

УДК 53.01:53.05+519.2

И.И. ГОРБАНЬ*

ИЗМЕРЕНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН ПРИ НАРУШЕНИИ СТАТИСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ СРЕДНЕГО

*Институт проблем математических машин и систем НАН Украины, г. Киев, Украина

Анотація. Запропоновано нову методику вимірювання фізичних величин на великих інтервалах спостереження при порушенні статистичної стійкості середнього. Продемонстровано явні переваги нової методики на конкретному прикладі.

Ключові слова: порушення статистичної стійкості, вимірювання, теорія гіпервипадкових явищ, похибка вимірювання.

Аннотация. Предложена новая методика измерения физических величин на больших интервалах наблюдения при нарушении статистической устойчивости среднего. Продемонстрированы явные преимущества новой методики на конкретном примере.

Ключевые слова: нарушение статистической устойчивости, измерение, теория гиперслучайных явлений, погрешность измерения.

Abstract. A new technique for measuring of physical quantities at large observation intervals in violation of the statistical stability of the average is proposed. Obvious advantages of the new technique are shown by way of example.

Keywords: violation of statistical stability, measurement, theory of hyper-random phenomena, measurement error.

1. Введение

Измерения физических величин осуществляют различными способами с использованием разных моделей измерения. Одним из наиболее распространенных является способ прямых измерений с многократными независимыми наблюдениями [1]. Согласно ему, результат измерения y_N (детерминированная оценка) измеряемой величины a формируется путем усреднения множества результатов конкретных однократных независимых измерений x_1, x_2, \dots, x_N :

$$y_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n. \quad (1)$$

Теоретическое обоснование этого способа базируется на идеализированном представлении о физическом феномене статистической устойчивости, предполагающем существование сходимости реальных статистик.

При использовании этого способа исходят из предположения, что измеряемая величина a имеет конкретное значение, результаты однократных измерений описываются независимыми случайными величинами X_1, X_2, \dots, X_N ¹ с математическими ожиданиями

¹Здесь и далее под случайной величиной понимается неопределенная величина, характеризующаяся определенной функцией распределения. Неопределенные величины, у которых отсутствует вероятностная мера, случайными не считаются.

$m_{x_1}, m_{x_2}, \dots, m_{x_N}$ и конечными дисперсиями $D_{x_1}, D_{x_2}, \dots, D_{x_N}$, а среднее математических ожиданий $m_{xN} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N m_{x_n}$ сходится к некоторому числу m_x .

Тогда с увеличением количества однократных измерений N средняя дисперсия $D_y = \frac{1}{N^2} \sum_{n=1}^N D_{x_n}$ случайной оценки $Y_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X_n$ уменьшается, и среднее Y_N сходится по вероятности к m_x : $\lim_{N \rightarrow \infty} P\{|Y_N - m_x| > \varepsilon\} = 0$ (закон больших чисел, теорема Чебышева).

Исследования на больших интервалах наблюдения динамики изменения статистик физических величин разной физической природы показывают (см., например, [2–20]), что предположение о сходимости реальных статистик не находит экспериментального подтверждения. Это означает, что феномен статистической устойчивости не является идеальным: в реальном физическом мире имеют место нарушения статистической устойчивости.

Хотя на небольших интервалах наблюдения (при небольшом количестве однократных измерений N) дисперсии статистик уменьшаются при увеличении объема данных, на больших интервалах наблюдения эта тенденция не сохраняется: дисперсии либо перестают изменяться, либо начинают возрастать [16–19]. Эту особенность реальных статистик необходимо учитывать при проведении измерений.

В настоящее время исследования феномена статистической устойчивости проводятся в рамках физико-математической теории гиперслучайных явлений [16–19], ориентированной на учет нарушений статистической устойчивости реальных физических явлений (событий, величин, процессов и полей). Под гиперслучайным явлением (событием, величиной или функцией) подразумевается множество случайных явлений (событий, величин или функций), зависящих от условий (параметра) $g \in G$. Для каждой отдельной случайной составляющей гиперслучайного явления определена вероятностная мера, а для условий g мера не определена.

В монографиях [16–19] разработана методика оценки интервалов статистической устойчивости статистик (в частности, методика оценки интервала статистической устойчивости среднего), на которых возможно корректное применение классических методов математической статистики и вне которых применение этих методов оказывается необоснованным.

На основе этой методики предложен способ статистических измерений физической величины при нарушениях статистической устойчивости. Он позволяет оценивать интервал, в котором находится измеряемая величина, в предположении, что измеряемая величина не изменяется, а статистические условия непредсказуемо изменяются в различных сериях измерений. Точность таких измерений определяется параметрами изменения условий измерения [21].

Для нужд практики особый интерес представляет другая задача подобного рода, а именно: измерение физической величины, медленно изменяющейся в широких пределах по априорно неизвестному детерминированному закону, при воздействии аддитивных помех, которые, хотя и изменяются статистически непредсказуемым образом, но в рамках рассматриваемого интервала наблюдения остаются статистически устойчивыми и описываются случайными моделями.

Целью настоящей статьи является представление методики проведения таких измерений.

2. Исходные предположения

Будем считать, что измеряемая физическая величина $a(t)$ медленно изменяется во времени t по неизвестному закону. Случайная помеха $W(t)$ аддитивная, имеет нулевое математическое ожидание и описывается некоторым неизвестным законом распределения.

Измерения проводятся в равноотстоящие моменты времени $t_n = \Delta t n$ ($n = \overline{1, N}$) на интервале наблюдения $T = \Delta t(N - 1)$, где Δt – интервал дискретизации.

При рассмотрении случайной выборки результат измерения, соответствующий t_n -му моменту времени, описывается выражением $X_n = a_n + W_n$, а при рассмотрении конкретной выборки – выражением $x_n = a_n + w_n$, где a_n – значение измеряемой величины в t_n -й момент времени.

Элементы случайной выборки X_n, X_m ($n \neq m$) независимы. Помеха статистически устойчива по отношению к среднему $V_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N W_n$. Это означает, что при $N \rightarrow \infty$ математическое ожидание выборочной дисперсии выборочного среднего $\bar{D}_{V_N} = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N (V_n - \bar{m}_{V_N})^2$ стремится к нулю [17, 19], где $\bar{m}_{V_N} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N V_n$.

Результаты измерения статически неустойчивы по отношению к среднему Y_N . Это означает, что при $N \rightarrow \infty$ математическое ожидание выборочной дисперсии выборочного среднего $\bar{D}_{Y_N} = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N (Y_n - \bar{m}_{Y_N})^2$ к нулю не стремится, где $\bar{m}_{Y_N} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N Y_n$.

Спектр колебаний измеряемой величины сосредоточен в низкочастотной области в полосе $[0, F]$.

Интервал статистической устойчивости среднего τ существенно меньше интервала наблюдения T . В случае конкретной выборки под оценкой интервала статистической устойчивости τ^* подразумевается интервал, на котором оценка параметра статистической неустойчивости $\mu_N^* = \sqrt{\gamma_N^* / (1 + \gamma_N^*)}$ не выходит за пределы верхней границы устойчивости

$\mu_{0N}^+ = \sqrt{\gamma_{0N}^+ / (1 + \gamma_{0N}^+)}$ [17, 19]. В этих формулах $\gamma_N^* = \frac{\bar{D}_{y_N}}{\bar{D}_{x_N}}$ – оценка параметра статистической

неустойчивости $\gamma_N = \frac{M[\bar{D}_{Y_N}]}{M[\bar{D}_{X_N}]}$, $\bar{D}_{y_N} = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N (y_n - \bar{m}_{y_N})^2$, $\bar{D}_{x_N} = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N (x_n - y_N)^2$,

$M[\cdot]$ – оператор математического ожидания, $\bar{D}_{X_N} = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N (X_i - Y_N)^2$, $\gamma_{0N}^+ = \gamma_{0N} + \varepsilon \sigma_{\gamma_{0N}^*}$,

γ_{0N} – параметр статистической неустойчивости γ_N , соответствующий эталонному статистически устойчивому гауссовскому белому шуму, ε – параметр, определяющий величину доверительного интервала, $\sigma_{\gamma_{0N}^*}$ – среднеквадратическое отклонение (СКО) величины

$\gamma_{0N}^* = \bar{D}_{Y_N} / M[\bar{D}_{X_N}]$, соответствующей эталонному статистически устойчивому гауссовскому белому шуму.

3. Идея методики

Главная идея методики – использование предположения, что спектр колебаний измеряемой величины отличается от спектра помехи, а именно: спектр колебаний измеряемой величины сосредоточен в области низких частот, а спектр помехи – в области высоких частот.

Заметим, что в рамках принятых предположений использование формулы (1) ограничено интервалом статистической устойчивости τ . Применение этой формулы на большом интервале наблюдения, существенно превосходящем τ , некорректно, так как в этом случае необходимо учитывать нарушения статистической устойчивости.

Нарушения статистической устойчивости могут быть вызваны разными причинами [16–19]. Одна из наиболее существенных – наличие в спектре колебаний низкочастотных составляющих, резко нарастающих с уменьшением частоты (когда спектральная плотность мощности возрастает быстрее, чем $1/f$, где f – частота).

В рассматриваемой модели измерения предполагается, что низкочастотные составляющие спектра связаны с медленными изменениями во времени измеряемой величины. При удалении этих колебаний из спектра процесс становится статистически устойчивым. С учетом этого обстоятельства оценка измеряемой величины a_N в t_N -й момент времени

$$y_N^* = a_N^* + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (x_n - a_n^*), \quad (2)$$

где a_n^* – обратное дискретное преобразование Фурье дискретного спектра $\dot{A}_F(k)$ колебания x_n в полосе $[0, F]$, где k – номер спектрального отсчета.

Выборочное СКО погрешности измерения

$$\sigma_{x-a}^* = \sqrt{\frac{1}{(N-1)N} \sum_{n=1}^N (x_n - a_n^*)^2}. \quad (3)$$

Поэтому с учетом погрешности измерения измеряемая величина

$$a_N = a_N^* \pm \varepsilon \sigma_{x-a}^*. \quad (4)$$

4. Методика измерений

Методика измерения включает следующие этапы.

1. Удостовериться, что исходные предположения адекватно отражают реальные условия проведения измерений, в частности, результаты однократных измерений независимы (или, как минимум, некоррелированы²).

2. Оценить величину интервала статистической устойчивости τ^* исходного дискретного процесса x_1, x_2, \dots, x_N (определить критическую величину интервала наблюдения, при котором оценка параметра статистической неустойчивости μ_N^* достигает границы μ_N^+).

3. Если оценка интервала статистической устойчивости τ^* существенно меньше интервала наблюдения T , перейти к этапу 4. В противном случае применить стандартную методику измерения с использованием формулы (1).

² В случае коррелированности результатов однократных измерений осуществить их декорреляцию, например, путем прореживания.

4. Вычислить дискретный спектр $\dot{A}(k)$ колебания x_n ($n = \overline{1, N}$). По нему вычислить оценку спектральной плотности мощности $S_x(k)$ путем скользящего усреднения спектральных отсчетов.

5. В области низких частот оценки спектральной плотности мощности $S_x(k)$ найти верхнюю границу полосы частот F , удовлетворяющую следующему условию: в полосе $[0, F]$ с понижением частоты оценка $S_x(k)$ возрастает быстрее, чем $1/f$.

6. Из спектра процесса вырезать полосу $[0, F]$ и оценить величину интервала статистической устойчивости τ^* (согласно пункту 2). Если полученная оценка примерно равна интервалу наблюдения T , то перейти к этапу 7. В противном случае постепенно увеличивать верхнюю границу полосы частот F до тех пор, пока τ^* не станет примерно равной интервалу наблюдения T .

7. По части $\dot{A}_F(k)$ спектра $\dot{A}(k)$ колебания x_n ($n = \overline{1, N}$), соответствующего полосе $[0, F]$, рассчитать зависимость a_n^* ($n = \overline{1, N}$).

8. По формуле (3) рассчитать выборочное СКО погрешности измерения и, задавшись параметром ε , определяющим величину доверительного интервала, найти результат измерения по формуле (4).

5. Пример применения методики

На рис. 1 *а* изображено колебание магнитного поля Земли за 13 лет наблюдения в районе Москвы (с 1997 по 2009 гг.) [22], на рис. 2 – его спектр, а на рис. 3 *а* – изменение во времени выборочного среднего этого колебания.

На рис. 3 *б* изображено изменение во времени откорректированного выборочного среднего исследуемого колебания (без пятидесяти первых спектральных отсчетов), а на рис. 4 изображены зависимости оценок параметра статистической неустойчивости μ^* от времени наблюдения для исследуемого процесса при отсутствии (*а*) и наличии (*б*) коррекции спектра.

На рис. 5 *а* представлен результат измерения магнитной индукции магнитного поля по стандартной методике (с использованием формулы (1)), игнорирующей нарушение статистической устойчивости среднего, а на рис. 5 *б* – по новой методике, учитывающей нарушение статистической устойчивости.

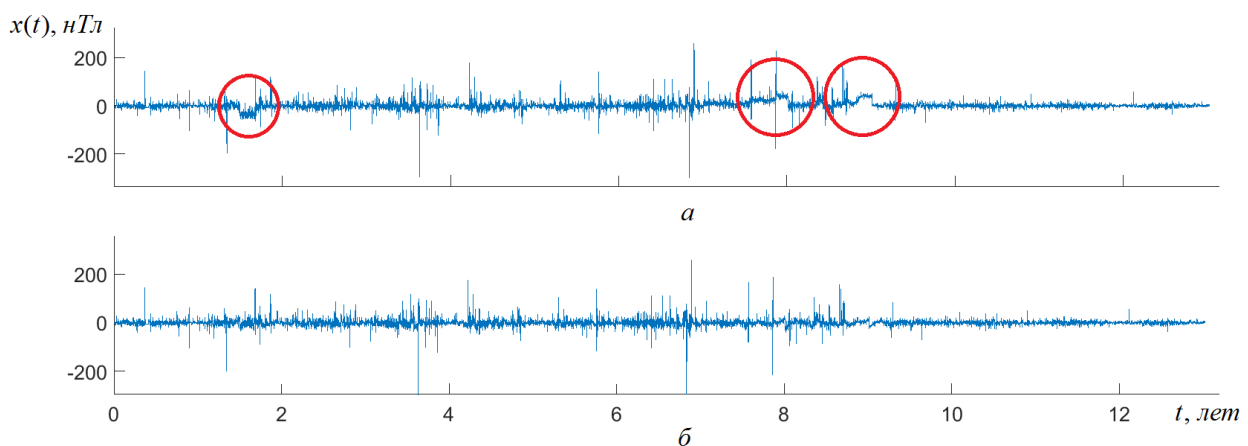


Рис. 1. Колебание магнитного поля при отсутствии (*а*) и наличии (*б*) коррекции спектра

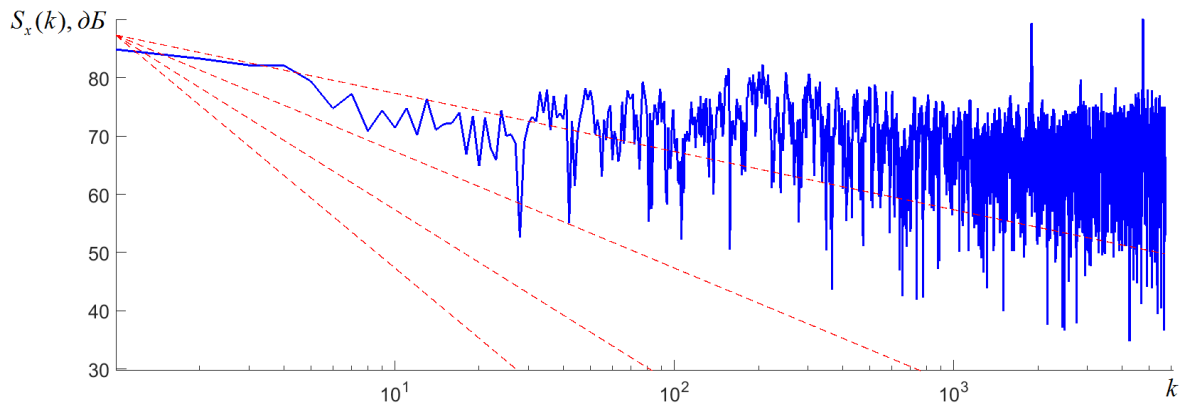


Рис. 2. Оценка спектральной плотности мощности колебания магнитного поля (ломаная линия). Для сравнения пунктирными прямыми линиями изображены сдвинутые вдоль оси ординат до уровня первого отсчета спектра исследуемого колебания графики степенных функций $1/k^\beta$, $\beta = \overline{1,4}$

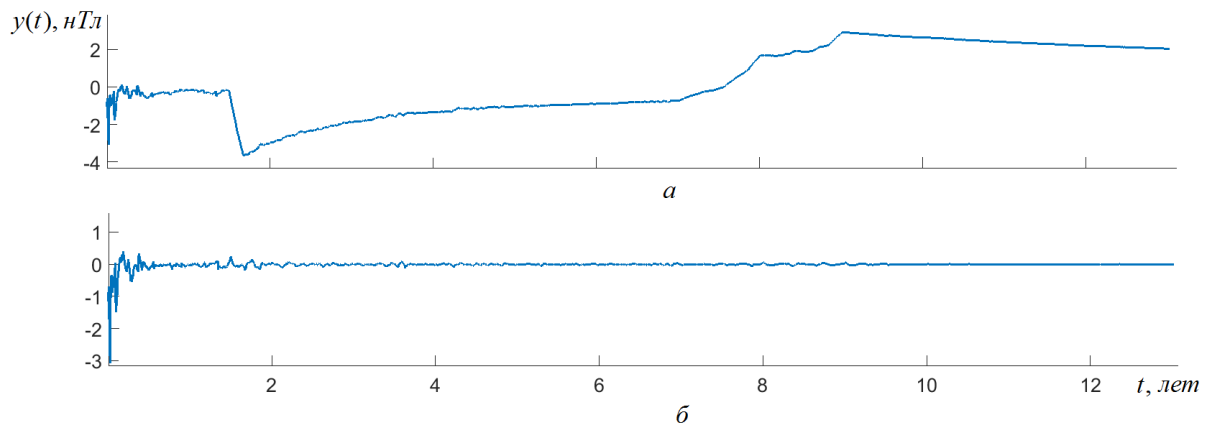


Рис. 3. Изменения во времени выборочного среднего колебания магнитного поля при отсутствии (а) и наличии коррекции (б) спектра

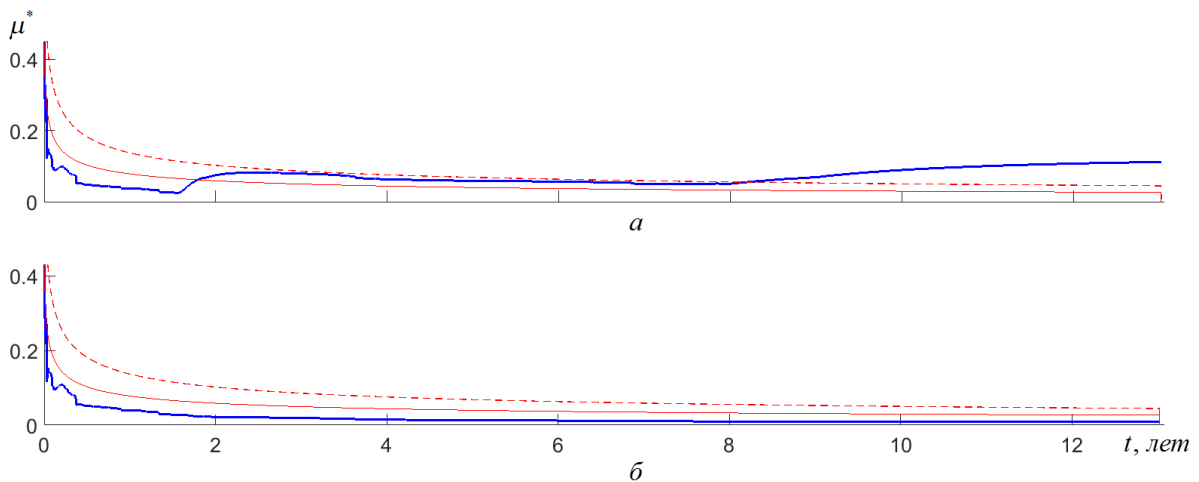


Рис. 4. Зависимости оценок параметра статистической неустойчивости μ^* от интервала наблюдения при отсутствии (а) и наличии коррекции (б) спектра. Непрерывные жирные линии соответствуют исследуемому процессу, тонкие непрерывные линии – эталонному статистически устойчивому гауссовскому белому шуму, а тонкие пунктирные линии – верхней границе устойчивости

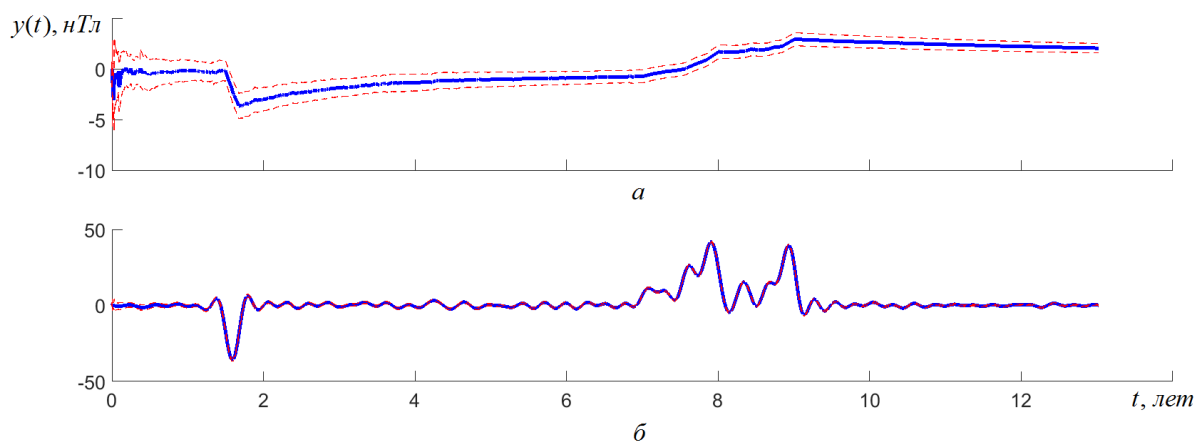


Рис. 5. Результаты измерения магнитного поля по стандартной методике, игнорирующей нарушение статистической устойчивости среднего (а), и новой методике, учитывающей нарушение статистической устойчивости (б) (доверительный интервал изображен пунктирными линиями)

Анализ колебания, представленного на рис. 1 а, показывает, что в районе 1,6 года, 7,9 лет и 9 лет от начала наблюдения происходили отклонения магнитной индукции от среднего уровня, которые сохранялись на протяжении нескольких месяцев. Величины отклонений достигали 40 единиц. Эти отклонения хорошо видны на рис. 3 а, 5 а и 5 б.

Из кривых на рис. 4 а следует, что исследуемое колебание статистически неустойчивое по отношению к среднему. Интервал статистической устойчивости составляет примерно 2 года. На рис. 2 видно, что на начальном участке спектра (от первого до примерно пятидесятого спектрального отсчета) интенсивность спектральных составляющих быстро нарастает с понижением частоты, что и обуславливает нарушение статистической устойчивости. Как следует из рис. 4 б, при исключении этого участка спектра процесс становится статистически устойчивым.

Сравнение результата измерения по стандартной методике (рис. 5 а) с результатом по новой методике (рис. 5 б) демонстрирует явное преимущество последней. Стандартная методика дает неприемлемо искаженный результат измерения магнитного поля. Отклонения от среднего уровня порядка 40 единиц, наблюдаемые на рис. 1 а, искаженно представлены на рис. 5 а в виде отклонений на уровне нескольких единиц. Причем эти отклонения сопровождаются длительными переходными процессами, отсутствующими на рис. 1 а. Новая же методика детально отслеживает быструю динамику изменения среднего уровня колебания, фиксируя при этом в районе 1,6 года, 7,9 лет и 9 лет отклонения от среднего уровня, достигающие примерно 40 единиц. Следует заметить, что использование новой методики обеспечивает пренебрежимо малую погрешность измерения (см. рис. 5 б).

6. Выводы

1. Предложена новая методика измерения физических величин на больших интервалах наблюдения при нарушении статистической устойчивости среднего.
2. На примере измерения магнитного поля Земли продемонстрировано явное преимущество новой методики по сравнению со стандартной методикой, игнорирующей нарушения статистической устойчивости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. ГОСТ 8.207-76. Прямые измерения с многократными наблюдениями. Методы обработки результатов наблюдений. Основные положения. – М.: ИПК Издательство стандартов, 2001. – 8 с.

2. Горбань И.И. Статистическая устойчивость колебаний температуры воздуха и осадков в районе Москвы / И.И. Горбань // Математичні машини і системи. – 2011. – № 3. – С. 97 – 104.
3. Горбань И.И. Оценка статистической устойчивости колебаний температуры воздуха и осадков в Москве и Киеве / И.И. Горбань, Ю.Г. Коровицкий // Тезисы докладов Шестой науч.-практ. конф. с междунар. участием «Математическое и имитационное моделирование систем. МОДС '2011». – Киев, 2011. – С. 23 – 26.
4. Горбань И.И. Нарушение статистической устойчивости физических процессов / И.И. Горбань // Математичні машини і системи. – 2010. – № 1. – С. 171 – 184.
5. Горбань И.И. Исследование нарушений статистической устойчивости курса валют / И.И. Горбань // Труды пятой конференции «Математическое и имитационное моделирование систем. МОДС '2010». – К., 2010. – С. 84 – 86.
6. Горбань И.И. Статистическая неустойчивость магнитного поля Земли / И.И. Горбань // Труды шестой дистанционной конференции «Системы поддержки принятия решений. Теория и практика. СППР '2010». – К., 2010. – С. 189 – 192.
7. Горбань И.И. Эффект статистической неустойчивости в гидрофизике / И.И. Горбань // Труды десятой Всероссийской конференции «Прикладные технологии гидроакустики и гидрофизики». – СПб.: Наука, 2010. – С. 199 – 201.
8. Горбань И.И. Статистическая неустойчивость физических процессов / И.И. Горбань // Известия вузов. Радиоэлектроника. – 2011. – Т. 54, № 9. – С. 40 – 52.
9. Исследование статистической устойчивости колебаний температуры шельфовой зоны окраинных морей / И.И. Горбань, Н.И. Горбань, В.В. Новотрясов [и др.] // Труды VII Всероссийского симпозиума «Физика геосфер». – Владивосток, 2011. – С. 542 – 547.
10. Горбань И.И. Исследование статистической устойчивости колебаний температуры и скорости звука в океане / И.И. Горбань, И.О. Ярошук // Тезисы доклада на конференции «КОНСОНАНС-2011». – Киев, 2011. – С. 99 – 104.
11. Горбань И.И. Исследование статистической устойчивости колебаний температуры воздуха и осадков / И.И. Горбань // Труды седьмой дистанционной конференции «Системы поддержки принятия решений. Теория и практика. СППР '2011». – К., 2011. – С. 175 – 178.
12. Горбань И.И. Статистическая устойчивость излучения астрофизических объектов / И.И. Горбань / И.И. Горбань // Математичні машини і системи. – 2012. – № 2. – С. 155 – 160.
13. Горбань И.И. Исследование нарушений статистической устойчивости колебаний скорости ветра в Чернобыле / И.И. Горбань, А.Д. Скорбун // Труды восьмой дистанционной конференции «Системы поддержки принятия решений. Теория и практика. СППР '2012». – К., 2012. – С. 39 – 42.
14. Горбань И.И. Феномен статистической устойчивости / И.И. Горбань // Журнал технической физики. – 2014. – Т. 84, № 3. – С. 22 – 30.
15. Горбань И.И. Теория гиперслучайных явлений: физические и математические основы / Горбань И.И. – К.: Наукова думка, 2011. – 318 с.
16. Горбань И.И. Феномен статистической устойчивости / Горбань И.И. – К.: Наукова думка, 2014. – 444 с.
17. Горбань И.И. Случайность и гиперслучайность / Горбань И.И. – К.: Наукова думка, 2016. – 288 с.
18. Gorban I.I. The Statistical Stability Phenomenon / Gorban I.I. – Springer, 2017. – 362 p.
19. Gorban I.I. Randomness and Hyper-randomness / Gorban I.I. – Springer, 2017. – 256 p.
20. Феномен статистической неустойчивости систем третьего типа-complexity / В.В. Еськов, Т.В. Гавриленко, В.М. Еськов [и др.] // Журнал технической физики. – 2017. – Т. 87, № 11. – С. 1609 – 1614.
21. Горбань И.И. Почему точность измерения физических величин ограничена / И.И. Горбань // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2015. – № 4. – С. 207 – 210.
22. Данные о вариации индукции магнитного поля в районе Москвы. Институт земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн им. Н.В. Пушкова РАН [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://forecast.izmiran.rssi.ru/bankr.htm>.

Стаття надійшла до редакції 27.11.2017