УДК 004.5

А. Г. Додонов, В. Г. Путятин
Институт проблем регистрации информации НАН Украины
ул. Н. Шпака, 2, 03113 Киев, Украина

Модели и алгоритмы анализа структурной надежности сложных многофункциональных организационно-технических систем

Приведено описание моделей и алгоритмов анализа структурной надежности сложных многофункциональных организационно-технических систем при достаточно общих предположениях относительно законов распределения времени безотказной работы и времени восстановления составных частей системы.

Ключевые слова: *алгоритм, анализ, модель, надежность, описание, оценка, показатель, система, структура.*

В последнее время все большее распространение находят сложные организационно-технические системы (СОТС), одной из важных задач которых при разработке является расчет показателей надежности, оценка и выбор рациональной структуры системы, удовлетворяющей требованиям тактико-технического задания (ТТЗ), или ТЗ по надежности [1–3]. Структурные схемы надежности (ССН) таких систем называются структурно-сложными, в отличие от последовательно-параллельных структур.

Целью статьи является описание моделей и алгоритмов анализа структурной надежности многофункциональных СОТС как системы со сложной структурной организацией при достаточно общих предположениях относительно законов распределения времени безотказной работы (в.б.р.) и времени восстановления (в.в.) составных частей системы. *Сруктурная надежность системы* [structural reliability] — это результирующая надежность системы при заданной ее структуре и известных значениях надежности всех входящих в нее частей (элементов).

1. Анализ основных задач надежности, возникающих на ранних стадиях проектирования многофункциональных СОТС, и выбор методов их решения

Анализ структурной надежности СОТС связан с детальным анализом структурных, функциональных и электрических схем составных частей системы, что приводит к построению структурно-сложных схем расчета надежности, не всегда сводящихся к последовательно-параллельному виду. Законы распределения времени безотказной работы T_O и особенно времени восстановления T_B составных частей системы могут отличаться от экспоненциальных, а зачастую и вообще неизвестны.

С позиций надежности многофункциональная СОТС характеризуются рядом специфических особенностей, которые существенно затрудняют проведение анализа и накладывают определенный отпечаток на формы постановки и методы решения задач надежности, возникающих на ранних стадиях проектирования. К основным из этих особенностей относятся: многокомпонентность; многофункциональность; наличие различных видов избыточности (структурной, функциональной, информационной) и развитой системы технического обслуживания, существенно влияющей на уровень надежности системы в процессе эксплуатации; большое разнообразие СОТС и их подсистем, отличающихся разнообразным составом, физическими принципами построения и имеющих различные виды отказов и широкий спектр законов распределения случайных величин, характеризующих их надежностные свойства T_O, T_B и т.п.); структурно-сложная организация СОТС и ее отдельных подсистем, не всегда сводящихся к последовательно-параллельным схемам расчета надежности; иерархичность структуры СОТС, характеризующаяся наличием нескольких уровней функционирования и возможностью описания системы с разной степенью детализации, что требует применения различных методов анализа надежности.

Надежность многофункциональных СОТС характеризуется оперативно-тактическими и техническими показателями [6]. Номенклатуру показателей надежности проектируемых СОТС вида I выбирают в зависимости от характера применения, возможности ремонта, восстановления и значения выходного эффекта. Для СОТС вида I задаются и определяются оперативные показатели $K_Г$, $P(t)$, $K_{ОГ}$ в сочетании с одним из технических показателей T_O, T_B и др., но при этом предпочтительным является задание оперативных показателей. Для СОТС вида II номенклатуру показателей надежности составляют коэффициент сохранения эффективности $K_{эф}$ и технические показатели безотказности и ремонтопригодности составных частей системы, имеющих вид I, а также технические показатели долговечности и сохраняемости. При этом $K_{эф}$ выражает отношение эффективности системы (изделия) с реальной надежностью к его эффективности при безотказной работе.

Для решения задач надежности необходимо определить математический аппарат, позволяющий описывать функционирование восстанавливаемых систем, к которым относятся многофункциональные СОТС. В качестве случайных процессов, описывающих функционирование восстанавливаемых систем, выступают: цепи Маркова, полумарковские процессы, процессы с дискретным вмешательством случая и т.д. Использование того или иного процесса требует специального предположения о виде функций распределения T_O и T_B дисциплины восстановления и т.д.

Для решения задач надежности СОТС необходимо описание функционирования систем при неэкспоненциальных или неопределенных (произвольных) законах распределения T_O и T_B подсистем (элементов). Для описания восстанавливаемых систем используется класс случайных процессов, не требующий никаких специальных предположений о характере исходных случайных величин. К такому классу относятся процессы марковского восстановления (ПМВ), являющиеся естественными моделями многих систем, изменение состояний которых происходит скачкообразно через случайные промежутки времени. К ним, в частности, относятся марковские и полумарковские системы с дискретным, непрерывным и произвольным (континуальным) фазовым пространством.

Пусть S — некоторая восстанавливаемая система, состоящая из n элементов $e_1, e_2, ..., e_n$. Предположим, что элемент e_i, $i = \overline{1, n}$, может находиться в одном из K_i возможных состояний (например, работоспособное состояние, отказовое состояние и одно или несколько состояний частичного отказа). Функционирование (отдельно взятого) элемента e_i во времени может быть описано с помощью полумарковского процесса с K_i возможными состояниями [5, 6]. Далее предположим, что элементы, образующие систему S, функционируют (отказывают, восстанавливаются и т.д.) независимо друг от друга. Физическое (техническое) состояние системы S может быть выражено вектором $e = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$. Функционирование системы S во времени носит случайный, стохастический характер. Поэтому, обозначая через t текущее время, запишем:

$$e(t) = \{e_1(t), e_2(t), ..., e_n(t)\}. \quad (1)$$

В случае (1) физическое состояние системы, вообще говоря, не обладает полумарковским свойством. Оказывается [5, 6], что если определенным образом «расширить» физическое состояние $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$, добавив к нему некоторый вектор $y = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$, то во многих случаях можно добиться того, что новое, расширенное состояние $x = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, где $x_i = (e_i y_i)$, $i = \overline{1, n}$, уже будет обладать полумарковским свойством. В этом и состоит идея построения процесса полумарковского восстановления, которая достаточно привлекательна и наглядна: прежде всего кодируются возможные физические (технические) состояния системы (так же, как если бы все исходные случайные величины имели экспоненциальные распределения); затем к полученному таким образом дискретному состоянию системы добавляется непрерывная составляющая (фазовое пространство расширяется так, чтобы, с одной стороны, компенсировать возможный неэкспоненциальный характер исходных распределений и, с другой — обеспечить марковский характер полученных в итоге процессов, которые оказываются ПМВ.

Процессы марковского восстановления задаются с помощью специальных стохастических ядер, которые называются полумарковскими процессами (ПМП) и определяются следующим образом: $q(t, x, B) = P\{\xi_{n+1} \in B / \xi_n = x, \Theta_{n=1} = t\}$. ПМВ представляют собой удобную конструктивную форму задания широкого класса скачкообразных процессов. В качестве стационарных надежностных характеристик полумарковской системы, заданной ПМВ $\{\xi_n, \Theta_n, n \geq 0\}$, рассматриваются следующие:

— стационарный коэффициент готовности $K_Г$:

$$K_Г = \frac{\int_{X+} \rho(dx)m(x)}{\int_{X-} \rho(dx)m(x)}; \tag{2}$$

— наработка на отказ (среднее стационарное время безотказной работы) T_O:

$$T_O = \frac{\int_{X+} \rho(dx)m(x)}{\int_{X-} \rho(dx)P(x, X_+)} = \frac{\int_{X+} \rho(dx)m(x)}{\int_{X-} \rho(dx)P(x, X_-)}; \tag{3}$$

— среднее стационарное время восстановления T_B:

$$T_B = \frac{\int_{X+} \rho(dx)m(x)}{\int_{X-} \rho(dx)P(x, X_-)} = \frac{\int_{X+} \rho(dx)m(x)}{\int_{X-} \rho(dx)P(x, X_+)}, \tag{4}$$

где X — множество состояний системы; X_+, X_- — множество работоспособных и отказовых состояний системы соответственно *m*; $\rho(dx)$ — стационарное распределение вложенной цепи Маркова (ВЦМ); (x) — средние времена пребывания в состояниях; $P(x, X_-)$ — вероятность перехода ВЦМ из состояния x во множество отказовых состояний X_-; $P(x, X_+)$ — вероятность перехода ВЦМ из состояния x во множество работоспособных состояний X_+.

Функционирование сложных систем, состоящих из независимо работающих элементов, каждый из которых описывается ПМВ, описывается суперпозицией ПМВ.

Таким образом, для анализа надежности многофункциональных СОТС в процессе их проектирования при наличии ограниченной предварительной информации о законах распределения времен безотказной работы T_O и времен восстановления T_B подсистем (элементов) целесообразно применять модели, разработанные с использованием полумарковских процессов. Полученные на этой основе аналитические соотношения и алгоритмы инвариантны к широким классам законов распределения времен безотказной работы T_O и времен восстановления T_B подсистем и позволяют проводить анализ надежности систем со сложной структурной организацией при произвольных (то есть не обязательно экспоненциальных) законах распределения указанных времен в условиях реальных данных об отказах и временах восстановления подсистем.

2. Разработка модели анализа структурной надежности многофункциональных СОТС как системы со сложной структурно-функциональной организацией

Анализ структурной надежности многофункциональных СОТС при решении поставленных перед ними задач сводится к анализу влияния подсистем на полную работоспособность системы. Тогда постановку задачи исследования можно сформулировать следующим образом.

Пусть для системы (изделия) заданы: структурно-функциональная организация системы; условия работоспособности или условия отказа системы по каждой из выполняемых функций; характеристики (показатели) надежности элементов системы (законы распределения времен безотказной работы и времен восстановления или наработка на отказ и среднее время восстановления элементов системы). Требуется определить основные показатели надежности системы: коэффициент готовности $K_Г$, наработку на отказ T_O, среднее время восстановления T_B и др.).

Предположим, что каждый элемент системы может находиться в двух состояниях: «1» и «0», где «1» означает, что элемент работоспособен, а «0» — восстанавливается. Если отказы и восстановления элементов происходят независимо друг от друга, то функционирование всей системы может быть описано некоторым вектором $e = (e_1, e_2, ..., e_n)$, где $e_i = 1$, если i-й элемент работоспособен и $e_i = 0$, если i-й элемент восстанавливается.

Обозначим через E множество всех технических состояний системы. Предположим, что по функциональной структуре системы и условиям (алгоритму) определения ее отказов множество E можно представить в виде

$$E = E_+ \bigcup E_-,\ E_+ \bigcap E_- = O\ , \tag{5}$$

где E_+ определяется как множество технических состояний системы, в которых она является работоспособной, а E_- — множество технических состояний, в которых система является отказавшей.

Добавим к каждому вектору $e = (e_1, e_2, ..., e_n)$ непрерывную компоненту $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, где $y_i, i = \overline{1,n}$, показывает, сколько времени уже проработал или восстанавливается i-й элемент в момент очередного изменения технического состояния системы. Знание пары (e, y) позволяет после очередного изменения в момент τ_n дискретной компоненты сделать прогноз будущего состояния (e', y') в момент τ_{n+1} следующего изменения дискретной компоненты. Таким образом, состояние $x = (e, y)$ в момент очередного изменения состояния системы показывает: какие элементы в данный момент времени работоспособны, а какие восстанавливаются (по коду e); какой элемент в данный момент вышел из строя или же полностью восстанавливается (по номеру той компоненты из y, которая равна нулю), сколько времени восстанавливаются или же работают остальные элементы (по значениям остальных компонент из y).

Пользуясь [9] запишем следующие формулы:

$$K_{\Gamma} = \frac{\sum\limits_{e \in E_+} \prod\limits_{j \in I_0} m_j^0 \prod\limits_{j \in I_1} m_j^1}{\prod\limits_{j=1}^{n} \left(m_j^0 + m_j^1\right)} = \frac{\prod\limits_{j=1}^{n} \left(m_j^0 + m_j^1\right) - \sum\limits_{e \in E_-} \prod\limits_{j \in I_0} m_j^0 \prod\limits_{j \in I_1} m_j^1}{\prod\limits_{j=1}^{n} \left(m_j^0 + m_j^1\right)}, \tag{6}$$

$$T_O = \frac{\sum\limits_{e \in E_+} \prod\limits_{j \in I_0} m_j^0 \prod\limits_{j \in I_1} m_j^1}{\sum\limits_{e \in E_+} \sum\limits_{e^i \in E_-} \prod\limits_{j \in I_0} m_j^0 \prod\limits_{\substack{j \in I_1 \\ j \neq 1}} m_j^1} = \frac{\prod\limits_{j=1}^{n} \left(m_j^0 + m_j^1\right) - \sum\limits_{e \in E_-} \prod\limits_{j \in I_0} m_j^0 \prod\limits_{j \in I_1} m_j^1}{\sum\limits_{e \in E_-} \sum\limits_{e^i \in E_+} \prod\limits_{\substack{j \in I_0 \\ j \neq i}} m_j^0 \prod\limits_{j \in I_1} m_j^1}, \tag{7}$$

$$T_B = \frac{\prod\limits_{j=1}^{n} \left(m_j^0 + m_j^1\right) - \sum\limits_{e \in E_+} \prod\limits_{j \in I_0} m_j^0 \prod\limits_{j \in I_1} m_j^1}{\sum\limits_{e \in E_+} \sum\limits_{e^i \in E_-} m_j^0 \prod\limits_{\substack{j \in I_1 \\ j \neq 1}} m_{1_j}} = \frac{\sum\limits_{e \in E_-} \prod\limits_{j \in I_0} m_j^0 \prod\limits_{j \in I_1} m_j^1}{\sum\limits_{e \in E_-} \sum\limits_{e^i \in E_+} \prod\limits_{\substack{j \in I_0 \\ j \neq 1}} m_j^0 \prod\limits_{j \in I_1} m_j^1}. \tag{8}$$

Полученные выражения (6)–(8) для вычисления K_{Γ}, T_O, T_B обладают рядом преимуществ вычислительного и чисто практического характера по сравнению с вычислением указанных показателей по формулам [8]: 1) при вычислении показателей надежности достаточно определить множество состояний работоспособности E_+ (при этом используется левая часть выражений (6)–(8) (или множество отказовых состояний E_- — используется правая часть выражений). Это для многих систем оказывается значительно проще, чем определять или генерировать на ЭВМ оба множества E_+ и E_- одновременно. В частности на этом основаны алгоритмы, в которых осуществляется процедура направленного генерирования E_+ и E_-; 2) при вычислении знаменателя для K_{Γ} необходимо 2^n сравнений и $n \cdot 2^n$ умножений, а при использовании выражения (6) необходимо только *n* сложений и *n* умножений; 3) Для вычисления числителей T_O и T_B в сумме требуется 2^n сложений и $n \cdot 2^n$ умножений, а выражения (6)–(8) позволяют вычислить эту же операцию за $\left\| \min\{E_+, E_-\} \right\|$ сложений и за $n \cdot \left\| \min\{E_+, E_-\} \right\|$ умножений, где $\left\| \min\{E_+, E_-\} \right\|$ — мощность множества, содержащего меньшее число элементов. Аналогичное наблюдается и при вычислении знаменателей T_O и T_B.

3. Разработка методов и алгоритмов описания условий работоспособности многофункциональных СОТС со сложной структурной организацией

Для расчета надежности многофункциональных СОТС со сложной структурной организацией необходимо описать условия ее работоспособности и определить множество работоспособных и множество отказовых состояний системы. Без решения этой практически важной задачи невозможно разработать эффективные алгоритмы вычисления показателей надежности СОТС как системы со сложной структурой. Так, приведенные выше формулы (6)–(8) получены в предположении, что заданы условия работоспособности и определены множество работоспособных и множество отказовых состояний системы.

Описать условия работоспособности системы, т.е. условия при которых система может выполнить стоящую перед ней задачу можно сделать различными способами: а) словесно; б) графически (например, с помощью структурной схемы надежности); в) аналитически (например, с помощью функций алгебры логики).

Словесное описание работоспособности системы является наиболее простым, широко распространенным, но, как правило, очень громоздким и недостаточно четким.

В инженерной практике описания условий работоспособности сложных систем наиболее широкое распространение получили структурные схемы надежности (ССН), под которыми понимается условное графическое изображение надежности системы по составным элементам, соединенным между собой в зависимости от влияния отказа каждого из них на отказ системы в целом. При этом элементы системы в ССН изображаются прямоугольниками, а связи между элементами-отрезками и точками соединения. Условием работоспособности системы является наличие работоспособного пути между входом и выходом ССН. Иногда вводятся некоторые дополнительные условия, уточняющие логические связи между событием «отказ системы» и событиями «отказы элементов». Описание условий работоспособности СОТС с помощью ССН является очень наглядным и легко строится на основании функциональных и электрических схем системы (изделия).

При построении моделей надежности СОТС как систем со сложной структурой и формализации их функционирования оказывается весьма удобным создание ССН в виде ориентированного, полуориентированного и неориентированного графов. При этом элементам системы при решении одних задач ставят в соответствие ребра (дуги) графа, а точкам соединения — вершины графа. При решении других задач поступают иначе: источникам и приемникам сообщений ставят в соответствие вершины графа, а линиям связи — ребра графа. Граф, полученный в первом случае, называется реберным, а во втором — вершинным. Для описания условий работоспособности СОТС мы будем пользоваться реберными графами, т.к. вершинные графы имеют следующий недостаток: и физическое содержание отдельных элементов, и логические условия их осуществления объединены в одних и тех же элементах — в вершинах графа.

При описании ССН с помощью графов наиболее однозначной является формализация функционирования системы с помощью ориентированного графа (орграфа) $G(V, E)$ без контуров, где V — множество вершин(точек соединения в ССН системы), а E — соединяющие их дуги (элементы системы). Путем в орграфе G называется последовательность ребер (дуг) вида: $(V_1,V_2),...,(V_{n-1},V_n)$. Говорят, что путь идет из вершины V_1 в вершину V_n и имеет длину $n-1$. Такой путь удобно представлять последовательностью вершин: $V_1,V_2,...,V_n$ или ребер: $e_1,e_2,...,e_n$, лежащих на нем.

Для определения условий работоспособности системы, ССН которой задана с помощью орграфа без контуров, необходимо найти все пути между входом (источником) и выходом (стоком) орграфа G. Действительно, любой работоспособный путь между входом и выходом ССН обеспечивает работоспособность системы. Следовательно, определив все пути между источником и стоком в орграфе G, мы зададим все условия работоспособности системы.

Для поиска всех путей от источника к стоку используется следующая рекурсивная процедура.

Алгоритм 1.

1. Ввести граф $G(V, E)$ в память ЭВМ с помощью списка вершин. Для построения списка каждой вершине ставятся в соответствие номера всех вершин, к которым направлены ребра от заданной вершины.

2. Задать начальную (источник) V_1 и конечную (сток) V_n вершины орграфа $G(V, E)$. Обнулить массив «Цепочка вершин».

3. Вызвать подпрограмму поиска путей из вершин V_1 в вершину V_n. Выполнить следующие действия.

3.1. Если V_1 совпадает с V_N, то зафиксировать успешное завершение этой программы.

3.2. В противном случае добавить вершину V_1 к ранее построенной цепочке вершин.

3.3. Перебирая все вершины, куда можно непосредственно попасть из вершины V_1 (пусть это вершина V_K), вызвать эту же подпрограмму для поиска путей из V_K в V_N. Исключить V_1 из цепочки вершин.

3.4. Возвратиться из подпрограммы.

4. Вывести результат (печать путей).

Графическое описание условий работоспособности системы с помощью ССН (включая и графы) является очень распространенными наглядным, но не всегда полным и однозначным. При построении моделей надежности многих систем ССН не содержит полную информацию о логике возникновения отказов в системе. Тогда ее можно рассматривать как форму представления логических связей между событием «отказ системы» и событиями «отказы элементов», причем как форму, адекватную логической функции работоспособности. Однако существуют системы, ССН которых не могут отразить полную логику возникновения отказов, например имеются системы, у которых работоспособность пути зависит от работоспособности элементов, входящих в другой путь.

При исследовании надежности СОТС целесообразно использовать все способы описания условий работоспособности, компенсируя их взаимные недостатки и дополняя одно описание другим. Для формализованного описания условий работоспособности системы введем ряд обозначений. Функцией работоспособности (структурной функцией) системы называется функция алгебры логики $\varphi(e_1, e_2, ..., e_n)$, которая связывает состояние элементов с состоянием системы. Отметим, что при построении математической модели анализа структурной надежности мы предполагали, что техническое состояние системы в каждый момент времени определяется состоянием ее элементов в структурной схеме системы. При этом элементы функционируют независимо друг от друга и каждый из них, а также система в целом могут находиться в двух состояниях: состоянии работоспособности и состоянии отказа. Поэтому введение функции работоспособности системы как функции алгебры логики является в данном случае вполне обоснованным.

Преимущественное большинство технических систем, включая СОТС и их составные части, имеют структурную организацию, удовлетворяющую условию монотонности. Функция работоспособности системы называется монотонной, если она удовлетворяет следующим условиям: 1) $\varphi(0,0,...,0)=0$; 2) $\varphi(1,1,...,1)=1$; 3) $\varphi(e_1,e_2,...,e_n)\geq\varphi(e_1',e_2',...,e_n')$, если $e_i\geq e_i', i=\overline{1,n}$.

Структуры, условия работоспособности которых можно описать с помощью монотонных функций работоспособности системы, называются монотонными.

Для систем с монотонной структурой функцию работоспособности можно записать с помощью кратчайших путей успешного функционирования (КПУФ) и минимальных сечений отказа системы [10]. Кратчайший путь успешного функционирования представляет собой такую конъюнкцию работоспособных элементов, исключение любого из которых переводит систему из множества работоспособных во множество отказовых состояний системы, т.е.

$$L_q=\bigwedge_{i\in I^q}e_i, \tag{9}$$

где I^q — множество номеров элементов, входящих в q-й КПУФ.

Минимальное сечение отказов (МСО) системы представляет собой такую конъюнкцию из отрицаний ее элементов, исключение любого из которых переводит систему из множества отказовых во множество работоспособных состояний системы, т.е.

$$S_r=\bigwedge_{i\in I^{rq}}\overline{e_i}, \tag{10}$$

где I^r — множество номеров элементов, входящих в r-е сечение.

Условия работоспособности системы можно записать в виде:

1) дизъюнкции всех имеющихся КПУФ системы

$$\varphi(e_1,e_2,...,e_n)=\bigvee_{q=1}^{Q}L_q=\bigvee_{q=1}^{Q}\left[\bigwedge_{i\in I^q}e_i\right]; \tag{11}$$

2) конъюнкции всех отрицаний МСО системы

$$\varphi(e_1,e_2,...,e_n)=\bigwedge_{r=1}^{R}\overline{S_r}=\bigwedge_{r=1}^{R}\left[\bigvee_{i\in I^r}e_i\right], \tag{12}$$

где Q и R — соответственно количество КПУФ и МСО системы.

Для того чтобы с помощью условий работоспособности системы построить множество работоспособных и множество отказовых состояний системы, воспользуемся следующими соображениями. Зафиксируем произвольный вектор $e\in I$. Тогда, если существует хоть один КПУФ $L_q=\bigwedge_{i\in I^q}e_i$ такой, что имеет место включение

$$e \supset L_q, \tag{13}$$

т.е. для компонент $e_j, j = \overline{1,n}$ вектора $e = (e_1, e_2, ..., e_n)$ выполняется условие $(\forall_{j \in} I_q)(e_j = 1)$, то тогда, согласно (11), $\varphi(e_1, e_2, ..., e_n) = 1$ и, следовательно $e \in E_+$. В противном случае, т.е. если нет ни одного КПУФ $L_q, q = \overline{1,Q}$, для которого выполняется условие (13), то $e \in E_-$.

На основании этого разработан следующий алгоритм.

Алгоритм 2. Формирование множества работоспособных и (или) множества отказовых состояний системы с помощью КПУФ.

1. Исходя из условий функционирования и структурной схемы надежности системы, определяются все КПУФ системы: $L_q, q = \overline{1,Q}$.

2. Вектор $e = (e_1, e_2, ..., e_n)$ соответствующий текущему техническому состоянию системы, устанавливается в исходное положение (обнуляется или принимает значение минимального КПУФ, если они представлены в двоичном виде).

3. На каждом цикле шага 3 производится следующее.

3.1. Просматриваются все КПУФ и, если находится путь $L_q, q = \overline{1,Q}$, для которого выполняется условие (13), то вектор $e \in E_+$. В противном случае $e \in E_-$.

3.2. Текущее состояние вектора е увеличивается на *I* (с помощью сложения по модулю два или по правилам алгебры логики, если вектор *e* вводится в память ЗВМ как логический массив).

4. Если все состояния множества *E* сформированы и идентифицированы, то алгоритм заканчивается. В противном случае возвращаемся на выполнение шага 3.

Формирование множества E_+ или множества E_- с помощью минимальных сечений отказов может быть проведено аналогично. При этом используются следующие соображения. Если для произвольного вектора $e \in I$ все МСО $S_r = \bigwedge_{i \in I^r} \overline{e_i}, r = \overline{1, R}$ такие, что

$$e \supset S_r, \tag{14}$$

т.е. для компонент $e_j, j = \overline{1,n}$ вектора $e = (e_1, e_2, ..., e_n)$ выполняется условие $(\forall j \in I^r (e_j = 0))$, то тогда согласно (12), $\varphi(e_1, e_2, ..., e_n) = 0$ и, следовательно $e \in E_-$. В противном случае $e \in E_+$.

Аналогично алгоритму 3.2 разработаны алгоритмы формирования множества работоспособных и множества отказовых состояний системы с помощью минимальных сечений отказов [6] для системы со сложной структурной организацией, а также алгоритм моделирования указанных множеств для структурного типа «*K*» из «*n*».

4. Разработка алгоритмов анализа структурной надежности многофункциональных СОТС и определение структурной важности элементов системы

Одним из важных вопросов, возникающих при проектировании многофункциональных СОТС и их составных частей, является выбор рациональной структуры системы.

Для определения структурной важности элементов системы введем некоторые обозначения. Пусть, как и раньше: E — множество технических состояний системы: $\varphi(e_1, e_2, ..., e_n) = \{0,1\}$ — функция работоспособности (структурная функция) системы. Обозначим: $\left(1, e^i\right) = \left(e_1, e_{i-1}, 1, e_{i+1}, ..., e_n\right)$, $\left(0, e^i\right) = \left(e_1, e_{i-1}, 0, e_{i+1}, ..., e_n\right)$.

Тогда, если имеет место равенство

$$\varphi = \left(1, e^i\right) - \varphi\left(0, e^i\right) = 1, \tag{15}$$

то будем считать i-й элемент более важным, чем в случае, если

$$\varphi\left(1, e^i\right) - \varphi\left(0, e^i\right) = 0. \tag{16}$$

Из (15) следует, что состояние i-го элемента определяет работоспособность или неработоспособность системы в целом. Если же имеет место (16), то это означает, что отказ i-го элемента не приводит (для данного технического состояния) ни к каким последствиям в смысле работоспособности системы.

Вектор $e = \left(1, e^i\right)$ называется вектором критического пути, если для него выполняется условие (15). Тогда для полного числа векторов критического пути для i-го элемента системы можно ввести следующее обозначение:

$$G_\varphi(i) = \sum_{\{e: e_i = 1\}} \left[\varphi\left(1, e^i\right) - \varphi\left(0, e^i\right)\right]. \tag{17}$$

Функцию $G_\varphi(i)$ назовем структурным весом i-го элемента в системе со структурой φ. Структурный вес элемента характеризует число таких критических работоспособных состояний системы, в которых отказ данного элемента приводит к отказу системы (и наоборот его восстановление приводит к восстановлению системы). Для систем с различным числом элементов один и тот же структурный вес не будет объективно характеризовать структурную важность данного элемента. Целесообразно перейти от абсолютных к относительным единицам и измерять структурную значимость элемента числом от 0 до 1. В результате введем естественную меру структурной важности i-го элемента системы:

$$g_\varphi(i) = \frac{G_\varphi(i)}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{\{e: e_i = 1\}} \left[\varphi\left(1, e^i\right) - \varphi\left(0, e^i\right)\right]. \tag{18}$$

Структурная важность i-го элемента в системе, состоящей из n элементов, есть относительное число таких критических работоспособных состояний системы, в которых отказ данного элемента приводит к отказу системы (и наоборот его восстановление приводит к восстановлению системы) среди всех состояний с $e_i = 1$. Таким образом, для всякой структуры φ можно упорядочить все ее элементы в соответствии со значениями введенной меры их структурной важности $g_\varphi(i), i = \overline{1,n}$.

Для определения структурного веса элементов системы можно воспользоваться следующими соображениями. Сначала массив $G_\varphi(i)$, $i = \overline{1,n}$, обнуляется. Затем в каждом векторе $e \in E_+$, определяются единичные компоненты и, если при этом для вектора $e = (1, e^i)$ имеет место (15), то тогда выполняется операция: $G_\varphi(i) = G_\varphi(i) + 1$. Проделав эту операцию для всех компонент по всем векторам $e \in E_+$, мы определим структурные веса всех элементов. Для определения структурной важности элементов нужно воспользоваться выражением (18). Алгоритм определения структурной важности элементов системы приведен в [6] и здесь приводиться не будет т.к. он является составной частью алгоритмов расчета структурной надежности СОТС.

При синтезе алгоритмов расчета показателей надежности систем со сложной структурной организацией воспользуемся формулами (6)–(8), полученными в модели оценки структурной надежности СОТС, а также методами и алгоритмами описания условий работоспособности системы со сложной структурной организацией.

Алгоритм 3. Расчет показателей структурной надежности системы с помощью КПУФ.

1. По структурной схеме надежности системы с помощью алгоритма 1 или, исходя из условий работоспособности системы, определяются все КПУФ: $L_q = \bigwedge_{i \in I^q} e_i; q = \overline{1,Q}; I^q = \{i : e_i = 1\}$.

2. С помощью КПУФ по алгоритму 2 определяется множество работоспособных E_+ и множество отказовых E_- состояний системы (как правило, множество меньшей мощности).

3. Вычисляются числители A_+ и A_- наработки на отказ и среднего времени восстановления соответственно (формулы (6)–(8)).

3.1. Вычисляется выражение:

$$\mathrm{A} = \prod_{i=1}^{n} \left(m_i^0 + m_i^1\right).$$

3.2. Если $\|E_+\| \le \|E_-\|$, то A_+ и A_- вычисляются по формулам:

$$A_+ = \sum_{e \in E_+} \prod_{j \in I_0} m_j^0 \prod_{j \in I_1} m_j^1, \ A_- = A - A_+ .$$

3.3. Иначе, т.е. если $\|E_+\| > \|E_-\|$, то A_+ и A_- вычисляются по формулам:

$$A_- = \sum_{e \in E_-} \prod_{j \in I_0} m_j^0 \prod_{j \in I_1} m_j^1, \quad A_+ = A - A_- .$$

4. Вычисление $K_Г$ по формуле: $K_Г = \dfrac{A_+}{A}$.

5. Определение структурной важности элементов и вычисление знаменателя B для наработки на отказ и среднего времени восстановления системы.

Массив $G(i), i = \overline{1,n}$, соответствующий структурным весам элементов системы обнуляется. Если выполняется условие $\|E_+\| \le \|E_-\|$, то переход на выполнение п. 5.6, иначе выполнение п. 5.1.

5.1. В каждом состоянии $e \in E_+$ единичные компоненты $e_i = 1$ последовательно заменяются на нулевые $e_i = 0$ т.е. из векторов (I, e^i) строятся векторы $(0, e^i)$.

5.2. Из полученных векторов $(0, e^{i_1}), (0, e^{i_2}), \ldots, (0, e^{i_k})$ определяются векторы, принадлежащие множеству отказовых состояний.

Вектор $(0, e^i) \in E_-$, если для него выполняется условие

$$(\ \exists q)\left((0, e^i) \supset Lq\right)\left(\forall q = \overline{1,Q}\right), \tag{19}$$

т.е. не существует ни одного КПУФ $L_q; q = \overline{1,Q}$ такого, чтобы для вектора $(0, e^i)$ выполнялось условие (19).

5.3. Для каждого вектора $(0, e^i) \in E_-$ выполняется операция

$$G(i) = G(i) + 1 \tag{20}$$

и вычисляется выражение

$$B = B + \prod_{j \in I_0} m_j^0 \prod_{\substack{j \in I_1 \\ j \ne 1}} m_j^1 , \tag{21}$$

в котором наработка на отказ i-го элемента опускается.

Выполнив операции (20) и (21) для всех компонент по всем векторам $e \in E_+$ мы определим структурные веса элементов и вычислим знаменатель наработки на отказ и среднего времени восстановления, реализовав формулу:

$$B = \sum_{e \in E_+} \sum_{e \in E_-} \prod_{j \in I_0} m_j^0 \prod_{\substack{j \in I_1 \\ j \ne i}} m_j^1 .$$

5.4. Переход на выполнение шага 6.

5.5. В каждом состоянии $e \in E_-$ нулевые компоненты $e_i = 0$ последовательно заменяются на единичные $e_i = 1$, т.е. из векторов $\left(0, e^i\right)$ строятся векторы $\left(I, e^i\right)$.

5.6. Из полученных векторов $\left(I, e^{i_1}\right), \left(I, e^{i_2}\right), ..., \left(I, e^{i_k}\right)$ определяются векторы, принадлежащие множеству работоспособных состояний системы.

Вектор $\left(I, e^i\right) \in E_+$, если для него выполняется условие

$$(\exists q)\left(q = \overline{1,Q}\right)\left(\left(1, e^i\right) \supset Lq\right), \tag{22}$$

т.е. существует хоть один КПУФ $L_q, q = \overline{1,Q}$ такой, чтобы для вектора $\left(I, e^i\right)$ выполнялось условие (22).

5.7. Для каждого вектора $\left(I, e^i\right) \in E_+$ выполняется операция (20) и вычисляется выражение

$$B = B + \prod_{\substack{j \in I_0 \\ j \neq i}} m_j^0 \prod_{j \in I_1} m_j^1 , \tag{23}$$

в котором среднее время восстановления *i*-го элемента опускается.

Выполнив операцию (20) и (23) для всех компонент по всем векторам $e \in E_-$ мы определим структурные веса элементов $G(1), G(2), ..., G(n)$ и вычислим знаменатель наработки на отказ и среднего времени восстановления, реализовав формулу:

$$B = \sum_{e \in E_-} \sum_{e^i \in E_+} \prod_{\substack{j \in I_0 \\ j \neq i}} m_j^0 \prod_{j \in I_1} m_j^1 .$$

6. Вычисление показателей надежности системы.

6.1. Наработка на отказ T_O и среднее время восстановления T_B вычисляются по формулам: $T_O = \dfrac{A_+}{B}$, $T_B = \dfrac{A_-}{B}$.

6.2. Для контроля правильности вычисления показателей надежности производится повторное вычисление коэффициента готовности по формуле: $K_Г = \dfrac{T_O}{T_O + T_B}$.

6.3. Вычисляется структурная важность элементов системы: $g(i) = \dfrac{G(i)}{2^{n-1}}, i = \overline{1,n}$.

6.4. Вычисляется вероятность безотказной работы $P(t)$ и коэффициент оперативной готовности $K_{ОГ}(t)$ системы, в случае «быстрого восстановления» элементов $\left(m_i^1 \geq m_i^0\right)$, $i = \overline{1,n}$, по формулам: $P(t) = e^{-\frac{t}{T_O}}$; $K_{ОГ}(t) = K_Г P(t)$, где t — время непрерывной работы системы.

Аналогично алгоритму 3, использующему КПУФ, разработан алгоритм вычисления показателей надежности системы с помощью МСО.

Алгоритм 4. Вычисление показателей надежности системы и определение структурной важности элементов с помощью минимальных сечений отказов.

1. Исходя из условий работоспособности системы, определяются все МСО $S_r = \bigwedge_{i \in I^r} \overline{e_i}; r = \overline{1, R}; I^r = \{i : \overline{e_i} = 0\}$.

2. С помощью МСО определяется множество работоспособных E_+ или множество отказовых E_- состояний системы.

3–4. Совпадают с соответствующими шагами алгоритма 3.

5. Определение структурной важности элементов и вычисление знаменателя для наработки на отказ и среднего времени восстановления.

Если выполняется условие $\|E_+\| \le \|E_-\|$, то выполнение п. 5.1. Иначе выполнение п. 5.5.

5.1. Полностью соответствует п. 5.1 алгоритма 3.

5.2. Из полученных в п. 5.1 векторов $(0, e^{i_1}), (0, e^{i_2}), ..., (0, e^{i_k})$ определяются векторы, которые принадлежат множеству отказовых состояний системы. Вектор $(0, e^i) \in E_-$, если для него выполняется условие:

$$(\exists_r)\left((0, e^i) \supset S_r\right)(r = \overline{1, R}). \tag{24}$$

5.3–5.5. Полностью соответствуют пп. 5.3–5.5 алгоритма 3.

5.6. Из полученных в п. 5.5 векторов $(1, e^{i_1}), (1, e^{i_2}), ..., (1, e^{i_k})$ определяются такие векторы, которые принадлежат множеству работоспособных состояний системы. Вектор $(1, e^i) \in E_+$ если для него выполняется условие:

$$(\ \exists_r)\left((1, e^i) \supset S_r\right)(r = \overline{1, R}). \tag{25}$$

5.7. Полностью соответствует п. 5.7 алгоритма 3.

6. Совпадает с шагом 6 алгоритма 3.

С помощью алгоритмов 2 и 3 можно получить формулы для вычисления показателей надежности системы с последовательным или параллельным, в смысле надежности, соединением элементов, обладающие более низкой трудоемкостью вычислений, чем выражения (6)–(8).

Рассмотрим систему с последовательным соединением элементов. Воспользуемся последовательностью действий, изложенных в алгоритме 3.

1. По ССН определяется КПУФ системы: $L_1 = e_1, e_2, ..., e_n$.

2. Определяется множество работоспособных состояний системы $E_+ = \{11...1\}$.

3. Находятся выражения для определения числителей A_+ и A_- для наработки на отказ и среднего времени восстановления:

$$A = \prod_{i=1}^{n}\left(m_i^0 + m_i^1\right);\ A_+ = \sum_{e \in E_+} \prod_{j \in I_0} m_j^0 \prod_{j \in I_1} m_j^1 = \prod_{j=1}^{n} m_j^1;\ A_- = \prod_{i=1}^{n}\left(m_i^0 + m_i^1\right) - \prod_{i=1}^{n} m_i^1 .$$

4. Определяется формула для вычисления коэффициента готовности

$$K_Г = \frac{A_+}{A} = \frac{\prod_{i=1}^{n} m_i^1}{\prod_{i=1}^{n}\left(m_i^0 + m_i^1\right)}. \qquad (26)$$

5. Определяются формулы для вычисления наработки на отказ и среднего времени восстановления системы. Нахождение структурной важности элементов системы (табл. 1).

Таблица 1.

Диаграмма переходов $e \in E_+ \to \left(0, e^i\right) \in E$	Определение векторов $\left(0, e^i\right) \in E_-$	Выполнение операции $G(i) = G(i) + 1$	Определение множителей $b = \prod_{j \in I_1} m_j^0 \prod_{\substack{j \in I_0 \\ i \neq j}} m_j^1$
1	2	3	4
$11\ldots11 \xrightarrow{1} 11\ldots10$	$\{11\ldots10\} \in E_-$	$G(1) = G(1) + 1 = 1$	$m_2^1 \ldots m_{n-1}^1 m_n^1$
$11\ldots11 \to 11\ldots01$	$\{11\ldots01\} \in E_-$	$G(2) = G(2) + 1 = 1$	$m_1^1 m_3^1 \ldots m_n^1$
………	…………	………………	…………
$11\ldots11 \xrightarrow{n} 01\ldots11$	$\{01\ldots11\} \in E_-$	$G(n) = G(n) + 1 = 1$	$m_1^1 m_2^1 \ldots m_{n-1}^1$

5.1. Строится диаграмма переходов из векторов $e \in E_+$ в векторы $\left(0, e^i\right)$.

5.2. Определяются векторы $\left(0, e^i\right) \in E_-$. Как видно из п. 2 табл. 1 все такие векторы принадлежат множеству E_- отказовых состояний системы.

5.3. Выполнение операции $G(i) = G(i) + 1,\ i = \overline{1, n}$, для всех векторов $\left(0, e^i\right) \in E_-$ (п. 3 табл. 1) и определение выражения для знаменателя наработки на отказ и среднего времени восстановления (п. 4 табл. 1):

$$B = \sum_{e \in E_+} \sum_{e^i \in E_-} \prod_{j \in I_0} m_j^0 \prod_{j \in I_1} m_l^1 = m_2^1 \ldots m_{n-1}^1 m_n^1 + m_1^1 m_3^1 \ldots m_n^1 \ldots + m_1^1 m_2^1 \ldots m_{n-1}^1 =$$

$$= \frac{\prod_{i=1}^{n} m_i^1}{m_1^1} + \frac{\prod_{i=1}^{n} m_i^1}{m_2^1} + \ldots + \frac{\prod_{i=1}^{n} m_i^1}{m_n^1} = \prod_{i=1}^{n} m_i^1 \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{m_j^1} \right).$$

6. Определение формул для вычисления наработки на отказ T_O и среднего времени восстановления T_B:

$$T_O = \frac{A_+}{B} = \frac{\prod_{i=1}^{n} m_i^1}{\prod_{i=1}^{n} m_i^1 \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{m_j^1}} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{m_j^1}}, \qquad (27)$$

$$T_B = \frac{A}{B} = \frac{\prod\limits_{i=1}^{n}\left(m_i^0 + m_i^1\right) - \prod\limits_{i=1}^{n} m_i^1}{\prod\limits_{i=1}^{n} m_i^1 \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{m_j^1}}. \tag{28}$$

Аналогичным образом определяются формулы для вычисления показателей надежности системы с параллельным соединением элементов:

$$K_Г = \frac{\prod\limits_{i=1}^{m}\left(m_i^0 + m_i^1\right) - \prod\limits_{i=1}^{n} m_i^0}{\prod\limits_{i=1}^{n}\left(m_i^0 + m_i^1\right)}, \tag{29}$$

$$T_O = \frac{\prod\limits_{i=1}^{n}\left(m_i^0 + m_i^1\right) - \prod\limits_{i=1}^{n} m_i^0}{\prod\limits_{i=1}^{n} m_i^0 \left(\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{m_j^0}\right)}, \tag{30}$$

$$T_B = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{m_i^0}}. \tag{31}$$

Трудоемкость вычисления показателей надежности структур с последовательным и параллельным соединением элементов имеет линейный порядок, т.е. $0(n)$, где n — число элементов системы.

С помощью методики, изложенной в алгоритмах 3 и 4, можно получить формулы для вычисления показателей надежности последовательно-параллельных структур различной сложности. Однако останавливаться на этом вопросе не будем, так как расчет надежности таких структур с помощью декомпозиции легко сводится к последовательным и параллельным схемам подсистем и расчеты при этом являются значительно проще.

Алгоритм 5. Вычисление показателей надежности системы методом оперативного (направленного) моделирования состояний работоспособности системы с помощью кратчайших путей успешного функционирования.

1. Исходя из структурной схемы надежности и критериев отказа, определяются все КПУФ системы: $L_q = \bigwedge\limits_{i \in I^q} e_i; q = \overline{1,Q}; I_q = \{i : e_i = 1\}$.

2. КПУФ системы заменяются двоичными векторами $d^q = \left(d_1^q, d_2^q, \ldots, d_n^q\right)$, где
$$d_i^q = \begin{cases} 1, & i \in I^q \\ 0, & i \in I^q \end{cases}.$$

3. Векторы $d^q, q = \overline{1,Q}$ упорядочиваются по неубыванию числа единиц в их компонентах, в результате чего получаем список $S = \{d^q\}_{q=1}^{Q}$.

4. По векторам d^q, $q=\overline{1,Q}$, списка S производится оперативное (направленное) моделирование состояний работоспособности системы и для каждого, впервые смоделированного вектора $e \in E_+$, включая и сам вектор КПУФ $d^q \subset e$, вычисляются слагаемые числителя и знаменателя показателей надежности. Для этого выполняются следующие операции.

4.1. Фиксируются разряды с единицами в векторах КПУФ списка $S=\{d^q\}_{q=1}^{Q}$. На каждом цикле производится последовательное прибавление к вектору d^q, $q=\overline{1,Q}$, единицы по правилам алгебры логики. При этом разряды с фиксированными единицами не учитываются. Полученный в результате этой операции вектор $e \in E_+$ последовательно сравнивается с векторами КПУФ $d^1, d^2, ..., d^{q-1}$ и, если выполняется условие ($\exists r)(e \supset d^r)(\forall r=\overline{1,q-1})$, т.е. если единичные компоненты ни одного из перечисленных векторов не равны единичным компонентам вектора *e*, то вектор *e* смоделирован впервые, и для него осуществляется переход на выполнение п. 4.2. В противном случае моделируется следующее состояние работоспособности системы.

4.2. Для технического состояния работоспособности системы $e \in E_+$, смоделированного в п. 4.1, вычисляются выражения:

$$AS=\prod_{i \in I_0} m_i^0 \prod_{i \in I_1} m_i^1,\ \ A_+ = A_+ + AS\ .$$

4.3. Единичные компоненты $e_i = 1$ вектора *e* последовательно заменяются на нулевые $e_i = 0$ т.е. из векторов $(1, e^i)$ строятся векторы $(0, e^i)$. В результате этой операции получим столько векторов $(0, e^i)$, сколько было единичных компонент в исходном векторе *e*.

4.4. Из полученных векторов $(0, e^{i_1}), (0, e^{i_2}), ..., (0, e^{i_k})$ определяются векторы, принадлежащие множеству отказовых состояний системы.

Вектор $(0, e^i) \in E_-$, если для него выполняется условие ($\exists q)(0, e^i) \supset d^q (\forall q=\overline{1,Q})$, т.е. единичные компоненты ни одного из векторов КПУФ d^q, $q=\overline{1,Q}$, не равны единичным компонентам вектора *e*.

4.5. Для каждого вектора $(0, e^i) \in E_-$ выполняется операция $G(i) = G(i) + 1$ и вычисляются выражения:

$$ДEN=\sum_{e^i \in E_-} \prod_{j \in I_0} m_j^0 \prod_{\substack{j \in I_1 \\ j \neq 1}} m_j^i,\ \ B = B + ДEN\ .$$

4.6. Если направленное моделирование состояний работоспособности системы проведено по всем векторам КПУФ, то производится переход на выполнение шага 5. Иначе переход на выполнение п. 4.1.

5. Определяются показатели надежности системы с помощью следующих операций.

5.1. Вычисляется выражение $A=\prod_{i=1}^{n}\left(m_i^0+m_i^1\right)$.

5.2. Вычисляется коэффициент готовности $K_Г$ системы по формуле: $K_Г=\frac{A_+}{A}$.

5.3. Вычисляются наработка на отказ и среднее время восстановления $T_В$ по формулам: $T_O=\frac{A_+}{B}$, $T_В=\frac{A-A_+}{B}$.

5.4. Для контроля правильности определения показателей надежности системы повторно вычисляется коэффициент готовности по формуле $K_Г=\frac{T_O}{T_O+T_В}$.

5.5. Вычисляется структурная важность элементов системы $g(i)=\frac{G(i)}{2^{n-1}}$, $i=\overline{1,n}$.

5.6. Вероятность безотказной, работы $P(t)$ и коэффициент оперативной готовности $K_{ОГ}(t)$ системы, в случае «быстрого восстановления» ее элементов $\left(m_i^1>>m_i^0\right)$, $i=\overline{1,n}$, вычисляются по приближенным формулам: $P(t)=e^{-\frac{t}{T_O}}$, $K_{ОГ}(t)=K_Г P(t)$, где t — время оперативной работы системы.

Аналогично алгоритму 5, основанному на использовании КПУФ, разработан алгоритм вычисления показателей надежности системы с помощью МСО.

Алгоритм 6. Вычисление показателей надежности системы методом оперативного (направленного) моделирования состояний отказа с помощью минимальных сечений отказа.

1. Исходя из структурной схемы надежности и критериев отказа, определяются все МСО системы: $S_q=\bigwedge_{i\in I^Q}\overline{e^i}$; $I_0^q=\left\{i:\overline{e_i}=0\right\}$, $q=\overline{1,Q}$.

2. Минимальные сечения отказа системы заменяются двоичными векторами $d^q=\left(d_1^q,d_2^q,\ldots,d_n^q\right)$, $q=\overline{1,Q}$, где

$$d_i^q=\begin{cases}0, & i\in I^q\\ 1, & i\in I_0^q\end{cases}.$$

3. Векторы $d^q, q=\overline{1,Q}$, упорядочиваются по неубыванию числа нулей в их компонентах. В результате этой операции получим список:

$$S=\left\{d^q\right\}_{q=1}^{Q}.$$

4. По векторам $d^q, q=\overline{1,Q}$, списка S производится направленное моделирование состояний отказа системы, и для каждого впервые смоделированного вектора $e \in E_-$, включая и вектор МСО d^q, вычисляются слагаемые числителя и знаменателя показателей надежности. Для этого выполняются следующие операции.

4.1. Фиксируются разряды с нулями в векторах списка $S=\left\{d^q\right\}_{q=1}^{Q}$. На каждом цикле производится последовательное вычитание единицы по правилам алгебры логики. При этом разряды с фиксированными нулями не учитываются. Полученный в результате этой операции вектор $e \in E_-$ последовательно сравнивается с векторами МСО $d^1, d^2, ..., d^{q-1}$, и если выполняется условие $(\ \exists r)\left(e \supset d^r\right)\left(\forall r=\overline{1,q-1}\right)$, то вектор e смоделирован впервые, и для него осуществляется переход на выполнение п. 4.2. В противном случае моделируется следующее состояние отказа $e^{i_k} \in E_-$ системы.

4.2. Для технического состояния отказа системы, смоделированного в п. 4.2, вычисляются выражения: $AS=\prod_{i \in I_0} m_i^0 \prod_{i \in I_1} m_i^1$, $A_-=A_-+AS$.

4.3. Нулевые компоненты $e_i=0$ вектора e последовательно заменяются на единичные $e_i=1$, т.е. из векторов $\left(0, e^i\right)$ формируются векторы $\left(1, e^i\right)$.

4.4. Из полученных векторов $\left(1, e^{i_1}\right),\left(1, e^{i_2}\right), \ldots,\left(1, e^{i_k}\right)$ определяются векторы, принадлежащие множеству работоспособных состояний системы. Вектор $\left(1, e^i\right) \in E_+$, если для него выполняется условие $(\ \exists q)\left(\left(1, e^i\right) \supset dq\right)\left(\forall q=\overline{1,Q}\right)$.

4.5. Для каждого вектора $\left(1, e^i\right) \in E_+$ выполняется операция $G(i)$ = $G(i)$ + 1 и вычисляется выражение $ДEN=\sum_{e^i \in E_+} \prod_{\substack{j \in I_0 \\ j \neq i}} m_j^0 \prod_{j \in I_1} m_j^1$.

4.6. Если направленное моделирование состояний отказа системы проведено по всем МСО, то производится переход на выполнение шага 5. В противном случае переход на выполнение п. 4.1.

5. Соответствует шагу 5 алгоритма 5, за исключением п. 5.3, в котором наработка на отказ и среднее время восстановления вычисляются по формулам:

$$T_O=\frac{A-A_-}{B},\ T_B \frac{A_-}{B}.$$

Оценим трудоемкость алгоритма 6. Если ССН системы задана с помощью орграфа без контуров, то шаги 1, 2 имеют трудоемкость $O(m+n)$, где m — число вершин, а n — число дуг орграфа. Для выполнения шага 3, если применить сортировку вычеркиванием, необходима трудоемкость $O(Q)$, где Q — число КПУФ системы. Трудоемкость оперативного (направленного) моделирования состояний работоспособности равна $O\left(\sum_{q=1}^{Q} 2^{r_q}\right)$, где r_q — число нулей в векторе КПУФ

d^q, $q = \overline{1,Q}$. Число необходимых сравнений не больше *Q*. Следовательно, общая трудоемкость алгоритма 6 равна:

$$O\left(m+n+Q+Q\cdot\sum_{q=1}^{Q}2^{r_q}\right)\approx O\left(Q\sum_{q=1}^{Q}2^{r_q}\right).$$

Для оценки выигрыша в вычислительной трудоемкости, который дает алгоритм 6 по сравнению с алгоритмом 3, воспользуемся предположениями, основанными на практике. Для сложных ССН, как правило, выполняются следующие допущения: $Q=(0{,}5\div 5)n$, $r_q=(0{,}4\div 0{,}6)n$. Примем для определенности, что $q=n$, $r_q=\frac{1}{2}n$, $q=\overline{1,Q}$. Тогда общая трудоемкость алгоритма 6 равна:

$$O\left(n\sum_{q=1}^{n}2^{\frac{n}{2}}\right)=O\left(n^2 2\frac{n}{2}\right).$$

Сравнительная трудоемкость алгоритмов 3 и 6 приведена в табл. 2.

Таблица 2

Число элементов	Временная трудоемкость		Эффект снижения трудоемкости
	алгоритм 3	алгоритм 6	
6	384	188	1,3
10	10240	3200	3,2
14	$2{,}3\cdot10^5$	$2{,}5\cdot10^4$	9,2
18	$4{,}7\cdot10^6$	$1{,}6\cdot10^5$	$29=2{,}9\cdot10$
22	$9{,}2\cdot10^7$	$9{,}9\cdot10^5$	$93=9{,}3\cdot10$
26	$1{,}7\cdot10^9$	$4{,}7\cdot10^6$	$361=3{,}6\cdot10^2$
30	$3{,}2\cdot10^{10}$	$2{,}9\cdot10^7$	$1100=1{,}1\cdot10^3$

Эффект снижения вычислительной трудоемкости при использовании оперативного моделирования состояний работоспособности для систем из 20–30 элементов со сложным соединением равен 2–3 порядка.

Полученные аналитические соотношения и алгоритмы инвариантны к широким классам законов распределения времен безотказной работы и времен восстановления подсистем и позволяют проводить анализ надежности систем со сложной структурной организацией при произвольных законах распределения указанных времен в условиях реальных данных об отказах и временах восстановления подсистем.

1. *Организация* структуры системы обработки информации и управления / А.Г. Додонов, В.Г. Путятин, А.Н. Буточнов [и др.] // Математические машины и системы. — 2014. — № 4. — С. 18–34.

2. *Построение* системы организационного управления авиационным комплексом / Додонов А.Г., Ландэ Д.В., Путятин В.Г., Куценко С.А. // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2014. — Т. 16, № 1. — С. 28–43.

3. *Королюк В.С.* Процессы марковского восстановления в задачах надежности систем / В.С. Королюк, А.Ф. Турбин. — К.: Наук. думка, 1982. — 235 с.

4. *Королюк В.С.* Полумарковские процессы и их приложения / В.С. Королюк, А.Ф. Турбин. — К.: Наук. думка, 1976. — 182 с.

5. *Зинюк М.И.* Расчет показателей надежности информационно-вычислительных систем при произвольном законе распределения времен безотказной работы / М.И. Зинюк, В.Г. Путятин, В.С. Шульга // Автоматика. — 1986. — № 4. — С. 49–52.

6. *Додонов А.Г.* Оценка показателей надежности информационно-управляющих систем с помощью кратчайших путей успешного функционирования / А.Г. Додонов, В.Г. Путятин, В.А. Валетчик // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2003. — Т. 5, № 1. — С. 107–118.

7. *Рябинин И.А.* Логико-вероятностные методы исследования надежности структурно-сложных систем / И.А. Рябинин, Г.Н. Черкесов. — М.: Радио и связь, 1981. — 286 с.

8. *Кузнецов Н.Ю.* Общий подход к нахождению нестационарных характеристик надежности систем аналитико-статистическими методами / Н.Ю. Кузнецов // Доклады АН УССР. Сер. А. — 1985. — № 4. — С. 66–69.

9. *Сильвестров Д.С.* Полумарковские процессы с дискретным множеством состояний / Д.С. Сильвестров. — М.: Сов. радио, 1980. — 246 с.

10. *Королюк В.С.* Математические основы фазового укрупнения сложных систем / В.С. Королюк, А.Ф. Турбин. — К.: Наук. думка, 1978. — 110 с.

11. *Кузнецов В.Н.* Полумарковские модели восстанавливаемых систем / Кузнецов В.Н., Турбин А.Ф., Цатурян Г.Ж. — К.: Ин-т математики, 1981. — 44 с. — (Препринт 81-11 / АН УССР. Ин-т математики).

12. *Турбин А.Ф.* Асимптотические свойства статистик / А.Ф. Турбин, А.Г. Ханин // Доклады АН УССР. Сер. А. — 1987. — № 11. — С. 15–17.

Поступила в редакцию 19.02.2015