

УДК 004.8:519.85:656.7

Л.Ф. ГУЛЯНИЦЬКИЙ, А.І. ПАВЛЕНКО

МОДЕЛЮВАННЯ ЗАЛЕЖНИХ ВІД ЧАСУ ПРОБЛЕМ ПОШУКУ ОПТИМАЛЬНИХ МАРШРУТІВ: ОГЛЯД

***Анотація.** Розглянуто задачі пошуку оптимальних маршрутів мережами громадського транспорту. Наведено підходи до подання розкладу за допомогою графів у залежних від часу задачах пошуку оптимальних шляхів для залізничних і авіамереж. Проаналізовано типові задачі пошуку оптимальних шляхів у залежних від часу мережах.*

***Ключові слова:** динамічна задача пошуку, найкоротший шлях, оптимальний маршрут, мережі громадського транспорту, time-dependent model, time-expanded model.*

Вступ

Перші електронні системи розкладу з'явилися наприкінці 80-х років минулого століття у Німеччині. До того часу планування маршрутів відбувалось «вручну» з використанням друкованих довідників. Такий підхід прийнятний для невеликих транспортних мереж, проте довідник розкладів німецьких залізниць «Kursbuch» у 1957 році вже налічував 1272 сторінки, що спонукало до розробки більш ефективних пошукових систем [1]. До сучасних представників таких систем належать HAFAS [2], яка використовується багатьма європейськими залізницями, EFA [3], яка в основному використовується локальними перевізниками Європи. Досвід роботи з ними показав, що системи видають задовільні результати в більшості випадків, хоча інколи запропоновані маршрути є неоптимальними. Основною причиною цього явища є використання простих евристичних алгоритмів, які здійснюють частковий перегляд простору розв'язків для отримання результатів за прийнятний час, що не гарантує отримання оптимальних розв'язків. Останніми роками активно ведуться дослідження моделей і алгоритмів розв'язування практичних задач пошуку оптимальних шляхів із врахуванням наявних обмежень. Метою роботи є дослідження підходів до розв'язування типових задач пошуку оптимальних шляхів громадським транспортом з урахуванням розкладу. Для цього розглянуто підходи до подання розкладу руху громадського транспорту у вигляді графа для подальшого застосування розроблених методів пошуку оптимальних шляхів у графах.

Далі наведено огляд підходів до пошуку найкоротших шляхів у заданому графі з урахуванням інформації про розклад руху.

1. Загальна постановка задачі пошуку оптимального шляху громадським транспортом

Зазвичай для таких задач у заданій мережі відомі початковий пункт відправлення P_s та кінцевий P_t і необхідно знайти оптимальний шлях із P_s

в p_i . Причому, якщо для (статичних) мереж автомобільного транспорту поняття оптимальності є доволі прозорим (мінімізація часу подорожі), то для розгалужених мереж громадського транспорту критерій зазвичай включає кілька факторів. Маршрути для громадського транспорту повинні враховувати часові параметри, оскільки шуканий оптимальний шлях залежить від часу його реалізації.

Ключовою відмінністю мереж громадського транспорту від автомобільних є наявність залежності від часу, адже деякі сегменти мережі стають досяжними тільки у визначені моменти часу. Тому початковим завданням при розв'язуванні залежних від часу задач пошуку найкоротших шляхів є подання розкладу у графі задачі. Існують два основні підходи для подання розкладів у мережах – **time-expanded** (розширений за часом) і **time-dependent** (залежний від часу) [4, 5].

Розклад руху транспорту подається множиною *зупинок* (автобусні зупинки, залізничні платформи, аеропорти тощо), множиною *маршрутів слідування* (автобусні, трамвайні, залізничні маршрути тощо). Маршрут слідування – послідовність зупинок, які повинен відвідати транспортний засіб в конкретний час, являє собою множину елементарних сполучень. Елементарне *сполучення* визначається двома зупинками, між якими курсує транспортний засіб, а також часом відправлення і прибуття.

Розклад подамо п'ятіркою $\mathfrak{S} = (\Pi, S, T, \mathfrak{R}, F)$, де $\Pi \subset Z_{\geq 0}$ – період події (визначається як часовий інтервал протягом дня), $Z_{\geq 0}$ – множина цілих невід'ємних чисел, S – множина зупинок (автобусних, аеропортів, залізничних платформ), T – упорядкована множина елементарних сполучень (сегментів) маршруту слідування транспортного засобу, \mathfrak{R} – множина маршрутів слідування, F – множина додаткових переходів (трансферів або пересадок). Елементи $\tau \in \Pi$ називають моментами часу. Кожній зупинці p в маршруті t відповідає час прибуття $\tau_{arr}(t, p) \in \Pi$ і відправлення транспортних засобів $\tau_{dep}(t, p) \in \Pi$, $\tau_{arr}(t, p) \leq \tau_{dep}(t, p)$. Кожний трансфер містить дві зупинки p_1 і p_2 з відповідним заданим часом переходу $l(p_1, p_2)$. Кожній зупинці p відповідає мінімальний час посадки $\tau_{ch}(p)$ (наприклад, процедура посадки на рейс в межах аеропорту займає деякий час).

Елементарні сполучення. Із заданого розкладу \mathfrak{S} , як зазначалося, можна визначити множину елементарних сполучень C . Елементарні сполучення є найменшими елементами, на які можна декомпонувати розклад. Більш формально, елементарне сполучення $c \in C$ є кортежем $c = (t, p_{dep}, p_{arr}, \tau_{dep}, \tau_{arr})$, що позначає проїзд $t \in T$ із зупинки $p_{dep} \in S$ в час $\tau_{dep} \in \Pi$ до зупинки $p_{arr} \in S$ з прибуттям в час $\tau_{arr} \in \Pi$. Для спрощення, функція $x(c)$ визначає компонент x кортежу c (наприклад, $\tau_{dep}(c)$ позначає час відправлення сполучення c).

Маршрути. Результатом роботи алгоритмів пошуку оптимального шляху є множина маршрутів J . Маршрут – впорядкована послідовність

елементарних сполучень (сегментів) і пересадок у певній подорожі. Кожному сегменту послідовності відповідає пара зупинок – посадки і висадки. Маршрут з k сегментами має $k - 1$ трансферів. Маршрутам відповідають деякі критерії оптимальності. Вважатимемо, що маршрут J_1 домінує над J_2 в сенсі заданого критерію ефективності, якщо J_1 не гірший ніж J_2 , $J_1 \preceq J_2$.

На рис. 1 зображено приклад трьох маршрутів із зупинки p_s в p_t . Час відправлення $\tau = 9:00$. Надписи позначають час відправлення і прибуття між деякими сегментами маршрутів слідування. В наступних розділах наведено опис типових задач для подібних розкладів.



Рисунок 1 – Схема трьох маршрутів з зупинки p_s в p_t і часом відправлення $\tau = 9:00$

2. Типові задачі пошуку оптимального шляху громадським транспортом

Наведемо огляд деяких типових задач пошуку маршрутів із урахуванням розкладу громадського транспорту, базуючись на роботах [4, 6, 7].

2.1 Задача пошуку маршруту з найранішим часом прибуття (earliest arrival problem)

Дано розклад громадського транспорту, початковий пункт p_s і кінцевий пункт p_t , час відправлення τ . Необхідно знайти маршрут, який відправляється з пункту p_s не раніше τ і прибуває в p_t якомога раніше. Якщо замість моменту часу задано часовий інтервал, то необхідно знайти усі оптимальні шляхи з відправленням у межах заданого інтервалу. Така задача називається *range problem*. Окрім критерію тривалості маршруту, інколи важливим критерієм є загальна вартість проїзду. Таким чином, намагаються знаходити Паретівську множину маршрутів.

2.2. Задача пошуку маршруту з найменшим загальним часом подорожі і найранішим часом прибуття (tight earliest arrival problem)

На рис. 1 зображено три маршрути з відправленням з 9:00 з однаковим мінімальним часом прибуття в кінцевий пункт о 20:20. Проте на практиці маршрути не вважають рівноцінними, адже в деяких з них є значний час очікування між пересадками, що збільшує загальний час подорожі.

Якщо необхідно знайти маршрут з найранішим часом прибуття і мінімальним часом подорожі, то говорять про *tight earliest arrival problem* – задачу з «найщільнішим» маршрутом і найранішим прибуттям.

Дано розклад громадського транспорту, початковий пункт p_s і кінцевий пункт p_t , час відправлення τ . Необхідно знайти маршрут, який відправляється з p_s якомога пізніше, але не раніше τ , і прибуває в p_t якомога раніше. На рис. 1 найщільніший маршрут – відправитись о 18:45, продовжити подорож з пересадкою о 19:00, пересадкою о 20:00.

Якщо, окрім часу подорожі, необхідно враховувати інші критерії при визначенні оптимального шляху (кількість трансферів, вартість проїзду тощо), то говорять про багатокритеріальну задачу.

2.3. Задача пошуку маршруту в заданому періоді (range problem)

Як вхідні дані замість часу відправлення з початкового пункту задається часовий інтервал, в рамках якого розраховуються оптимальні маршрути. Дано розклад громадського транспорту, початковий пункт p_s і кінцевий пункт p_t , часовий інтервал подорожі $\Delta \subseteq \Pi$. Необхідно знайти маршрут, який відправляється з p_s не раніше τ і прибуває в p_t якомога раніше, тобто необхідно знайти множину оптимальних маршрутів, причому для кожного моменту відправлення $\tau \in \Delta$ існує маршрут $J_\tau \in J$ з відправленням з пункту p_s не раніше τ і прибуттям в p_t якомога раніше. Якщо період подорожі Δ співпадає з періодом розкладу, то говорять про **задачу профілювання (profile problem)**.

2.4. Обернені задачі

Для всіх викладених вище задач можна сформулювати обернені задачі. Наприклад, для задачі пошуку маршруту з найранішим часом прибуття оберненою є **задача з найпізнішим часом відправлення**. Дано розклад руху громадського транспорту, початковий пункт p_s і кінцевий пункт p_t , а також час прибуття τ . Необхідно знайти маршрут, який прибуває в p_t не пізніше τ , а відправляється з p_s якомога пізніше. Аналогічно можна сформулювати інші задачі.

3. Моделі подання графів для задач пошуку оптимальних шляхів на залізниці

Існує два основних підходи до подання розкладу у графі для розв'язування залежних від часу задач – розширений за часом граф (time-expanded) і залежний від часу граф (time-dependent). Ідея першого підходу полягає у створенні вершини для кожної події розкладу (подія – відправлення або прибуття транспорту); це призводить до графів великої розмірності.

У залежному від часу графі сегменти подорожі подаються однією дугою. Для деяких методів пошуку шляхів у графі на етапі будується модель із урахуванням зупинок – так звана модель зупинок (stop model).

3.1. Модель зупинок (Stop Model)

Найпростішою моделлю для подання розкладу є модель зупинок – відображення графа станцій або топологічне подання транспортної мережі. Будується граф $G = (V, A)$, V – множина вершин, A – множина дуг, де кожна вершина з множини V відповідає зупинці $p \in S$ з розкладу. Для спрощення, вважатимемо $p \in V$. В множину A додається дуга $(p_i p_j)$ з вершини p_i в p_j , якщо розклад містить елементарне сполучення з вершини p_i в p_j , тобто якщо існує елементарне сполучення $c \in C$, для якого $p_{dep}(c) = p_i$ і $p_{arr}(c) = p_j$. Вартість $l(p_i, p_j)$ дуги $(p_i p_j)$ – мінімальний час подорожі серед усіх елементарних сполучень з p_i в p_j , тобто:

$$l(p_i, p_j) = \min \{ \delta(\tau_{dep}(c), \tau_{arr}(c)) \mid c \in C \text{ і } p_{dep}(c) = p_i \text{ і } p_{arr}(c) = p_j \},$$

де $\delta(\tau_{dep}(c), \tau_{arr}(c))$ – тривалість руху елементарним сполученням.

Модель зупинок є дуже простою, але, на жаль, вона не враховує часову залежність розкладу. Вартість дуг визначається мінімальним часом подорожі між зупинками, тому знайдені у такому графі найкоротші шляхи є лише нижньою межею для реального часу подорожі. Описані залежні від часу задачі не можуть бути розв'язані з застосуванням моделі зупинок, але її використовують для етапів попередньої обробки з метою пришвидшення пошуку.

3.2. Розширена за часом модель (Time-Expanded Model)

Проста модель. Дано розклад \mathfrak{S} і множину елементарних сполучень C . Для кожного сполучення $c \in C$ будується пара вершин, з'єднаних дугою; $u_{dep}(c)$ і $u_{arr}(c)$ – пункти відправлення і прибуття сполучення c . Вершинам завжди неявно відповідають значення часу $\tau(u)$. В нашому випадку час у вершині відправлення $u_{dep}(c)$ задається часом відправлення відповідного сполучення $\tau_{dep}(c)$, а час у вершині прибуття $u_{arr}(c)$ задається величиною $\tau_{arr}(c)$. Аналогічно, кожній вершині може відповідати значення простою $p(u)$.

Між вершинами $u_{dep}(c)$ і $u_{arr}(c)$ додається дуга $(u_{dep}(c), u_{arr}(c))$. Для кожної зупинки $p \in S$ для врахування можливості здійснення пересадки (очікування) створюються додаткові дуги в порядку зростання часу. Тобто, дуга пересадки (u, v) (або очікування – *transfer arc*) існує між відповідними

вершинами тільки тоді, коли $p(u) = p(v)$, $\tau(u) \leq \tau(v)$ і не існує іншої вершини w , для якої $p(w) = p(u)$ і $\tau(u) < \tau(w) < \tau(v)$. Пересадочним дугам відповідають значення різниці часу інцидентних їм вершин, $l(u, v) = \delta(\tau(u), \tau(v))$. Якщо для деякої зупинки існує кілька сполучень з відправленням в один час, тоді вершини відправлення можна об'єднати в одну. Таким чином, розширений за часом граф G є ациклічним. В тому випадку, коли розклад є періодичним, для кожної зупинки додається дуга (u, v) з найпізнішої до найранішої вершини зупинки, дозволяючи переходити з одного періоду розкладу до іншого. Звичайно, в такому випадку граф стає циклічним.

Зазвичай така модель приводить до дуже великого, але розрідженого графу. На рис. 2 зображено просту розширену за часом мережу з однією зупинкою, чотирма сполученнями для трьох сегментів t_1, t_2, t_3 . Вершина з горизонтальною штриховкою є вершиною прибуття, а вершини з вертикальною штриховкою – відправлення. Вершини зображені в порядку зростання часу зверху донизу.

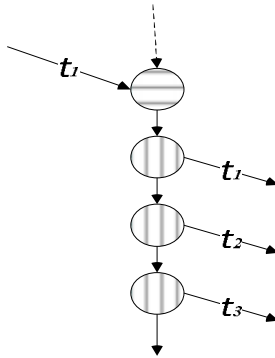


Рисунок 2 – Проста розширена за часом модель графу

Незважаючи на розмірність графу, така модель може застосовуватись для розв'язування задач пошуку оптимальних шляхів класичними методами для графів малих розмірностей.

Реалістична модель. На відміну від простої моделі, в моделі, яка в літературі отримала назву реалістичної моделі, враховується необхідність мінімального часу для пересадки на станціях. Для подання розкладу у вигляді графу використовуються три типи вершин: вершини відправлення $u_{dep}(c)$, прибуття $u_{arr}(c)$ та пересадки $u_{transfer}(c)$. Тобто для кожної події відправлення створюється одна пересадочна вершина $u_{transfer}(c)$, з'єднана з відповідною вершиною відправлення $u_{dep}(c)$ (зупинка, що відповідає вершині пересадки співпадає з зупинкою, що відповідає вершині відправлення $p(u_{transfer}(c)) = p_{dep}(c)$). Вага дуги, що відображує сполучення між пересадочною вершиною і вершиною відправлення, рівна нулю.

Для забезпечення мінімального часу пересадки на станціях створюються додаткові дуги між кожною парою вершин прибуття u_{dep} і вершиною першого можливого трансферу v , причому $\tau(u) + \tau_{transfer}(p) \leq \tau(v)$, де $\tau_{transfer}(p)$ – час пересадки.

Для забезпечення можливості залишатися в тому ж транспортному засобі (наприклад, потязі) на проміжних зупинках створюється додаткова дуга, яка з'єднує вершину прибуття і відповідну вершину відправлення, які відповідають маршруту одного потязу.

На рис. 3 подано реалістичну модель розширеного за часом графу. Він містить такі ж рейси і сполучення, як і на рис. 2. Вершини прибуття позначені горизонтальною штриховкою, вершини відправлення позначені вертикальною штриховкою, пересадочні вершини позначені діагональною штриховкою. Очевидно, що пересадка між t_1 і t_2 неможлива за критерієм мінімального часу пересадки (хоча продовження подорожі рейсом t_1 можливе). Таку ситуацію не можна подати графом простої моделі.

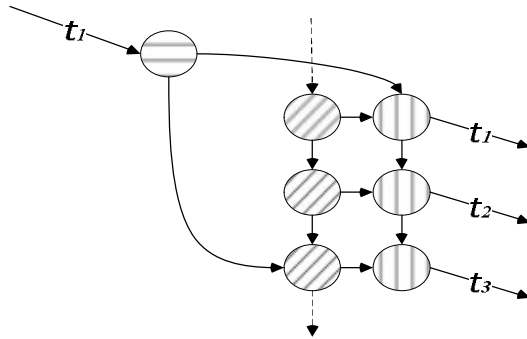


Рисунок 3 – Реалістична модель розширеного за часом графу

Основною перевагою розширеного за часом графу є його незалежність від часу, тобто дуги мають фіксовану вагу. Ця перевага робить можливим застосування класичних методів пошуку найкоротших шляхів.

3.3. Залежна від часу модель (Time-Dependent Model)

У даному підході граф містить по одній вершині на кожен зупинку. Якщо між зупинками є сполучення, то в графі між відповідними вершинами додається дуга. В якості вартості дуг використовуються залежні від часу функції тривалості подорожі (time-dependent travel time functions). Аналогічно попередній моделі, існують два варіанти – проста і реалістична. В реалістичній моделі береться до уваги час пересадок.

3.4. Залежні від часу функції тривалості подорожі (Travel Time Functions)

Ключова ідея залежної від часу моделі (time-dependent model) – побудова залежного від часу графу [8] шляхом комбінації кількох елементарних

сполучень в єдину дугу за допомогою *залежних від часу функцій тривалості (вартості) подорожі*. Вартість дуг, що відображають сполучення, залежить від часу запиту. На рис. 4 зображена функція тривалості подорожі: кожна точка відображує елементарне сполучення; лінійні сегменти (з нахилом -45° до горизонтальної осі) відображують не тільки час подорожі, а і час очікування до наступного відправлення. Введемо простір функцій Φ , який складається з функцій часу подорожей у вигляді: $f: \Pi \rightarrow Z_{\geq 0}$. Кожна функція $f \in \Phi$ переводить *час відправлення* у *час подорожі* (або вартість). Час відправлення обирається з інтервалу Π – період операції у розкладі, час подорожі може приймати довільні невід’ємні цілі числа (з огляду на прибуття після півночі).

Функції розкладу. Таким чином, кожне елементарне сполучення $c \in C$, якому відповідає функція f , створює точку сполучення $q_c = (\tau_{dep}(c), \delta(\tau_{dep}(c), \tau_{arr}(c)))$, причому оцінка f в час відправлення $\tau = \tau_{dep}(c)$ відповідає часу подорожі $f(\tau) = \delta(\tau_{dep}(c), \tau_{arr}(c))$. Для простоти час відправлення і час подорожі точки сполучення q позначимо $\tau_{dep}(q)$ і $\tau_{transfer}(q)$. Нехай P_f – множина точок сполучення функції f . Значення f між послідовними точками сполучення отримують шляхом інтерполяції через очікування. Нехай $\tau \in \Pi$ – довільний час відправлення і q – наступна точка сполучення, тобто точка сполучення з мінімальним $\delta(\tau, \tau_{dep}(q))$. Для визначення значення функції f в час τ застосовують формулу: $f(\tau) = \tau_{transfer}(q) + \delta(\tau, \tau_{dep}(q))$.

Зазначимо, що якщо точки сполучення функції f впорядковані за часом відправлення, оцінка f має трудомісткість $O(\log \|P_f\|)$ при бінарному пошуці та $O(\|P_f\|)$ – при простому лінійному пошуці.

Щоб моделі були коректними, функції часу подорожі повинні задовольняти принципу FIFO ("first in – first out") – "першим пройшов – першим обслуговується". В контексті точок сполучення це інтерпретується так: не повинно існувати жодних послідовних точок сполучень $q_1, q_2 \in P$, таких щоб виконувалась умова $\delta(\tau_{dep}(q_1), \tau_{dep}(q_1)) + \tau_{transit}(q_2) \leq \tau_{transit}(q_1)$. Іншими словами, пропуск q_1 і очікування в пункті q_2 не повинні зменшувати загальний час подорожі.

На рис. 4 зображено вісім точок сполучення. Крайня права точка сполучення порушує властивість FIFO і тому не включається в f .

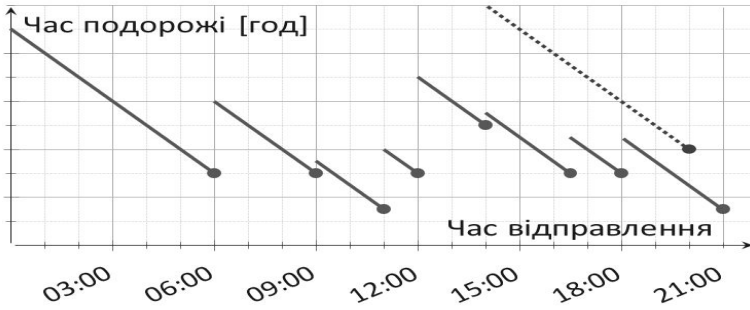


Рисунок 4 – Типова форма подання функції тривалості подорожі

Операцію з'єднання (link operation) двох функцій f_1 і f_2 можна ефективно реалізувати лінійним алгоритмом розгортання (linear sweep algorithm). Для кожної точки сполучення q_1 з f_1 шукається така точка сполучення q_2 з f_2 , щоб мінімізувати $\hat{d} = \delta(\tau_{dep}(q_1) + \tau_{tra}(q_1), \tau_{dep}(q_2))$, і додається точка сполучення $q = (\tau_{dep}(q_1), \hat{d} + \tau_{tra}(q_2))$. Якщо не існує належної q_2 , то додаткова точка сполучення не створюється. Також не додаються точки сполучення, які порушують властивість FIFO.

Операція злиття (merge operation) двох функцій f_1 і f_2 може бути реалізована лінійним пошуком. Результуюча функція базується на об'єднанні $P_{f_1} \cup P_{f_2}$ кожної точки сполучення функцій, окрім тих, що порушують властивості FIFO.

Проста модель. Розглянемо просту залежну від часу модель мережі. Дано розклад \mathfrak{S} і відповідна множина елементарних сполучень C . Модель використовує направлений граф $G = (V, A)$, в якому кожна вершина $u_p \in V$ відповідає зупинці $p \in S$. До множини A додаються дуги (p_1, p_2) тільки в тому випадку, якщо існує елементарне сполучення з p_1 в p_2 , тобто $p_{dep}(c) = p_1$ і $p_{arr}(c) = p_2$. Вартості дуг визначаються в термінах функцій часу подорожі, тобто $l: A \rightarrow F$. Отже, кожна дуга $(p_1, p_2) \in A$ містить саме ті точки сполучення, які відповідають елементарним сполученням з p_1 в p_2 . Точки сполучення, які порушують FIFO властивість, можуть бути відкинуті або розташовані на окремій паралельній дузі. На рис. 5 зображена проста модель графу, залежного від часу з трьома зупинками p_1, p_2, p_3 , а також рейсами r_1, r_2, r_3 .

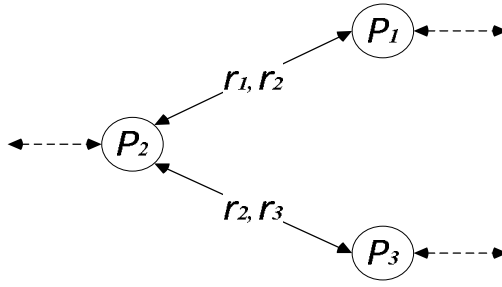


Рисунок 5 – Проста залежна від часу модель

Реалістична модель. Замість створення єдиної вершини для кожної зупинки, в такій моделі створюються декілька. Модель ґрунтується на тому судженні, що пересадки на одному і тому ж рейсі не бувають оптимальними. Таким чином, модель групує елементарні сполучення по рейсу. Нехай \mathfrak{R}_p – множина маршрутів, що проходять через зупинку $p \in S$. В моделі створюються вершини зупинок $p \in V$ (як і раніше), але додатково створюються вершини маршрутів r_p для кожної вершини маршруту з \mathfrak{R}_p .

Для кожного маршруту (рейсу) $r \in \mathfrak{R}$ і двох послідовних задіяних по маршруту зупинок $p_i, p_j \in S$ створюється залежна від часу дуга маршруту $(r_{p_i}, r_{p_j}) \in A$. Залежна від часу функція часу подорожі по створеній дузі містить точку сполучення, причому для кожного її елементарного сполучення $c \in C$ виконуються умови $p_{dep}(c) = p_i$, $p_{arr}(c) = p_j$, $r(c) = r$. Аналогічно до попередніх моделей, не-FIFO точки сполучення відхиляються або розміщуються на окремих паралельних дугах. Для відображення пересадок між різними маршрутами додаються дуги пересадок, які поєднують вершини зупинок і усі відповідні вершини маршруту. Отже, додаються дуги (p, r_p) і (r_p, p) з постійним значенням вартості для кожної зупинки $r_p \in \mathfrak{R}_p$. Модель враховує мінімальний час пересадки, при цьому встановлюється $l(p, r_p) = \tau_{ch}(p)$ для усіх дуг, що ведуть з вершини зупинки до вершин маршруту, де $\tau_{ch}(p)$ – мінімальний час пересадки на зупинці p . Відповідно, $l(r_p, p) = 0$ для усіх дуг, що ведуть з вершин маршруту до вершини зупинки.

На рис. 6 зображена реалістична залежна від часу модель графу. Вершини маршруту позначені кружечками і ромбами, числа над стрілками показують час пересадки на інший маршрут.

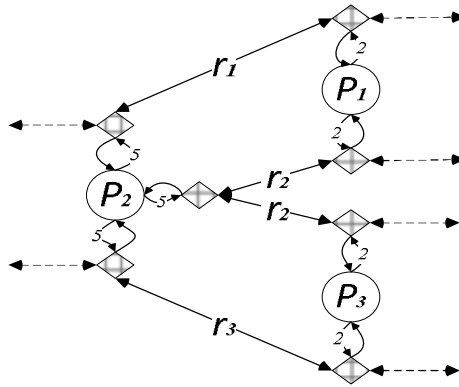


Рисунок 6 – Реалістична модель

3.5. Модель розфарбування (Coloring Model)

Реалістична залежна від часу модель застосовується для гарантії того, що кінцевий маршрут не матиме некоректних пересадок в рамках одного рейсу. Проте таку поведінку можна забезпечити, ввівши поняття конфліктуючих сегментів. Нехай є два елементарні сегменти t_1 і t_2 , які відносяться до зупинки p . Нехай $\tau_{arr}(t_1, p)$ – час прибуття на зупинку p транспортом із сегменту t_1 , $\tau_{dep}(t_2, p)$ – час прибуття на зупинку p транспортом із сегменту t_2 . Ці сегменти є *конфліктуючими* в тому і тільки тому випадку, коли t_2 прибуває після відправлення t_1 або часовий резерв для пересадки менший необхідного. Формально, t_1 і t_2 є конфліктуючими тоді і тільки тоді, коли виконуються нерівності $\tau_{dep}(t_2, p) \geq \tau_{arr}(t_1, p)$ і $\tau_{arr}(t_1, p) + \tau_{ch}(p) \geq \tau_{dep}(t_2, p)$. В такому випадку об'єднання t_1 і t_2 в одній вершині маршруту призведе до появи некоректного маршруту, чого потрібно уникати.

В результаті перевірки конфліктності всіх пар сегментів подорожі, які відповідають зупинці p , створюється ненаправлений граф конфліктів $G^*(p) = (V^*(p), A^*(p))$. Множина вершин $V^*(p) \subseteq T$ містить саме ті сегменти $t \in T$, які відповідають зупинці p . Дві пари вершин $t_i, t_j \in V^*(p)$ поєднуються дугою $\{t_i, t_j\} \in A^*(p)$ тільки тоді, коли t_i і t_j є конфліктуючими.

Розфарбування вершин графу $G^*(p)$ (тобто кожній вершині надається деякий колір), в якому у жодних двох суміжних вершин не співпадає колір, породжує набір вершин зупинки p в моделі графу G . Нехай K – мінімальна кількість унікальних кольорів, використаних для розфарбування $G^*(p)$, тоді для кожного кольору $k = 1, \dots, K$ створюється вершина u в графі

G і до неї додаються ті сегменти, що мають присвоєний колір k в $G^*(p)$. Приклад графу конфліктів і породженого ним підграфу залежної від часу моделі наведено на рис. 7.

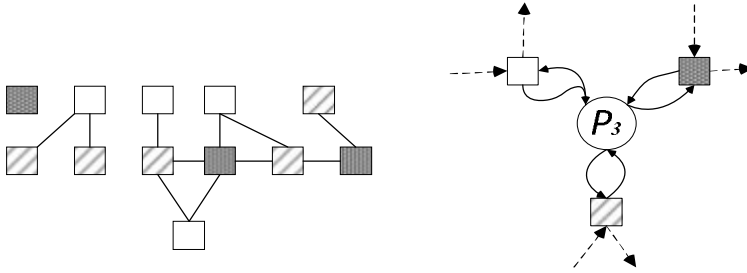


Рисунок 7 – Граф конфліктів (зліва), модель результуючого графу (справа)

4. Моделі подання графів в задачах пошуку оптимальних шляхів авіаперельотів

4.1. Вхідні дані

Подання розкладів для авіамеж подібне мережам залізничних шляхів – в обох випадках використовується періодичний графік руху транспорту, а оптимальні сполучення залежать від часу відправлення. Однак застосування розглянутих в попередньому розділі моделей для авіамеж призводить до побудови надлишково великих графів. На відміну від залізничних мереж, авіамережі сполучення (маршрути) між аеропортами є елементарними, тобто літаки не мають проміжних зупинок в інших аеропортах. Тому було доцільним розробити специфічні моделі для авіа мереж [9].

Авіарозклад подається вектором $\mathfrak{S} = (\Pi, S, C, \mathfrak{R}, \zeta)$, де $\Pi \subset Z_{\geq 0}$ – часовий період, S – множина аеропортів, C – множина елементарних сполучень (сегментів, рейсів) між аеропортами, \mathfrak{R} – множина маршрутів, $\zeta : S \rightarrow Z$ – функція співставлення часового поясу для кожного аеропорту. Елементарне сполучення $c \in C$ – вектор $c = (r, p_{dep}, p_{arr}, \tau_{dep}, \tau_{arr})$, тобто літак маршруту $r \in \mathfrak{R}$ відправляється з аеропорту $p_{dep} \in S$ в час τ_{dep} і прибуває в аеропорт $p_{arr} \in S$ в час τ_{arr} . Час τ_{dep} і τ_{arr} повинні відповідати часовим поясам аеропортів $p_{dep} \in S$ і $p_{arr} \in S$.

Часто маршрут і елементарне сполучення (рейс) є еквівалентними, проте в деяких випадках існують рейси з пересадками. Вони відрізняються від послідовності незалежних рейсів тим, що пасажирам необхідно перейти в інший літак, а перевірки безпеки і вихід з аеропорту зазвичай не передбачуються. Довжина авіамаршрутів є значно меншою, ніж для залізничних напрямів.

Недоліки застосування моделей залізничного транспорту до авіамеж. Якщо застосовувати реалістичну залежну від часу модель залізничних мереж для подання авіамережі, то для кожного елементарного

сполучення необхідно додати дві вершини маршруту при побудові дуги між вершинами аеропортів.

Окрім того, на відміну від залізничних мереж з відносно невеликою кількістю суміжних станцій для кожної зупинки (рис. 1), для авіамереж характерна велика кількість суміжних аеропортів. Таким чином, для подання кожного аеропорту в граф додаються надлишкові вершини маршруту.

Відмінність умов реалістичних моделей. Реалістичні події, що враховуються для залізниць на станціях, не відповідають реалістичним подіям в аеропортах. Наприклад, в аеропортах, окрім часу трансферу, необхідно враховувати реєстрацію і перевірки безпеки перед відправленням, перевірки документів після прибуття, отримання багажу тощо.

Часові функції авіамереж. Розглянемо часові функції, що відповідають реалістичним подіям авіамереж:

$\tau_{ci} : S \rightarrow R_{\geq 0}$ – необхідний час на чекін (всі обов’язкові процедури з моменту прибуття в аеропорт до моменту відправлення літака – перевірки документів, посадка на борт тощо);

$\tau_{co} : S \rightarrow R_{\geq 0}$ – необхідний час на чекаут (всі обов’язкові процедури з моменту посадки літака);

$\tau_{transfer} : S \rightarrow R_{\geq 0}$ – необхідний час на трансфер в разі пересадки на інший літак,

де $R_{\geq 0}$ – множина дійсних невід’ємних чисел.

4.2 Реалістична модель авіамереж зі сталим часом специфічних процедур

Для подання кожного аеропорту $p \in S$ в граф додається одна термінальна вершина, а для кожної термінальної вершини додається вершина прибуття і відправлення. Таким чином, кількість додаткових вершин зменшується порівняно із застосуванням попередніх моделей. Також для кожного аеропорту $p \in S$ додаються три дуги: *дуга чекіну* з вагою $\tau_{ci}(p)$ між термінальною вершиною і вершиною відправлення, *дуга чекауту* з вагою $\tau_{co}(p)$ між вершиною прибуття і термінальною вершиною, *дуга трансферу* з вагою $\tau_{transfer}(p)$ між вершинами прибуття і відправлення. Власне, для кожного рейсу додається *дуга перельоту* із залежною від часу вагою $l(c)$ з вершини відправлення p_{dep} до вершини прибуття p_{arr} .

Приклад моделі наведено на рис. 8. Термінальні вершини позначені більшими кружечками (щільна штриховка), вершини відправлення мають вхідну дугу з термінальної вершини (вертикальна штриховка), вершини прибуття мають вихідну дугу до термінальної вершини (горизонтальна штриховка). Дуги зі сталою вагою позначені тонкими лініями, а із залежною від часу (дуги перельотів) – товстими лініями.

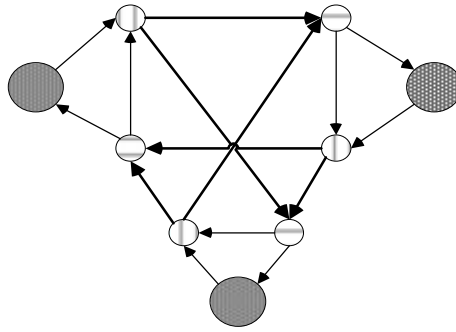


Рисунок 8 – Модель авіамережі зі сталим часом для процедур чекіну, чекауту, трансферу

4.3 Реалістична модель авіамереж із врахуванням класу рейсів

В попередній моделі вважається, що час чекіну, чекауту і трансферу для всіх рейсів однаковий. Насправді для різних авіакомпаній і типу рейсів (регіональні або міжнародні) час деяких процедур суттєво відрізняється. Для врахування цього факту введемо поняття класу рейсу. Множину класів рейсів позначимо Θ . Тоді $\tau_{ci} : S \times \Theta \rightarrow R_{\geq 0}$, $\tau_{co} : S \times \Theta \rightarrow R_{\geq 0}$, $\tau_{transfer} : S \times \Theta \times \Theta \rightarrow R_{\geq 0}$.

Для кожної термінальної вершини додаються $\|\Theta\|$ пар вершин прибуття і відправлення з міткою класу (рис. 9). Якщо деякому класу не відповідає жоден рейс, тоді відповідні вершини і дуги можна відкинути. Таким чином, дуги між вершинами прибуття, відправлення і термінальними вершинами матимуть різні вартості в залежності від класу.

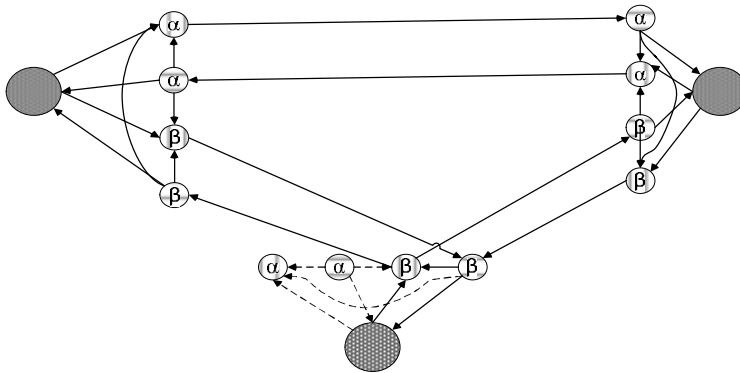


Рисунок 9 – Модель авіамережі з трьома аеропортами, двома класами α і β

Висновки

Розглянуто моделі для подання мереж громадського транспорту на прикладі залізничних доріг і авіаліній у вигляді графів з можливістю подальшого застосування класичних методів розв'язування. Описані приклади реальних систем пошуку оптимальних шляхів для залізниць та поширені задачі, які розв'язують для мереж громадського транспорту. Розглянуті прості та

реалістичні моделі подання графів для мереж громадського транспорту і авіаліній. Очевидно, що при введенні деяких умов, які виникають у тих чи інших застосуваннях, графові моделі і підходи до розв'язування задач можуть суттєво змінюватись. Зазвичай при побудові реалістичних моделей з додатковими умовами постає проблема надлишковості і надто великих розмірностей графів, що не дозволяють розв'язувати такі задачі класичними методами.

Метою подальших досліджень є розробка моделі подання розкладу для розв'язання залежної від часу задачі пошуку оптимального маршруту між заданими пунктами з додатковими умовами на мережі авіасполучень певного регіону [10]. Модель має враховувати розклад, бажаність простою у деяких проміжних пунктах для економії коштів або туристичного огляду міста, небажаність відвідування деяких проміжних пунктів тощо.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Schulz F. Timetable Information and Shortest Paths [Text]: Dissertation. Doktors der Naturwissenschaften / Frank Schulz. – 2005. – 136 p.
2. HAFAS - die perfekte Verbindung zum Kunden. [Електронний ресурс]: [Веб-сайт]. – Електронні дані. – Hannover, Germany. – Режим доступу: <http://www.hacon.de/hafas> (дата звернення 18.03.2016) – Назва з екрана.
3. EFA - The Electronic Journey Planner. [Електронний ресурс]: [Веб-сайт]. – Електронні дані. – Munich, Germany. – Режим доступу: <https://www.mentz.net/en/verkehrsuskunft/efa-journey-planner/> (дата звернення 18.03.2016) – Назва з екрана.
4. Pajor T. Algorithm Engineering for Realistic Journey Planning in Transportation Networks [Text]: Dissertation. Doktors der Naturwissenschaften / Thomas Pajor. – Potsdam, 2013. – 266 p.
5. Павленко А. Розв'язання залежних від часу задач пошуку найкоротшого шляху. / Павленко А.І. // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – 2015. – № 1(118). – С. 24-37.
6. Schulz F. Using multi-level graphs for timetable information in railway systems / F. Schulz, D. Wagner, C. Zaroliagis / Proceedings of the 4th Workshop on Algorithm Engineering and Experiments (ALENEX'02). Lecture Notes in Computer Science, Springer. – 2002. – Vol. 2409. – P. 43–59.
7. Muller-Hannemann M. Timetable information: Models and algorithms. / M. Muller-Hannemann, F. Schulz, D. Wagner, C. Zaroliagis / Algorithmic Methods for Railway Optimization. Lecture Notes in Computer Science, Springer. – 2007. – Vol. 4359. – P. 67–90.
8. Brodal G. Time-dependent networks as models to achieve fast exact time-table queries. / G. Brodal, R. Jacob. – Proceedings of the 3rd Workshop on Algorithmic Methods and Models for Optimization of Railways (ATMOS'03), Electronic Notes in Theoretical Computer Science. – 2004. – Vol. 92. – P. 3–15.
9. Delling D., Pajor T., Wagner D., Zaroliagis C. Efficient route planning in flight networks / Proceedings of the 9th Workshop on Algorithmic Approaches for Transportation Modeling, Optimization, and Systems (ATMOS'09), OpenAccess Series in Informatics (OASISs). – 2009. – 17 p.
10. Гуляницький Л.Ф. Динамічна задача пошуку найкоротшого шляху з додатковими умовами для задачі побудови маршруту авіапелерьотів. / Гуляницький Л.Ф., Павленко А.І. // Математичне моделювання в економіці. – 2015. – № 2 (3). – С. 39–50.

Стаття надійшла до редакції 30.11.16.