УДК 004.94

Я. А. Калиновский[1], **Ю. Е. Бояринова**[1,2], **А. С. Сукало**[1]
[1]Институт проблем регистрации информации НАН Украины
ул. Н. Шпака, 2, 03113 Киев, Украина
[2]Национальный технический университет Украины «КПИ»
Проспект Победы, 37, 03113 Киев, Украина

Математическое моделирование представлений экспоненциальной и логарифмической функций в гиперкомплексной числовой системе обобщенных кватернионов

Рассмотрен процесс математического моделирования представлений экспоненциальной и логарифмической функций в гиперкомплексной числовой системе обобщенных кватернионов с помощью определяющего линейного дифференциального уравнения с гиперкомплексными коэффициентами. Рассмотрены некоторые свойства этих представлений и их связь с представлениями экспонент в конкретных некоммутативных гиперкомплексных числовых системах размерности четыре.

Ключевые слова: *математическое моделирование, гиперкомплексная числовая система, обобщенные кватернионы, экспоненциальная функция, логарифмическая функция.*

Введение

Обобщенные кватернионы были введены К. Геделем в 1949 году для представления пространственно-временных групп. В работе [1] он представил решения уравнений Эйнштейна гравитационного поля с помощью обобщенных кватернионов.

Исследованию обобщенных кватернионов посвящены работы многих других авторов, например [2–9].

В работе [16] обобщенные кватернионы предлагается использовать для повышения стойкости электронной цифровой подписи в алгоритмах RSA. Это требует создания математических моделей представлений различных нелинейностей от обобщенного кватерниона, и, в первую очередь, представления экспоненциальной функции и обратной ей функции — логарифма от обобщенного кватерниона.

Обобщенный кватернион имеет вид:

$$q = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4\,, \quad (1)$$

где a_i — действительные числа, а $e_i, i = 2,..,4$ — базисные элементы, удовлетворяющие следующей таблице Кели:

(2)

$H_{\alpha\beta}$	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4
e_2	e_2	$-\alpha e_1$	e_4	$-\alpha e_3$
e_3	e_3	$-e_4$	$-\beta e_1$	βe_2
e_4	e_4	αe_3	$-\beta e_2$	$-\alpha\beta e_1$

(2)

Здесь α, $\beta \in$ R.

Метод построения представлений экспоненты от гиперкомплексного переменного с помощью ассоциированной системы линейных дифференциальных уравнений

В дальнейшем гиперкомплексные числа будут обозначаться большими латинскими буквами:

$$X = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i\,,\; M = \sum_{i=1}^{n} m_i e_i\,, \quad (3)$$

а вектор-столбцы, составленные из компонентов гиперкомплексных чисел, — большими латинскими буквами с чертой:

$$\overline{X} = (x_1, ..., x_n)^T,\; \overline{M} = (m_1, ..., m_n)^T. \quad (4)$$

Тогда основные положения вышеназванного метода построения представлений экспоненты от гиперкомплексного переменного с помощью ассоциированной системы линейных дифференциальных уравнений, которые подробно изложены в [10–14], состоят в следующем.

Представление экспоненты в гиперкомплексной числовой системе $\Gamma(e,n)$ от числа $M \in \Gamma(e,n)$, которое будем обозначать $Exp(M)$, есть частное решение гиперкомплексного линейного дифференциального уравнения

$$\dot{X} = MX \quad (5)$$

при начальном условии

$$Exp(0) = \varepsilon\,, \quad (6)$$

где ε — единичный элемент системы $\Gamma(e,n)$.

Уравнение (5) называется определяющим.

Для построения решения гиперкомплексного линейного дифференциального уравнения (5) его необходимо представить в векторно-матричной форме:

$$\dot{\overline{X}} = \overline{MX} . \tag{7}$$

При этом вектор-столбец в левой части имеет вид:

$$\dot{\overline{X}} = \left(\dot{x}_1, ..., \dot{x}_n\right)^T . \tag{8}$$

Так как гиперкомплексное число MX есть произведение двух гиперкомплексных чисел, то оно имеет вид

$$MX = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} m_i x_j \gamma_{ij}^k e_k , \tag{9}$$

где γ_{ij}^k — структурные константы ГЧС. Поэтому вектор-столбец $\overline{MX}$ имеет вид:

$$\overline{MX} = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_i x_j \gamma_{ij}^1 , ..., \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_i x_j \gamma_{ij}^n\right)^T . \tag{10}$$

Вектор-столбец $\overline{MX}$ можно представить в виде матричного произведения некоторой матрицы M размерами $n \times n$ на вектор-столбец $\overline{X}$:

$$\overline{MX} = \mathrm{M}\overline{X} . \tag{11}$$

При этом:

$$\mathrm{M}_{jk} = \sum_{i=1}^{n} m_i \gamma_{ij}^k . \tag{12}$$

Тогда гиперкомплексное уравнение (7) превратится в систему из n линейных дифференциальных уравнений первого порядка, которая называется ассоциированной системой линейных дифференциальных уравнений:

$$\dot{\overline{X}} = \mathrm{M}\overline{X} . \tag{13}$$

Далее необходимо найти характеристические числа $\lambda_1, ..., \lambda_n$ матрицы M, то есть решить характеристическое уравнение

$$\mathrm{M}-\lambda E=0\,. \tag{14}$$

Таким образом, характеристические числа будут зависеть от компонентов гиперкомплексного числа M .

После этого строится общее решение, зависящее от n^2 произвольных постоянных, из которых n^2-n линейно зависимы от n свободных переменных. Исключая зависимые постоянные, можно получить общие решения уравнения (7), зависящие от n произвольных постоянных — $\overline{X}(t,C_1,...,C_n)$. Значения произвольных постоянных устанавливаются с помощью начального условия (6). Компоненты вектор-столбца решения $\overline{X}$ и будут компонентами экспоненты от гиперкомплексного числа M :

$$Exp\left(M\right)=\sum_{i=1}^{n}\overline{x}_i e_i\,. \tag{15}$$

Построение представления экспоненты обобщенного кватерниона

В соответствии с (9) векторно-матричная система уравнений (7) принимает вид:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= m_1x_1-\alpha m_2x_2-\beta m_3x_3-\alpha\beta m_4x_4,\\
\dot{x}_2 &= m_2x_1+m_1x_2-\beta m_4x_3+\beta m_3x_4,\\
\dot{x}_3 &= m_3x_1+\alpha m_4x_2+m_1x_3-\alpha m_2x_4,\\
\dot{x}_4 &= m_4x_1-m_3x_2+m_2x_3+m_1x_4,
\end{aligned} \tag{16}$$

а уравнение (14) превращается в уравнение относительно параметра λ :

$$\begin{vmatrix}
m_1-\lambda & -\alpha m_2 & -\beta m_3 & -\alpha\beta m_4\\
m_2 & m_1-\lambda & -\beta m_4 & \beta m_3\\
m_3 & \alpha m_4 & m_1-\lambda & -\alpha m_2\\
m_4 & -m_3 & m_2 & m_1-\lambda
\end{vmatrix}=0. \tag{17}$$

Если ввести обозначения

$$\begin{vmatrix} m_1-\lambda & -\alpha m_2\\ m_2 & m_1-\lambda\end{vmatrix}=D_1,\quad \begin{vmatrix} m_3 & \alpha m_4\\ m_4 & -m_3\end{vmatrix}=D_2, \tag{18}$$

то из (17) по теореме Лапласа имеем:

$$D_1^2+\beta D_2^2=0\,. \tag{19}$$

Решениями уравнения (19) с учетом значений определителей (18) будут две пары двукратных корней:

$$\lambda_{1,2} = m_1 + \sqrt{\overline{m}}\,,\ \lambda_{3,4} = -m_1 + \sqrt{\overline{m}}\,, \tag{20}$$

где

$$\overline{m} = -(\alpha m_2^2 + \beta m_3^2 + \alpha\beta m_4^2)\,. \tag{21}$$

Так как знак $\overline{m} = -(\alpha m_2^2 + \beta m_3^2 + \alpha\beta m_4^2)$ неизвестен, то решения уравнения (13) нужно решать в виде:

$$x_i = (C_{i1} + tC_{i2})e^{(m_1+\overline{m})t} + (C_{i3} + tC_{i4})e^{(-m_1+\overline{m})t}, \quad i = 1,...,4\,. \tag{22}$$

Из 16 произвольных постоянных C_{ik} независимы только 4. Их можно найти, используя начальные условия вида (6):

$$x_1(0) = 1,\ \ x_2(0) = x_3(0) = x_4(0) = 0\,. \tag{23}$$

С учетом этого решения уравнения (13) принимают вид:

$$x_1(t) = \frac{1}{2}(e^{(m_1+\sqrt{\overline{m}})t} + e^{(m_1-\sqrt{\overline{m}})t})\,, \tag{24}$$

$$x_i(t) = \frac{m_i}{2\overline{m}}(e^{(m_1+\sqrt{\overline{m}})t} - e^{(m_1-\sqrt{\overline{m}})t}),\ \ i = 2,3,4\,. \tag{25}$$

Если $m_i t$ обозначить через m_i, то в соответствии с (15) получим окончательное выражение для представления экспоненты от обобщенного кватерниона:

$$Exp(M) = \frac{1}{2}e^{m_1}[(e^{\sqrt{\overline{m}}} + e^{-\sqrt{\overline{m}}})e_1 + \frac{1}{\sqrt{\overline{m}}}(e^{\sqrt{\overline{m}}} - e^{-\sqrt{\overline{m}}})(m_2e_2 + m_3e_3 + m_4e_4)]\,. \tag{26}$$

Можно показать, что эта формула при подстановке соответствующих значений параметров α и β даст представление экспоненты в гиперкомплексной числовой системе, таблица Кели которой получается из таблицы (2) при подстановке в нее тех же значений α и β. Так, например, как показано в [7–9], при $\alpha = 1$ и $\beta = 1$ таблица Кели переходит в таблицу Кели обычных кватернионов. Тогда из (21) имеем:

$$\overline{m} = -(m_2^2 + m_3^2 + m_4^2)\,,$$

$$\sqrt{\overline{m}} = i\sqrt{m_2^2 + m_3^2 + m_4^2} = i\sqrt{|\overline{m}|}\,,$$

и с помощью формулы Эйлера получаем представление экспоненты кватерниона [10, 13,15]:

$$Exp(M) = e^{m_1}(\cos\sqrt{|\overline{m}|}e_1 + \frac{\sin\sqrt{|\overline{m}|}}{\sqrt{|\overline{m}|}}(m_2e_2 + m_3e_3 + m_4e_4)).$$

Следует отметить, что для представления (26) не выполняется основное характеристическое свойство экспоненты: экспонента суммы аргументов равняется произведению экспонент отдельных аргументов, т.е.:

$$Exp(M_1 + M_2) \neq Exp(M_1) \cdot Exp(M_2).$$

Этот факт, который можно проверить непосредственно с помощью (26), объясняется некоммутативностью умножения обобщенных кватернионов.

Однако замечательным является то, что вид представления (26) инвариантен относительно коммутации сомножителей в определяющем уравнении (5). Это объясняется, как показано в (10), тем, что решение уравнения (5) можно представить в виде суммы степенного ряда

$$X(t) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(Mt)^s}{s!},$$

которая, ввиду ассоциативности умножения обобщенных кватернионов, имеет единственное значение.

Построение представления логарифмической функции от обобщенного кватерниона

В соответствии с определением логарифмической функции как обратной экспоненциальной из выражения (26) следует:

$$Ln\{\frac{1}{2}e^{m_1}[(e^{\sqrt{\overline{m}}} + e^{-\sqrt{\overline{m}}})e_1 + \frac{1}{\sqrt{\overline{m}}}(e^{\sqrt{\overline{m}}} - e^{-\sqrt{\overline{m}}})(m_2e_2 + m_3e_3 + m_4e_4)]\} = M. \qquad (27)$$

Но для представления логарифмической функции от обобщенного кватерниона необходимо, чтобы слева под знаком логарифма было гиперкомплексное число, а справа — гиперкомплексная функция

$$Ln\sum_{k=1}^{4} x_k e_k = \sum_{k=1}^{4} f_k(x_1, x_2, x_3, x_4)\, e_k. \qquad (28)$$

Для определения вида функций $f_k(x_1, x_2, x_3, x_4)$ необходимо решить относительно m_1, m_2, m_3, m_4 систему из четырех уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{e^{m_1+\sqrt{\overline{m}}}+e^{m_1-\sqrt{\overline{m}}}}{2}=x_1, \\ \dfrac{m_k}{\sqrt{\overline{m}}}\cdot\dfrac{e^{m_1+\sqrt{\overline{m}}}-e^{m_1-\sqrt{\overline{m}}}}{2}=x_k, \quad k=2,3,4. \end{cases} \tag{29}$$

Система (29) очень сложная по структуре, так как она содержит иррациональности от неизвестных, причем знаки подкоренных выражений неизвестны, а также экспоненциальные функции, в показателях которых стоят эти иррациональности. Поэтому ее решение в общем виде затруднительно. Однако этот вид значительно упрощается при фиксации знака под корнем иррациональности. Это обусловлено тем, что по формуле Эйлера показательные функции можно свести либо к тригонометрическим функциям, либо к гиперболическим. Поэтому целесообразно рассмотреть два случая: $\overline{m}<0$ и $\overline{m}>0$.

1) $\overline{m}=-(\alpha m_2^2+\beta m_3^2+\alpha\beta m_4^2)<0$. (30)

В этом случае, использование формулы Эйлера, а также преобразования $\sqrt{\overline{m}}=i\sqrt{-\overline{m}}$ приводит систему (29) к виду:

$$\begin{cases} e^{m_1}\cos\sqrt{-\overline{m}}=x_1, \\ e^{m_1}\dfrac{m_k}{\sqrt{-\overline{m}}}\cdot\sin\sqrt{-\overline{m}}=x_k, \quad k=2,3,4. \end{cases} \tag{31}$$

Умножая последние три уравнения соответственно на α , β и $\alpha\beta$, возводя все уравнения в квадрат и складывая их, получим

$$e^{2m_1}=x_1^2+\alpha x_2^2+\beta x_3^2+\alpha\beta x_4^2>0, \tag{32}$$

откуда:

$$m_1=\frac{1}{2}\ln(x_1^2+\alpha x_2^2+\beta x_3^2+\alpha\beta x_4^2). \tag{33}$$

Введем обозначение

$$x_1^2+\alpha x_2^2+\beta x_3^2+\alpha\beta x_4^2=\overline{x}. \tag{34}$$

Тогда из первого уравнения системы (31) получим:

$$\cos\sqrt{-\overline{m}} = \frac{x_1}{\sqrt{\overline{x}}}, \tag{35}$$

$$\sqrt{-\overline{m}} = Arc\cos\frac{x_1}{\sqrt{\overline{x}}}, \tag{36}$$

$$\sin\sqrt{-\overline{m}} = \sqrt{1-\cos^2\sqrt{\overline{m}}} = \sqrt{1-(\frac{x_1}{\sqrt{\overline{x}}})^2} = \frac{\sqrt{\overline{x}-x_1^2}}{\sqrt{\overline{x}}}. \tag{37}$$

Подстановка (32), (36) и (37) в последние три уравнения системы (31) дает:

$$m_k = \frac{x_i}{\sqrt{\overline{x}-x_1^2}} Arc\cos\frac{x_1}{\sqrt{\overline{x}}}, \quad k = 2,3,4. \tag{38}$$

Переход в (38) от $Arc\cos$ к главным значениям $arctg$ и подстановка в (27) дает окончательную формулу для логарифмической функции в этом случае:

$$Ln(\sum_{k=1}^{4} x_k e_k) = \ln\sqrt{\overline{x}}\cdot e_1 + \frac{1}{\sqrt{\overline{x}-x_1^2}} arctg\frac{\sqrt{\overline{x}-x_1^2}}{x_1}(\sum_{k\ 2}^{4} x_k e_k + \pi\sum_{k\ 2}^{4} n_k e_k), \quad n_k \in Z; \tag{39}$$

$$2)\ \overline{m} = -(\alpha m_2^2 + \beta m_3^2 + \alpha\beta m_4^2) > 0. \tag{40}$$

В этом случае, использование формулы Эйлера приводит систему (29) к виду:

$$\begin{cases} e^{m_1} ch\sqrt{-\overline{m}} = x_1, \\ e^{m_1}\dfrac{m_k}{\sqrt{-\overline{m}}}\cdot sh\sqrt{-\overline{m}} = x_k, \quad k = 2,3,4. \end{cases} \tag{41}$$

Умножая последние три уравнения соответственно на α, β и $\alpha\beta$, возводя все уравнения в квадрат и вычитая последние три из первого, получим

$$e^{2m_1} = x_1^2 - \alpha x_2^2 - \beta x_3^2 - \alpha\beta x_4^2 > 0, \tag{42}$$

откуда:

$$m_1 = \frac{1}{2}\ln(x_1^2 - \alpha x_2^2 - \beta x_3^2 - \alpha\beta x_4^2). \tag{43}$$

Введем обозначение:

$$x_1^2 - \alpha x_2^2 - \beta x_3^2 - \alpha\beta x_4^2 = \overline{x}. \tag{44}$$

Тогда из первого уравнения системы (31) получим:

$$ch\sqrt{-\overline{m}} = \frac{x_1}{\sqrt{\overline{x}}}, \tag{45}$$

$$\sqrt{-\overline{m}} = arch\frac{x_1}{\sqrt{\overline{x}}}, \tag{46}$$

$$\sin\sqrt{-\overline{m}} = \sqrt{ch^2\sqrt{\overline{m}} - 1} = \sqrt{(\frac{x_1}{\sqrt{\overline{x}}})^2 - 1} = \frac{\sqrt{x_1^2 - \overline{x}}}{\sqrt{\overline{x}}}. \tag{47}$$

Подстановка (42), (46) и (47) в последние три уравнения системы (31) дает:

$$m_k = \frac{x_i}{\sqrt{x_1^2 - \overline{x}}} arch\frac{x_1}{\sqrt{\overline{x}}}, \quad k = 2,3,4. \tag{48}$$

Переход в (48) от $arch$ к $arth$ и подстановка в (27) дает окончательную формулу для логарифмической функции во втором случае:

$$Ln(\sum_{k=1}^{4} x_k e_k) = \ln\sqrt{\overline{x}} \cdot e_1 + \frac{1}{\sqrt{x_1^2 - \overline{x}}} arth\frac{\sqrt{x_1^2 - \overline{x}}}{x_1} \sum_{k=2}^{4} x_k e_k. \tag{49}$$

Выводы

Полученные в данной работе представления экспоненциальной и логарифмической функций в системе обобщенных кватернионов дает возможность получить представления для многих классов некоммутативных гиперкомплексных числовых систем четвертой размерности. Для этого нужно подставить соответствующие параметры α и β. В частности, проверено совпадение с представлениями для систем, рассмотренных в работе [6].

1. *Godel C.* An Example of a New Type of Cosmological Solutions of Einstein`s Field Equations of Gravitation / C. Godel // Rev. Mod. Phys. — 1949. — Vol. 21, N 3. — P. 447–450.

2. *Noether E.* Hypercomplex Grossen und Darstellungstheorie / Noether E. // Mathematische Zeitschrift. — 1929. — B. 30. — P. 641–692.

3. *Клипков С.И.* Обобщенный анализ матричных представлений ассоциативных гиперкомплексных числовых систем, используемых в задачах энергетики / И.С. Клипков // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2014. — Т. 16, № 2. — С. 28–41.

4. *Alagos Ya.* Split Quaternion Matrices / Ya. Alagos, K. At H. Oral, S. Yuce // Miscolc Mathematical Notes. — 2012. — Vol. 13, N 2. — P. 223–232.

5. *Janovska D.* Linear equations and the Kronecker product in coquaternions / D. Janovska, G. Opfer // Mitt. Math. Ges. Hamburg. — 2013. — Vol. 33. — P. 181–196.

6. *Computing* Characteristics of One Class of Noncommutative Hypercomplex Number Systems of 4-dimension [Электронный ресурс] / Y.A. Kalinovsky, D.V. Lande, Y.E. Boyarinova, A.S. Turenko. — Режим доступа: http://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1409/1409.3193.pdf

7. *Калиновский Я.А.* Дослідження зв'язків між узагальненими кватерніонами та процедурою подвоєння Грасмана-Кліфорда / Я.А. Калиновский, Ю.Е. Бояринова, А.С. Туренко // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2015. — Т. 17, № 1. — С. 36–45.

8. *Mamagami A.B.* Some Notes on Matrix of Generalized Quaternion / A.B. Mamagami, M. Jafari // Internation. Research J. of Applied and Basic Sciences. — 2013. — Vol. 7, N 14. — P. 1164–1171.

9. *Калиновский Я.А.* Свойства обобщенных кватернионов и их связь с процедурой удвоения Грассмана-Клиффорда / Я.А. Калиновский, Ю.Е. Бояринова, А.С. Туренко // Electronic Modeling. — 2015. — Vol. 37, N 2. — P. 17–26.

10. *Синьков М.В.* Конечномерные гиперкомплексные числовые системы. Основы теории. Применения / М.В. Синьков, Я.А. Калиновский, Ю.Е. Бояринова — К.: НАН України, Ін-т проблем реєстрації інформації, 2010. — 389 с

11. *Каліновський Я.О.* Методи комп'ютерного моделювання та обчислень з використанням гіперкомплексних числових систем: дис. … докт. техн. наук: 01.05.02 / Каліновський Яків Олександрович; Ін-т проблем реєстрації інформації НАН України. — К., 2007. — 417 с. — Бібліогр.: С. 323–348.

12. *Калиновский Я.А.* Исследование свойств изоморфизма квадриплексных и бикомплексных числовых систем / Я.А. Калиновский // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2003. — Т. 5, № 1. — С. 69–73.

13. *Калиновский Я.А.* Методы построения нелинейностей в расширениях комплексных чисел / Я.А. Калиновский, Н.В. Роенко, М.В. Синьков // Кибернетика и системный анализ. — 1996. — № 4. — С. 178–181.

14. *Синьков М.В.* Некоторые линейные и нелинейные операции обобщенных комплексных чисел / М.В. Синьков, Я.А. Калиновский, Т.В. Синькова // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2002. — Т. 4, № 3. — С. 55–61.

15. *Brackx F.* The Exponential Function of a Quaternion Variable / F. Brackx // Applicable Analysis. — 1979. — Vol. 19. — P. 265–276.

16. *Бояринова Ю.Е.* Построение алгоритма цифровой подписи с использованием функций от обобщенных кватернионов / Ю.Е. Бояринова, Я.А. Калиновский, А.С. Сукало // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2015. — Т. 17, № 3. — С. 48–55.

17. *Ell T.A.* Quaternion Algebra, in Quaternion Fourier Transforms for Signal and Image Processing / T.A. Ell, N.L. Bihan and S.J. Sangwine. — John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, USA., 2014.

18. *Erik B.* Dam Martin Koch Martin Lillholm Quaternions, Interpolation and Animation Technical Rep ort DIKU-TR-98/5 / B. Erik // Department of Computer Science Universit y of Copenhagen Denmark. — 1998, July 17.

19. *Georgiev S.* New Asp ects on Elementary Functions in the Context of Quaternionic Analysis CUBO / S. Georgiev, J. Morais, W. Spröβ // A Mathematical Journal. — 2012, March. —Vol. 14, N 01. — P. 93–110.

20. *Логарифмическая* функция от кватерниона / Я.А. Калиновский, М.В. Синьков, Т.Г. Постникова, Т.В. Синькова // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2002. — Т. 4, № 1. — С. 35–37.

21. *Синьков М.В.* Розробка та дослідження алгоритмів побудови зображення обернених функцій від гіперкомплексного змінного / М.В. Синьков, Я.О. Каліновський, Ю.Є. Боярінова // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2005. — Т. 7, № 1. — С. 32–42.

Поступила в редакцию 30.11.2015