УДК 536.24

М.Г. БЕРДНИК*

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ І МЕТОД РІШЕННЯ УЗАГАЛЬНЕНОЇ ЗАДАЧІ НЕЙМАНА ТЕПЛООБМІНУ ІЗОТРОПНОГО ТІЛА ОБЕРТАННЯ, ЯКЕ ОБЕРТАЄТЬСЯ

*Державний вищий навчальний заклад «Національний гірничий університет», м. Дніпро, Україна

Анотація. *Розроблена математична модель температурних розподілів у ізотропного тіла обертання з відомим рівнянням твірної лінії, яке обмежене двома торцями і бічною поверхнею обертання, яке обертається з постійною кутовою швидкістю навколо осі OZ, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла, у вигляді крайової задачі Неймана математичної фізики для гіперболічного рівняння теплопровідності. Розроблено нове інтегральне перетворення, за допомогою якого знайдено температурне поле тіла у вигляді збіжних ортогональних рядів за функціями Фур'є.*
Ключові слова: *крайова задача Неймана, узагальнене рівняння переносу енергії, інтегральне перетворення Лапласа, час релаксації.*

Аннотация. *Разработана математическая модель температурных распределений в изотропном теле вращения с известным уравнением образующей линии, которое ограничено двумя торцами и боковой поверхностью вращения, вращающегося с постоянной угловой скоростью вокруг оси OZ, с учетом конечной скорости распространения тепла в виде краевой задачи Неймана математической физики для гиперболического уравнения теплопроводности. Разработано новое интегральное преобразование, с помощью которого найдено температурное поле тела в виде сходящихся ортогональных рядов по функциям Фурье.*
Ключевые слова: *краевая задача Неймана, обобщенное уравнение переноса энергии, интегральное преобразование Лапласа, время релаксации.*

Abstract. *It was developed a mathematical model of temperature distributions in an isotropic rotation body is developed with a known equation of the generating line, which is bounded by two ends and a lateral surface of revolution which rotates at a constant angular velocity around the OZ axis, taking into account the finite velocity of heat propagation, in the form of the Neumann boundary value problem of mathematical physics for the hyperbolic heat conduction equation. A new integral transformation is developed with the help of which the temperature field of the body is found in the form of convergent orthogonal series with respect to the Fourier functions.*
Keywords: *the Neumann boundary value problem, the generalized energy transfer equation, the Laplace integral transformation, the relaxation time.*

1. Вступ

Проблема дослідження температурних полів у тілах обертання постійно привертає увагу дослідників, так як багато елементів машин і механізмів (супутники, сортопрокатні валки, ротори енергетичних агрегатів, дискові гальма та ін.) мають їх форму і працюють в умовах інтенсивного нагріву. Більшість робіт у теорії теплопровідності присвячено вивченню та аналізу температурного поля в нерухомих тілах обертання. У деяких роботах вивчається температурне поле в тілах при рухомих джерелах тепла, в інших роботах досліджується температурне поле в тілах з рухомими межами.

При високих інтенсивних нестаціонарних процесах, що спостерігаються, наприклад, при вибухах, надзвукових потоках, великих швидкостях обертання вплив скінченності величини швидкості поширення тепла на теплообмін стає помітним [1–2]. Ось чому до числа проблем, що представляють великий теоретичний і практичний інтерес, відноситься проблема вивчення температурного поля в тілах обертання, які обертаються навколо своєї осі, з урахуванням скінченності величини швидкості поширення тепла.

Як показує огляд літератури, теплообмін у тілах, які обертаються, вивчено на даний час ще недостатньо [1]. Відзначається, що чисельні методи дослідження нестаціонарних неосесиметричних задач теплообміну циліндрів, які обертаються, не завжди є ефективними, якщо мова йде про обчислення при великих швидкостях обертання.

Тому для вирішення крайових задач, які виникають при математичному моделюванні тривимірних нестаціонарних процесів теплообміну в тілах, які обертаються, будемо застосовувати інтегральні перетворення.

Метою роботи є розробка нової узагальненої математичної моделі температурних розподілів у ізотропного тіла обертання у вигляді крайової задачі Неймана математичної фізики для рівняння теплопровідності та розв'язання отриманої крайової задачі.

2. Постановка задачі

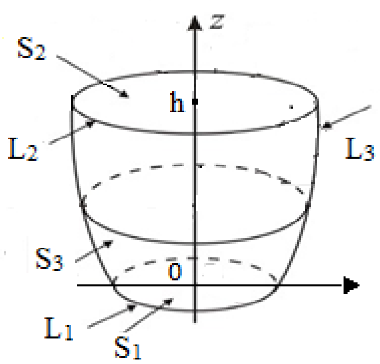

Рис. 1. Тіло обертання з твірною лінією $r = \xi(z)$

Розглянемо розрахунок температурного поля тіла обертання (рис. 1) з твірною лінією $r = \xi(z)$ у циліндричній системі координат (ρ, φ, z). Ізотропне тіло обертання обмежене двома торцями S_1 $(z = 0)$, S_2 $(z = 1)$ і бічною поверхнею обертання S_3, яка перетинається з поверхнями S_j уздовж ліній L_j, $j = 1,2$.

Тіло обертається навколо осі OZ з постійною кутовою швидкістю ω, а швидкість поширення тепла є відомою величиною. Теплофізичні властивості тіла не залежать від температури, а внутрішні джерела тепла відсутні. У початковий момент часу температура тіла постійна G_0, а на бічній поверхні тіла відоме значення теплового потока $V(\varphi, z)$. На торцях відомі значення теплового потоку $G_1(r,\varphi)$ і $G_2(r,\varphi)$ при $z = 0$ і $z = h$ відповідно.

3. Розв'язок задачі

У [1] отримано узагальнене рівняння переносу енергії для рушійного елемента суцільного середовища з урахуванням скінченності величини швидкості поширення тепла. Згідно з [1], узагальнене рівняння балансу енергії твердого тіла, яке обертається, з постійною кутовою швидкістю ω навколо осі OZ, теплофізичні властивості якого не залежать від температури, а внутрішні джерела тепла відсутні, приймає вигляд

$$\gamma\,\mathrm{c}\left\{\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{t}} + \omega\frac{\partial T}{\partial \varphi} + \tau_r\left[\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \omega\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi \partial t}\right]\right\} = \lambda\left[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right], \qquad (1)$$

де γ – щільність середовища, c – питома теплоємність, λ – коефіцієнт теплопровідності, $T(\rho, \varphi, z, t)$ – температура середовища, t – час, τ_r – час релаксації.

Математично задача визначення температурного поля циліндра складається в інтегруванні диференціального рівняння теплопровідності (1) в області $D = \{(\rho, \varphi, z, t) | \rho \in (0, \xi(z)), \varphi \in (0, 2\pi), \mathrm{z} \in (0,1), \mathrm{t} \in (0, \infty)\}$, що з урахуванням прийнятих допущень запишеться у виді

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \omega\frac{\partial \theta}{\partial \varphi} + \tau_r\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \tau_r\omega\frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi \partial t} = \frac{a}{R^2}\left[\frac{\partial^2 \theta}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \theta}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi^2} + \chi\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}\right] \qquad (2)$$

з початковими умовами

$$\theta(\rho,\varphi,z,0)=0, \quad \frac{\partial\theta(\rho,\varphi,z,0)}{\partial t}=0 \tag{3}$$

і граничними умовами

$$\int_0^t \left.\frac{\partial\theta}{\partial\rho}\right|_{\rho=\varsigma(z)} e^{\frac{\zeta-t}{\tau_r}}\,d\zeta=G(\varphi,z), \tag{4}$$

$$\int_0^t \left.\frac{\partial\theta}{\partial z}\right|_{z=0} e^{\frac{\zeta-t}{\tau_r}}\,d\zeta=\Theta(\rho,\varphi), \quad \int_0^t \left.\frac{\partial\theta}{\partial z}\right|_{z=1} e^{\frac{\zeta-t}{\tau_r}}\,d\zeta=\Lambda(\rho,\varphi), \tag{5}$$

де $\theta=\dfrac{T(\rho,\varphi,z,t)-G_0}{T_{\max}-G_0}$ – відносна температура тіла, $a=\dfrac{\lambda}{c\gamma}$ – коефіцієнт температуропровідності, $R=\max\limits_z\{\xi(z)\}$, $\chi=\left(\dfrac{R}{h}\right)^2$, $\rho=\dfrac{r}{R}$, $z=\dfrac{z}{h}$, $\varsigma(z)=\dfrac{\xi(z)}{R}$,

$$G(\varphi,z),\Theta(\rho,\varphi),\Lambda(\rho,\varphi)\in C(0,2\pi),$$

$$G(\varphi,z)=\frac{V(\varphi,z)\tau_r}{\lambda(T_{\max}-G_0)},\ \Theta(\rho,\varphi)=\frac{G_1(\rho,\varphi)\tau_r}{\lambda(T_{\max}-G_0)},\ \Lambda(\rho,\varphi)=\frac{G_2(\rho,\varphi)\tau_r}{\lambda(T_{\max}-G_0)}.$$

Тоді рішення крайової задачі (2)–(5) $\theta(\rho,\varphi,z,t)$ є двічі неперервно диференційованим по ρ і φ, z, один раз по t в області D і неперервним на $\overline{D}$ [3], тобто $\theta(\rho,\varphi,z,t)\in C^{2,1}(D)\cap C(\overline{D})$, а функції $G(\varphi,z),\Theta(\rho,\varphi),\Lambda(\rho,\varphi)$, $\theta(\rho,\varphi,z,t)$ можуть бути розкладені в комплексний ряд Фур'є [3]:

$$\begin{Bmatrix}\theta(\rho,\varphi,z,t)\\ G(\varphi,z)\\ \Theta(\rho,\varphi)\\ \Lambda(\rho,\varphi)\end{Bmatrix}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\begin{Bmatrix}\theta_n(\rho,z,t)\\ G_n(z)\\ \Theta_n(\rho)\\ \Lambda_n(\rho)\end{Bmatrix}\cdot\exp(in\varphi), \tag{6}$$

де
$$\begin{Bmatrix}\theta_n(\rho,z,t)\\ G_n(z)\\ \Theta_n(\rho)\\ \Lambda_n(\rho)\end{Bmatrix}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\begin{Bmatrix}\theta(\rho,\varphi,z,t)\\ G(\varphi,z)\\ \Theta(\rho,\varphi)\\ \Lambda(\rho,\varphi)\end{Bmatrix}\cdot\exp(-in\varphi)d\varphi,$$

$$\theta_n(\rho,z,t)=\theta_n^{(1)}(\rho,z,t)+i\theta_n^{(2)}(\rho,z,t),\quad G_n(z)=G_n^{(1)}(z)+iG_n^{(2)}(z),$$
$$\Theta_n(\rho)=\Theta_n^{(1)}(\rho)+i\Theta_n^{(2)}(\rho),\qquad \Lambda_n(\rho)=\Lambda_n^{(1)}(\rho)+i\Lambda_n^{(2)}(\rho).$$

З огляду на те, що $\theta(\rho,\varphi,z,t)$ функція дійсна, обмежимося надалі розглядом $\theta_n(\rho,z,t)$ для $n=0,1,2,\ldots$, тому що $\theta_n(\rho,z,t)$ і $\theta_{-n}(\rho,z,t)$ будуть комплексно спряженими [3]. Підставляючи значення функцій з (6) у (2)–(5), у результаті одержимо систему диференціальних рівнянь:

$$\frac{\partial\theta_n^{(i)}}{\partial t}+\vartheta_n^{(i)}\theta_n^{(m_i)}+\tau_r\frac{\partial^2\theta_n^{(i)}}{\partial t^2}+\tau_r\vartheta_n^{(i)}\frac{\partial\theta_n^{(m_i)}}{\partial t}=\frac{a}{R^2}\left[\frac{\partial^2\theta_n^{(i)}}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\theta_n^{(i)}}{\partial\rho}-\frac{n^2}{\rho^2}\theta_n^{(i)}+\chi\frac{\partial^2\theta_n^{(i)}}{\partial z^2}\right] \tag{7}$$

з початковими умовами

$$\theta_n^{(i)}(\rho, z, 0) = 0, \quad \frac{\partial \theta_n^{(i)}(\rho, z, 0)}{\partial t} = 0 \tag{8}$$

і граничними умовами

$$\int_0^t \left. \frac{\partial \theta_n^{(i)}}{\partial \rho} \right|_{\rho=\varsigma(z)} e^{\frac{\zeta - t}{\tau_r}} d\zeta = G_n^{(i)}(z), \tag{9}$$

$$\int_0^t \left. \frac{\partial \theta_n^{(i)}}{\partial \rho} \right|_{z=0} e^{\frac{\zeta - t}{\tau_r}} d\zeta = \Theta_n^{(i)}(\rho), \qquad \int_0^t \left. \frac{\partial \theta_n^{(i)}}{\partial \rho} \right|_{z=1} e^{\frac{\zeta - t}{\tau_r}} d\zeta = \Lambda_n^{(i)}(\rho), \tag{10}$$

де $\vartheta_n^{(1)} = -\omega n,\ \vartheta_n^2 = \omega n,\ \mathrm{m}_1 = 2,\ \mathrm{m}_2 = 1,\ i = 1,2$.

Застосовуємо до системи диференціальних рівнянь (7) з умовами (8)–(10) інтегральне перетворення Лапласа [3]:

$$\tilde{f}(s) = \int_0^\infty f(\tau) e^{-s\tau}\, \mathrm{d}\tau .$$

У результаті одержуємо систему диференціальних рівнянь:

$$s\tilde{\theta}_n^{(i)} + \vartheta_n^{(i)}\left(\tilde{\theta}_n^{(m_i)} + \tau_r s \tilde{\theta}_n^{(m_i)}\right) + \tau_r s^2 \tilde{\theta}_n^{(i)} = \frac{a}{R^2}\left[\frac{\partial^2 \tilde{\theta}_n^{(i)}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tilde{\theta}_n^{(i)}}{\partial \rho} - \frac{n^2}{\rho^2}\tilde{\theta}_n^{(i)} + \chi \frac{\partial^2 \tilde{\theta}_n^{(i)}}{\partial z^2}\right] \tag{11}$$

з граничними умовами

$$\left. \frac{\partial \tilde{\theta}_n^{(i)}}{\partial \rho} \right|_{\rho=\varsigma(z)} = \tilde{G}_n^{(i)}(z), \tag{12}$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{\theta}_n^{(i)}}{\partial z} \right|_{z=0} = \tilde{\Theta}_n^{(i)}(\rho), \qquad \left. \frac{\partial \tilde{\theta}_n^{(i)}}{\partial z} \right|_{z=1} = \tilde{\Lambda}_n^{(i)}(\rho), \tag{13}$$

де $\tilde{G}_n^{(i)}(z) = G_n^{(i)}(z)\left(1 + \frac{1}{s\tau_r}\right);\ \tilde{\Theta}_n^{(i)}(\rho) = \Theta_n^{(i)}(\rho)\left(1 + \frac{1}{s\tau_r}\right);\ \tilde{\Lambda}_n^{(i)}(z) = \Lambda_n^{(i)}(z)\left(1 + \frac{1}{s\tau_r}\right)$, $(i = 1, 2)$.

Для розв'язання крайової задачі (11)–(13) застосовуємо інтегральне перетворення:

$$\overline{f}(\mu_{n,k}) = \iint_{\mathrm{D}} Q(\mu_{n,k}, \rho, z) \cdot \rho \cdot \mathrm{f}(\rho, z) d\sigma . \tag{14}$$

Власні функції $Q(\mu_{n,k}, \rho, z)$ і власні значення $\mu_{n,k}$ знаходяться із розв'язку задачі Штурма-Ліувілля:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial Q}{\partial \rho} - \frac{n^2}{\rho^2} Q + \mu^2{}_{n,k} \cdot Q + \chi \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} = 0, \tag{15}$$

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \rho} \right|_{\rho=\varsigma(z)} = 0, \quad \left. \frac{\partial \theta}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \theta}{\partial z} \right|_{z=1} = 0 . \tag{16}$$

Власні функції $Q(\mu_{n,k},\rho,z)$ і власні значення $\mu_{n,k}$ задачі Штурма-Ліувілля (15)–(16) знаходяться за формулами, приведеними в [4], а формула оберненого перетворення має вигляд

$$\mathrm{f}(\rho,z)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{Q(\mu_{n,k},\rho,z)}{\left\|Q(\mu_{n,k},\rho,z)\right\|^2}\,\overline{f}(\mu_{n,k})\,. \tag{17}$$

Застосовуємо до системи диференціальних рівнянь (11) з граничними умовами (12)–(13) інтегральне перетворення [14]. В результаті одержуємо систему алгебраїчних рівнянь відносно $\tilde{\overline{\theta}}_n^{(i)}$:

$$s\tilde{\overline{\theta}}_n^{(i)}+\vartheta_n^{(i)}\left(\tilde{\overline{\theta}}_n^{(m_i)}+\tau_r s\tilde{\overline{\theta}}_n^{(m_i)}\right)+\tau_r s^2\tilde{\overline{\theta}}_n^{(i)}=q_{n,k}\left(\frac{\tilde{\Omega}_{\mathrm{n,k}}^{(\mathrm{i})}}{\mu^2{}_{n,k}}-\tilde{\overline{\theta}}_n^{(i)}\right), \tag{18}$$

де $\tilde{\Omega}_{\mathrm{n,k}}^{(\mathrm{i})}=\int_0^1\xi(z)\cdot Q(\mu_n,\xi(z),z)\cdot\tilde{G}_n^{(i)}(z)dz+\chi\oint_L\rho\left(Q(\mu_{n,k},\rho,z)\frac{\partial\tilde{\theta}_n^{(i)}}{\partial z}-\tilde{\theta}_n^{(i)}\frac{\partial Q(\mu_{n,k},\rho,z)}{\partial z}\right)d\rho$,

$i=1,2$; $q_{n,k}=\dfrac{\mathrm{a}}{\mathrm{R}^2}\mu^2{}_{n,k}$.

Криволінійний інтеграл обчислюється по замкненому додатно орієнтованому контуру (рис. 2):

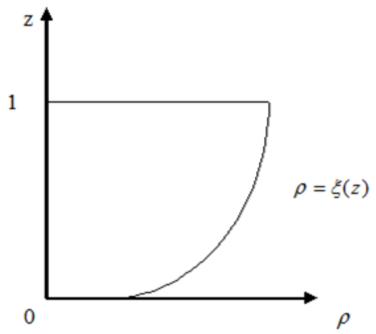

Рис. 2. Замкнутий контур з твірною лінією $r=\xi(z)$

Розв'язавши систему рівнянь (18), одержуємо

$$\tilde{\overline{\theta}}_n^{(i)}=\alpha_{n,k}\frac{\tilde{\Omega}_{\mathrm{n,k}}^{(\mathrm{i})}\left(\tau_r s^2+s+\mathrm{q_{n,k}}\right)+(-1)^{i+1}\omega n\tilde{\Omega}_{\mathrm{n,k}}^{(m_i)}(1+s\tau_r)}{\left(\tau_r s^2+s+\mathrm{q_{n,k}}\right)^2+\omega^2 n^2(1+s\tau_r)^2}, \tag{19}$$

де $\alpha_{n,k}=\dfrac{\mathrm{a}}{\mathrm{R}^2}$, $(i=1,2)$.

Застосовуючи до зображення функцій (19) формули оберненого перетворення Лапласа [5], одержуємо оригінали функцій:

$$\begin{gathered}\overline{\theta}_n^{(1)}\left(\mu_{n,k},t\right)=\sum_{j=1}^{2}\zeta_{n,k}\left(s_j\right)\left\{\tilde{\Omega}_{\mathrm{n,k}}^{(1)}\left(s_j\right)\cdot\left[\left(2\tau_r s_j+1\right)+\tau_r\omega ni\right]+\tilde{\Omega}_{\mathrm{n,k}}^{(2)}\left(s_j\right)\cdot\left[\tau_r\omega n-\left(2\tau_r s_j+1\right)i\right]\right\}\cdot\\ \left(e^{s_j t}-1\right)+\sum_{j=3}^{4}\zeta_{n,k}\left(s_j\right)\cdot\left\{\tilde{\Omega}_{\mathrm{n,k}}^{(1)}\left(s_j\right)\cdot\left[\left(2\tau_r s_j+1\right)-\tau_r\omega ni\right]+\tilde{\Omega}_{\mathrm{n,k}}^{(2)}\left(s_j\right)\cdot\left[\tau_r\omega n+\left(2\tau_r s_j+1\right)i\right]\right\}\\ \left(e^{s_j t}-1\right),\end{gathered} \tag{20}$$

$$\bar{\theta}_n^{(2)}\left(\mu_{n,k},t\right)=\sum_{j=1}^{2}\zeta_{n,k}\left(s_j\right)\cdot\left\{\tilde{\Omega}_{\mathrm{n,k}}^{(2)}\left(s_j\right)\cdot\left[\left(2\tau_r s_j+1\right)+\tau_r\omega ni\right]-\tilde{\Omega}_{\mathrm{n,k}}^{(1)}\left(s_j\right)\cdot\left[\tau_r\omega n-\left(2\tau_r s_j+1\right)i\right]\right\}\cdot$$

$$\left(e^{s_j t}-1\right)+\sum_{j=3}^{4}\zeta_{n,k}\left(s_j\right)\cdot\left\{\tilde{\Omega}_{\mathrm{n,k}}^{(2)}\left(s_j\right)\cdot\left[\left(2\tau_r s_j+1\right)-\tau_r\omega ni\right]-\tilde{\Omega}_{\mathrm{n,k}}^{(1)}\left(s_j\right)\cdot\left[\tau_r\omega n+\left(2\tau_r s_j+1\right)i\right]\right\} \quad (21)$$

$$\left(e^{s_j t}-1\right),$$

де $\zeta_{n,k}(s_j)=\dfrac{0,5s_j^{-1}\alpha_{n,k}}{\left(2\tau_r s_j+1\right)^2+\left(\tau_r\omega n\right)^2}$, а значення s_j для $j=1,2,3,4$ визначаються за формулами

$$s_{1,2}=\frac{\left(\tau_r\omega ni-1\right)\pm\sqrt{\left(1+\tau_r\omega ni\right)^2-4\tau_r q_{n,k}}}{2\tau_r},\quad s_{3,4}=\frac{\left(\tau_r\omega ni+1\right)\pm\sqrt{\left(1-\tau_r\omega ni\right)^2-4\tau_r q_{n,k}}}{2\tau_r}.$$

Таким чином, з урахуванням формул обернених перетворень (6) і (17) одержуємо температурне поле тіла обертання, яке обертається з постійною кутовою швидкістю ω навколо осі OZ, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла:

$$\theta(\rho,\varphi,z,t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty}\left[\bar{\theta}_n^{(1)}(\mu_{n,k},t)+i\cdot\bar{\theta}_n^{(2)}(\mu_{n,k},t)\right]\frac{Q(\mu_{n,k},\rho,z)}{\left\|Q(\mu_{n,k},\rho,z)\right\|^2}\right\}\cdot\exp(in\varphi),$$

де значення $\bar{\theta}_n^{(1)}(\mu_{n,k},t)$ і $\bar{\theta}_n^{(2)}(\mu_{n,k},t)$ визначаються за формулами (20), (21).

4. Висновки

У статті за допомогою розробленого нового інтегрального перетворення знайдено температурне поле ізотропного тіла обертання, яке обертається з постійною кутовою швидкістю ω навколо осі OZ, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла, у вигляді збіжних ортогональних рядів за функціями Фур'є. Знайдений розв'язок узагальненої крайової задачі теплообміну ізотропного тіла обертання, яке обертається, з урахуванням скінченності величини швидкості поширення тепла може знайти застосування при моделюванні температурних полів, які виникають у багатьох технічних системах (супутники, сортопрокатні валки, ротори енергетичних агрегатів, дискові гальма та ін.).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бердник М.Г. Математичне моделювання температурного поля в циліндрі, який обертається, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла / М.Г. Бердник // Питання прикладної математики і математичного моделювання. – Д.: РВВ ДНУ, 2005. – С. 37 – 44.
2. Конет І.М. Гіперболічні крайові задачі в необмежених тришарових областях / І.М. Конет, М.П. Ленюк. – Львів, 2011. – 48 с. – (Препр. / НАН України Ін-т прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача; 01.11).
3. Маркович Б.М. Рівняння математичної фізики / Маркович Б.М. – Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2010. – 384 с.
4. Шайдуров В.В. Многосеточные методы конечных элементов / Шайдуров В.В. – М.: Наука, 1989. – 288 с.
5. Лопушанська Г.П. Перетворення Фур'є, Лапласа: узагальнення та застосування / Лопушанська Г.П., Лопушанський А.О., М'яус О.М. – Львів: ЛНУ ім. Івана Франка, 2014. – 152 с.

Стаття надійшла до редакції 09.10.2017