E_{nk}(G)$ множества $\mathcal{E}$ и множеством $\mathcal{E}'=\{e_1^{'},...,e_k^{'}\}$ действительных чисел, то каждая из систем уравнений

$$\sum_{i=1}^{n}\xi(x_i)^j=\sum_{i=1}^{n}\xi(g_i)^j,\ j\in J_n, \tag{52}$$

$$\sum_{\omega\subseteq J_n,|\omega|=j}\ \prod_{i\in\omega}\xi(x_i)=\sum_{\omega\subseteq J_n,|\omega|=j}\ \prod_{i\in\omega}\xi(g_i),\ j\in J_n \tag{53}$$

задает строгое функционально-аналитическое представление множества $E_{nk}(G)$.

Доказательство. Введем в рассмотрение мультимножество $G'=\{g_1^{'},...,g_n^{'}\}=\{e_1^{'n_1},...,e_k^{'n_k}\}$: $g_i^{'}=\xi(g_i),\ i\in J_n$ и осуществим в (52), (53) следующую замену переменных:

$$x_i^{'}=\xi(x_i),\ g_i^{'}=\xi(g_i),\ i\in J_n;\ e_j^{'}=\xi(e_j),\ j\in J_k. \tag{54}$$

В результате получим две системы уравнений:

$$\sum_{i=1}^{n}x_i^{'j}=\sum_{i=1}^{n}g_i^{'j},\ j\in J_n, \tag{55}$$

$$\sum_{\omega\subseteq J_n,|\omega|=j}\ \prod_{i\in\omega}x_i^{'}=\sum_{\omega\subseteq J_n,|\omega|=j}\ \prod_{i\in\omega}g_i^{'},\ j\in J_n. \tag{56}$$

Согласно теореме 2, система (55) представляет собой ($E_{nk}(G')$.FR2), а (56) – ($E_{nk}(G')$.FR3). С учетом того, что (52), (53) формируется (55), (56) заменами переменных, обратными к (54): $x_i=\xi^{-1}(x_i^{'}),\ g_i=\xi^{-1}(g_i^{'}),\ i\in J_n;\ e_j=\xi^{-1}(e_j^{'}),\ j\in J_k$, имеем

$$x'\in E_{nk}(G')\Leftrightarrow x\in E_{nk}(G),$$

а (52), (53) – это записанные в терминах координат е-конфигурации x представления ($E_{nk}(G')$.FR2), ($E_{nk}(G')$.FR3).

Следствие 1. $\forall a \in R^1$ каждая из следующих систем уравнений

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^j - \sum_{i=1}^{n}(g_i - a)^j = 0,\ j \in J_n,$$

$$\sum_{\omega\subseteq J_n, |\omega|=j}\ \prod_{i\in\omega}(x_i - a)^j - \sum_{\omega\subseteq J_n, |\omega|=j}\ \prod_{i\in\omega}(g_i - a)^j = 0,\ j \in J_n$$

является строгим f-представлением множества $E_{nk}(G)$.

Наконец, введя в рассмотрение функцию $x^r = (x_1^r,...,x_1^r)^T$ покоординатного возведения вектора в степень $r \in R^1$, f-представление (51) может быть записано в векторной форме:

$$x^{jT} \cdot \mathbf{e} = g^{jT} \cdot \mathbf{e},\ j \in J_n, \tag{57}$$

где $\mathbf{e}$ – единичный вектор. Тогда, возвращаясь к исходной задаче (20), (22), (23), (25) на комбинаторных конфигурациях, получаем, что условие (20) может быть записано в виде

$$\phi(\pi)^{jT} \cdot \mathbf{e} = g^{jT} \cdot \mathbf{e},\ j \in J_n. \tag{58}$$

В результате исходная задача сводится к поиску экстремума функции $f(\bar{\mathbf{a}},\pi)$ в области, заданной функциональными ограничениями (23), (58). Переменными в ней по условию являются $n \cdot s$ координат векторов исходного множества $\bar{A}$, а также $n \cdot m$ координат векторов (13), составляющих конфигурацию π. В целом эта задача оптимизации имеет размерность $n(s+m)$. В то же время задача евклидовой комбинаторной оптимизации (29), (30), (57) имеет размерность $n(s+1)$, поскольку переменными в ней являются координаты векторов исходного множества и координаты x. Также она сформулирована как задача математического программирования, решив которую одним из методов дискретного программирования [17–20] будет найдена не только оптимальная е-конфигурация x^*, но и оптимальная комбинаторная конфигурация π^* вида (10).

5. Применение результатов в задачах размещения

Пусть множество m-мерных объектов $\{O_i\}_{i\in J_n}$ с известными метрическими характеристиками размещаются в области $O_0 \subset R^m$ с фиксированными параметрами размещения. Необходимо найти параметры размещения объектов O_i, $i \in J_n$, а также метрические характеристики области размещения, при которых достигается экстремум функции f и при этом объекты размещения попарно не пересекаются и расположены в области размещения.

Построим математическую модель данной задачи как задачи на множестве евклидовых конфигураций перестановок. Исходным множеством будут служить векторы параметров размещения, а результирующим – различные векторы метрических характеристик объектов размещения. Пусть $\beta_i = (\beta_{1i},...,\beta_{mi})^T$ – вектор метрических характеристик объекта O_i $(i \in J_n)$, тогда для построения результирующего множества B вида (2) выделим основу из мультимножества $\mathbf{G} = \{\beta_i\}_{i \in J_n}$ метрических характеристик объектов размещения и осуществим присвоение $B = S(B')$.

Учитывая наличие области размещения O_0, нумерацию объектов будем осуществлять с нуля – $\{O_i\}_{i \in J_n^0}$, где $J_n^0 = J_n \cup \{0\}$, и именно они будут служить исходным множеством для формирования конфигураций. Параметрами векторов (14) будут параметры размещения объектов, иначе говоря, координаты их полюсов.

Согласно условию задачи, параметры размещения области O_0 заданы, остальные должны быть найдены, таким образом формула (14) приобретает вид

$$a_0 = (a_{10},...,a_{s0})^T \in R^s,\ \bar{a}_i = (\bar{a}_{1i},...,\bar{a}_{si})^T \in R^s,\ i \in J_n,$$

где s – число параметров размещения, $\bar{a}_0 \in O_0$ – полюс области размещения, $\{a_i\}_{i \in J_n}$ – полюса объектов размещения. В то же время формула (15) преобразуется в

$$\bar{b}_0 = \left(\bar{b}_{10},...,\bar{b}_{m0}\right)^T \in R^s,\ b_l = \left(b_{1l},...,b_{ml}\right)^T \in R^m,\ l \in J_k,$$

где m – количество метрических характеристик, которые должны быть найдены только для области размещения, остальные фиксированы.

Задача (16), (20), (21) преобразуется в

$$\pi^* = arg\ min\ f(a_0, \bar{\mathbf{a}}, \pi), \tag{59}$$

$$\pi \in \Pi(\bar{b}_0, \mathbf{b}), \tag{60}$$

$$f_i\left(a_0, \bar{\mathbf{a}}, \pi\right) \le 0,\ i \in J_t, \tag{61}$$

где $\pi = \begin{pmatrix} a_0 & \bar{a}_1 & ... & \bar{a}_n \\ \bar{b}_0 & b_{j_1} & ... & b_{j_n} \end{pmatrix} = \left[\bar{b}_{j_0}, b_{j_1}, ..., b_{j_n}\right]$.

Здесь система ограничений (61) включает два блока – условия попарного непересечения объектов размещения:

$$\Phi^{O_{i'} O_{i''}} \ge 0,\ 1 \le i' < i'' \le n \tag{62}$$

и условия их размещения в области O_0:

$$\Phi^{O_0^* O_{i'}} \ge 0,\ i' \in J_n, \tag{63}$$

где O_0^* – дополнение области размещения, $\Phi^{[.]}$ – фи-функция [21]. В терминах метрических характеристик и параметров размещения условия (62), (63) могут быть представлены в виде

$$\Phi(\bar{a}_{i'}, b_{i'}, \bar{a}_{i''}, b_{i''}) \ge 0,\ 1 \le i' < i'' \le n, \tag{64}$$

$$\Phi'(a_0, \bar{b}_0, \bar{a}_{i'}, b_{i'}) \ge 0,\ i' \in J_n. \tag{65}$$

Формализуем ограничение (60), переписав его следующим образом:

$$\pi \in P_{nk}(\mathbf{G}), \tag{66}$$

$$b_0^{min} \le \bar{b}_0 \le b_0^{max}, \tag{67}$$

где $\mathbf{G}$ – мультимножество метрических характеристик, а $\left[b_0^{min}, b_0^{max}\right] \subset R_+^m$ – параллелепипед, в пределах которого могут изменяться метрические характеристики области O_0.

Теперь можно осуществить переход к рассмотрению общего множества е-конфигураций перестановок по вышеприведенной схеме и задаче евклидовой комбинаторной оптимизации на нем. Мы же предложим математическую оптимизационную модель на евклидовом комбинаторном множестве $P_{nk}(\mathbf{G})$ с использованием его f-представления вида (58), которое, с учетом (27), представим в виде

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi^j(\pi_i) = \sum_{i=1}^{n} \varphi^j(\beta_i),\ j \in J_n. \tag{68}$$

Получили модель оптимизации (59), (64), (65), (67), (68) смешанно-комбинаторного типа, в которой переменными являются и метрические характеристики, и параметры размещения объектов, а также метрические характеристики области. За счет условия (68) допустимым решением этой задачи будет допустимое размещение объектов заданных изначально размеров. Искусственное его добавление позволяет существенно, а именно в $\left|P_{nk}(\mathbf{G})\right| = \dfrac{n!}{n_1! \cdot \ldots \cdot n_k!}$ раз, увеличить область поиска оптимального решения по сравнению с традиционными постановками задач размещения, в которых метрические характеристики объектов фиксированы [14, 21], и, соответственно, увеличить вероятность получения более точного решения при применении приближенных методов. Также это демонстрирует, как практически может быть применен метод искусственного расширения пространства [22–24] для решения реальных задач.

Предложенный подход к построению оптимизационных моделей на множествах комбинаторных конфигураций как задач оптимизации на множествах евклидовых комбинаторных конфигураций может быть применен к другим классам е-конфигураций, таким как множества евклидовых конфигураций размещений и перестановок со знаком, а также специальным классам множеств е-конфигураций перестановок, размещений, перестановок со знаком [9] и др. При этом для построения f-представлений этих множеств могут быть применены результаты работ [16, 25–30].

6. Выводы

В данной статье предложен новый подход к построению функционально-аналитических представлений образов евклидовых комбинаторных множеств, основанный на применении понятия евклидовой комбинаторной конфигурации как отображения конечного множества в точку евклидова арифметического пространства. Данный подход применен к общему евклидову множеству перестановок и его отдельным классам для построения непрерывных функциональных представлений, что позволяет применение методов непрерывной оптимизации к решению дискретных задач на этих множествах.

Построена обобщенная модель оптимизации на множествах комбинаторных конфигураций в смысле Бержа с участием как исходного, так и результирующего множества. Для тех из них, результирующие множества которых представляют собой векторы одной размерности, построена эквивалентная модель на множестве евклидовых комбинаторных конфигураций с использованием полученных непрерывных функциональных представлений.

Построена модель размещения геометрических объектов с одинаковым числом метрических характеристик как задача оптимизации на множестве евклидовых комбинаторных конфигураций, где исходным множеством выступают векторы параметров размещения, а результирующим – векторы метрических характеристик. Данная модель позволяет варьирование множества переменных характеристик, в результате чего она охватывает как традиционную модель размещения объектов, где метрические характеристики объектов размещения фиксированы, так и случай, когда все или часть из них переменные, где сходимость к допустимой точке обеспечивается дополнительными ограничениями, а оптимизация проводится на образе общего евклидова множества перестановок.

Область применения результатов работы может быть расширена на другие классы евклидовых комбинаторных множеств, а также другие задачи геометрического проектирования и оптимального планирования.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Reye T. Die Geometrie der Lage / Reye T. – Leipzig: Baumgärtnerś Buchhandlung, 1892. – 343 p.
2. Gropp H. Configurations between geometry and combinatorics / H. Gropp // Discrete Applied Mathematics. – 2004. – Vol. 138, N 1. – P. 79 – 88.
3. Grunbaum B. Configurations of Points and Lines / Grunbaum B. – Providence, R.I: American Mathematical Society, 2009. – 399 p.
4. Berge C. Principes de combinatoire / Berge C. – Paris: Academic Press, 1968. – 146 p.
5. Гуляницкий, Л.Ф. До формалізації та класифікації задач комбінаторної оптимізації / Л.Ф. Гуляницкий // Теорія оптимальних рішень. – 2008. – № 7. – С. 45 – 49.
6. Донець Г.П. Екстремальні задачі на комбінаторних конфігураціях / Г.П. Донець, Л.М. Колєчкіна. – Полтава, 2011. – 328 с.
7. Сачков В.Н. Комбинаторные методы дискретной математики / Сачков В.Н. – М.: Наука, 1975. – 319 с.
8. Стоян Ю.Г. Описание классов комбинаторных конфигураций на основе отображений / Ю.Г. Стоян, И.В. Гребенник // Доклады НАН Украины. – 2008. – № 10. – С. 28 – 31.
9. Стоян Ю.Г. Евклидовы комбинаторные конфигурации: монография / Стоян Ю.Г., Яковлев С.В., Пичугина О.С. – Харьков: Константа, 2017. – 404 с.
10. Яковлев С.В. Задачи оптимизации на евклидовых комбинаторных конфигурациях и их свойства / С.В. Яковлев, О.С. Пичугина // Питання прикладної математики і математичного моделювання. – 2017. – Вип. 17. – С. 278 – 263.
11. Яковлев С.В. Свойства задач комбинаторной оптимизации на полиэдрально-сферических множествах / С.В. Яковлев, О.С. Пичугина // Кибернетика и системный анализ. – 2018. – № 1. – С. 111 – 124.
12. Harris J. Algebraic Geometry: A First Course, 1st ed. / Harris J. – N.Y.: Springer-Verlag, 1992. – 328 p.
13. Стоян Ю.Г. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації / Ю.Г. Стоян, О.О. Ємець. – К., 1993. – 188 с.
14. Стоян Ю.Г. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования / Ю.Г. Стоян, С.В. Яковлев. – К., 1986. – 268 с.
15. Seroul R. Programming For Mathematicians / Seroul R. – Berlin, New York: Springer, 2000. – 431 p.
16. Пичугина О.С. Функционально-аналитические представления общего перестановочного множества / О.С. Пичугина, С.В. Яковлев // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2016. – № 4 (79). – С. 27 – 38.
17. Баранов В.И. Экстремальные комбинаторные задачи и их приложения / В.И. Баранов, Б.С. Стечкин. – [2-е изд.]. – Москва: Физматлит, 2004. – 240 с.
18. Korte B. Combinatorial Optimization: Theory and Algorithms / B. Korte, J. Vygen. – Heidelberg, New York: Springer, 2012. – 660 p.
19. Pardalos P.M. Handbook of combinatorial optimization / Pardalos P.M, Du D-Z., Graham R.L. – New York, 2013. – 3409 p.
20. Сергиенко И.В. Задачи дискретной оптимизации: проблемы, методы решения, исследования / И.В. Сергиенко, В.П. Шило. – К.: Наукова думка, 2003. – 261 с.
21. Chernov N. Mathematical model and efficient algorithms for object packing problem / N. Chernov,

Y. Stoyan, T. Romanova // Comput. Geom. – 2010. – Vol. 43, N 5. – P. 535 – 553.
22. Pichugina O.S. On Lifting Approaches To Geometric Design Problems / O.S. Pichugina, T.E. Romanova, S.V. Yakovlev // Тези доповідей XIV міжнар. наук.-практ. конф. «Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем (MPZIS-2016)», (Дніпропетровськ, 16–18 листопада 2016 р.). – Дніпропетровськ, 2016. – С. 154 – 155.
23. Yakovlev S. V. The Method of Artificial Space Dilation in Problems of Optimal Packing of Geometric Objects / S.V. Yakovlev // Cybern. Syst. Anal. – 2017. – Vol. 53, N 5. – P. 725 – 731.
24. Яковлев С.В. О комбинаторной структуре задач оптимального размещения геометрических объектов / С.В. Яковлев // Доклады НАН Украины. – 2017. – № 9. – С. 26 – 32.
25. Pichugina O. Convex extensions and continuous functional representations in optimization, with their applications / O. Pichugina, S. Yakovlev // J. Coupled Syst. Multiscale Dyn. – 2016. – N 2 (4). – P. 129 – 152.
26. Pichugina O. Continuous Representations and Functional Extensions in Combinatorial Optimization / O. Pichugina, S. Yakovlev // Cybernetics and Systems Analysis. – 2016. – N 6 (52). – P. 921 – 930.
27. Pichugina O. Continuous Approaches to the Unconstrained Binary Quadratic Problems / O. Pichugina, S. Yakovlev // Mathematical and Computational Approaches in Advancing Modern Science and Engineering. – Switzerland: Springer, 2016. – P. 689 – 700.
28. Pichugina O. Continuous representation techniques in combinatorial optimization / O. Pichugina, S. Yakovlev // IOSR Journal of Mathematics. – 2017. – N 2 (13), Ver. V. – P. 12 – 25.
29. Pichugina O. Optimization on Polyhedral-Spherical Sets: Theory and Applications / O. Pichugina, S. Yakovlev // IEEE First Ukraine Conference on Electrical and Computer Engeneering (UKRCON). – 2017. – P. 1167 – 1174.
30. Пичугина О.С. Оптимизация на общем множестве перестановок со знаком / О.С. Пичугина // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2017. – № 4. – С. 74 – 96.

Стаття надійшла до редакції 10.01.2018