УДК 517.9:519.6

А.В. ГЛАДКИЙ

ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ С УСЛОВИЯМИ НЕИДЕАЛЬНОГО КОНТАКТА

Аннотация. Рассмотрена задача численного моделирования и оптимизации волновых процессов в неоднородных средах с условиями неидеального контакта на основе параболического волнового уравнения типа Шредингера. Сформулирован критерий оптимальности, исследованы дифференциальные свойства оптимизационной задачи. Предложен численный метод для моделирования и оптимизации акустических полей в неоднородных средах.

Ключевые слова: акустическое поле, уравнение типа Шредингера, экстремальная задача, разностная схема, устойчивость.

В последние десятилетия в акустике океана для решения задач дистанционного зондирования и акустического мониторинга получили развитие численные и численно-аналитические методы математического моделирования распространения звуковых волн [1–15]. Значительный интерес, прежде всего для многих разделов геофизики и акустики океана, представляют вопросы формирования акустических полей с заданными свойствами, а также исследование особенностей распространения звуковых волн в неоднородных волноводах с учетом тонких включений. Математические трудности, возникающие при решении таких задач, можно преодолеть, используя методику аппроксимации волнового уравнения Гельмгольца параболическими уравнениями [3–7], что приводит к необходимости разработки численных методов для решения прямых и экстремальных задач для уравнений типа Шредингера с комплекснозначным несамосопряженным оператором.

В статье рассматриваются вопросы численного моделирования и оптимизации акустических полей на базе параболического волнового уравнения в осесимметричном неоднородном двухслойном волноводе с кусочно-непрерывными (кусочно-постоянными) акустическими параметрами и условиями неидеального контакта, что позволяет учесть наличие тонких включений в волноводе. Предложен численный метод решения прямой и оптимизационной задач, изучены дифференциальные свойства функционала качества, исследована устойчивость разностной схемы для прямой и сопряженной краевых задач с комплекснозначным несамосопряженным оператором.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В цилиндрических координатах (r, z), где ось z направлена вертикально вниз, рассмотрим задачу определения звукового поля в подводном слоисто-неоднородном осесимметричном волноводе G_H, полагая для определенности, что волновод двухслойный с горизонтальной границей раздела сред γ:

$$G_H = G_1 \cup G_2 \cup \gamma = \{(r, z), 0 < r < \infty, 0 < z < H\},\ \gamma = \{(r, z), 0 < r < \infty,\ z = \xi\},$$

$$G_1 = \{(r, z), 0 < r < \infty, 0 < z < \xi\},\ G_2 = \{(r, z), 0 < r < \infty, \xi < z < H\}.$$

Предположим, что верхний слой G_1 с абсолютно мягкой верхней границей $z = 0$ заполнен средой с постоянной плотностью ρ_1, скоростью звука $c_1(r, z)$ и коэффициентом поглощения $\nu_1(r, z) \geq 0$. Нижний слой G_2 характеризуется мягкой

© А.В. Гладкий, 2016

границей $z = H$, постоянной плотностью ρ_2, скоростью звука $c_2(r, z)$, коэффициентом поглощения $\nu_2(r, z) \geq 0$.

Таким образом, акустические параметры можно описать соотношениями

$$c(r, z) = \begin{cases} c_1(r, z), & 0 < z < \xi, \\ c_2(r, z), & \xi < z < H; \end{cases} \quad \nu(r, z) = \begin{cases} \nu_1(r, z), & 0 < z < \xi, \\ \nu_2(r, z), & \xi < z < H; \end{cases}$$

$$\rho(z) = \begin{cases} \rho_1, & 0 < z < \xi, \\ \rho_2, & \xi < z < H. \end{cases}$$

Комплекснозначное акустическое давление $P(r, z)$, создаваемое гармоническим источником в двухслойном неоднородном осесимметричном волноводе с тонкой прослойкой, вне источника удовлетворяет уравнению Гельмгольца [1, 5]

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial P}{\partial r}\right) + \rho(z)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho(z)}\frac{\partial P}{\partial z}\right) + k_0^2\left(\frac{c_0}{c(r, z)}\right)^2 (1 + i\nu(r, z))P = 0,$$

$$z \in (0, \xi) \cup (\xi, H), \ 0 < r < \infty, \tag{1}$$

условию неидеального контакта

$$\left\{\frac{1}{\rho(z)}\frac{\partial P}{\partial z}\right\}^+ = \alpha[P]|_{z=\xi}, \quad \left\{\frac{1}{\rho(z)}\frac{\partial P}{\partial z}\right\}^- = \alpha[P]|_{z=\xi}, \tag{2}$$

граничным условиям

$$P|_{z=0} = 0, \ P|_{z=H} = 0, \tag{3}$$

а также условиям излучения на бесконечности. Здесь $P(r, z)$ — комплекснозначное решение, $i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица, $k_0 = \omega / c_0$ — волновое число, c_0 — некоторое значение скорости звука $c(r, z)$, ω — частота, $n^2(r, z) = (c_0 / c(r, z))^2 (1 + i\nu(r, z))$ — комплекснозначный коэффициент преломления, $[f(r, z)]|_{z=\xi} = f(r, \xi + 0) - f(r, \xi - 0)$, $\{f\}^{\pm} = f(r, \xi \pm 0) = f(r, \xi^{\pm})$, $\alpha > 0$ — коэффициент, определяемый параметрами тонкого включения и учитывающий влияние тонкой прослойки с плотностью ρ_0 и толщиной d путем замены ее линией раздела γ, $\nu(r, z) \geq 0$ — коэффициент поглощения.

Из условий (2) следует разрывность акустического давления, а также непрерывность нормальной компоненты скорости частиц на границе раздела сред. Следуя [16], можно показать, что условия неидеального контакта на линии раздела γ описывают влияние тонкой прослойки с плотностью ρ_0 и толщиной d на распространение акустической энергии. Отметим также, что обычные условия идеального контакта [5], выражающие непрерывность давления и нормальной компоненты скорости частиц на границе раздела сред, можно получить из условий (2) при $\alpha \to \infty$.

Представляя акустическое давление при $k_0 r >> 1$ в виде произведения функции Ханкеля первого рода нулевого порядка $H_0^{(1)}(\cdot)$ и плавной амплитуды $p(r, z)$, подставляем выражение $P(r, z) = H_0^{(1)}(k_0 r) p(r, z)$ в уравнение (1). Учитывая, что функция Ханкеля $y = H_0^{(1)}(k_0 r)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y'' + \frac{1}{r} y' + k_0^2 y = 0$, а также ее асимптотическое поведение при

$k_0 r >> 1$, $H_0^{(1)}(k_0 r) \approx e^{ik_0 r} / \sqrt{k_0 r}$, для комплекснозначной амплитуды $p(r, z)$ получаем эллиптическое волновое уравнение

$$2ik_0 \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \rho(z) \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho(z)} \frac{\partial p}{\partial z} \right) + k_0^2 (n^2(r, z) - 1) p = 0.$$

Пренебрегая в этом уравнении членом $\partial^2 p / \partial r^2$, приходим к решению параболического уравнения типа Шредингера с комплекснозначным несамосопряженным оператором [3]

$$2ik_0 \frac{\partial p}{\partial r} + \rho(z) \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho(z)} \frac{\partial p}{\partial z} \right) + k_0^2 (n^2(r, z) - 1) p = 0\,,$$

$$z \in (0, \xi) \bigcup (\xi, H)\,, \quad r_0 < r < \infty, \tag{4}$$

удовлетворяющего условиям неидеального контакта на границе раздела сред γ

$$\left\{ \frac{1}{\rho(z)} \frac{\partial p}{\partial z} \right\}^+ = \alpha [p]|_{z=\xi}\,, \quad \left\{ \frac{1}{\rho(z)} \frac{\partial p}{\partial z} \right\}^- = \alpha [p]|_{z=\xi}\,, \tag{5}$$

граничным условиям

$$p|_{z=0} = 0, \;\; p|_{z=H} = 0 \tag{6}$$

и начальному условию

$$p|_{r=r_0} = u(z). \tag{7}$$

Отметим, что узкоугольное параболическое уравнение (4) описывает распространение акустических волн в направлениях, близких к горизонтальному.

Из (2), (3) с учетом $P(r, z) = H_0^{(1)}(k_0 r) p(r, z)$ вытекают соответствующие условия сопряжения и краевые условия (5), (6) для параболического волнового уравнения (4).

Математическую постановку оптимизационной задачи сформулируем как решение вариационной задачи минимизации некоторого функционала в целях обеспечения минимального отклонения характеристик акустического поля от заданных в некоторой области волновода. При этом в качестве управления принимается начальное распределение решения краевой задачи. Тогда одну из экстремальных задач можно сформулировать следующим образом.

Требуется минимизировать функционал

$$J_\varepsilon(u) = \int_0^H \frac{1}{\rho(z)} \beta(z) \,|\, p(R, z) - p_0(z)|^2 dz + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^H \frac{1}{\rho(z)} |\, u(z)|^2 \, dz \tag{8}$$

при условии, что $p(r, z; u)$ является решением краевой задачи (4)–(7). Здесь $p(R, z) = p(R, z; u)$ — решение задачи (4)–(7) при $r = R$, $r_0 < R < \infty$, соответствующее управлению $u(z)$; $\beta(z) > 0$ — заданная непрерывная вещественная весовая функция; $p_0(z)$ — заданная комплекснозначная функция; $u(z)$ — комплекснозначное управление из некоторого выпуклого замкнутого множества $U = \{ u(z) \in L_{2,1/\rho}(\Omega), \Omega = (0, \xi) \bigcup (\xi, H)\}$, где $L_{2,1/\rho}(\Omega)$ — пространство комплекснозначных функций, интегрируемых с квадратом и весом $1/\rho$ в области Ω. Скалярное произведение и норма в $L_{2,1/\rho}(\Omega)$ определяются по формулам

$$(u, v) = \int_{\Omega} \frac{1}{\rho(z)} u(z) \overline{v}(z) dz, \quad ||u|| = (u, u)^{1/2} = \left(\int_{\Omega} \frac{1}{\rho(z)} |u(z)|^2 \, dz \right)^{1/2},$$

где черта означает комплексное сопряжение.

Отметим, что для выделения ограниченного решения в функционал качества (8) добавлен стабилизирующий функционал $\frac{1}{\varepsilon^2} ||u||^2$ при некотором заданном $\varepsilon > 0$.

Таким образом, оптимизационная задача состоит в определении комплекснозначного управления $u \in U$, при котором функционал (8) достигает своей нижней грани

$$J_{\varepsilon}(w) = \inf_{u \in L_{2,1/\rho}(\Omega)} J_{\varepsilon}(u). \tag{9}$$

РАЗНОСТНАЯ СХЕМА

Для численного моделирования звуковых полей на основе начально-краевой задачи (4)–(7) с комплекснозначным несамосопряженным оператором наиболее удобным является метод сеток. Известно, что использование этого метода требует исследования устойчивости, сходимости и оценки скорости сходимости решения разностной схемы [5, 17]. Следует отметить, что при рассмотрении разностных схем наиболее важным является вопрос устойчивости по начальным данным, поскольку свойство устойчивости гарантирует невозможность накопления ошибок, допущенных на некотором шаге вычислений.

Рассмотрим более подробно некоторые из этих вопросов.

В области G_H для численного исследования дифференциальной задачи (4)–(7) введем равномерную сетку, предполагая соизмеримость отрезков $(0, \xi)$, (ξ, H) и учитывая разрывный характер решения $p(r, z)$ при $z = \xi$:

$$\overline{\omega}_{\tau h} = \overline{\omega}_{\tau} \times \overline{\omega}_{h} = \{(r, z), \, r \in \overline{\omega}_{\tau}, \, z \in \overline{\omega}_{h}\},$$

$$\overline{\omega}_{\tau} = \{r = r_m = r_0 + m\tau, \, m = 0, 1, 2, \ldots\}, \quad \omega_{\tau} = \{r = r_m \in \overline{\omega}_{\tau}, \, m \geq 1\},$$

$$\overline{\omega}_{h} = \{z = 0, h, \ldots, (n_1 - 1)h, \xi^{-}, \, \xi^{+}, \, (n_1 + 1)h, \ldots, H, h = \xi / n_1 = H / N\},$$

$$\omega_{h} = \{z \in \overline{\omega}_{h}, \;\; z \neq 0, \, z \neq H\}.$$

В силу разрывности сеточная функция $y = y(r, z)$, аппроксимирующая $p(r, z)$, имеет в узлах $(r, \xi^{\pm})$ два значения, которые обозначим $y^{\pm} = y(r_m, \xi \pm 0) = y(r_m, \xi^{\pm}) = y_{\xi^{\pm}}$.

Используя интегро-интерполяционный метод [17], уравнению (4) поставим в соответствие в узлах (r, z), $r = r_m \in \overline{\omega}_{\tau}$, $z \neq \xi^{\pm}$, двухслойное разностное уравнение

$$4ik_0 b(z) y_r + (a\hat{y}_{\bar{z}})_z + (ay_{\bar{z}})_z + d(r, z)(\hat{y} + y) = 0, \tag{10}$$

где введены следующие обозначения:

$$y = y(r, z) = y(r_m, z_k) = y_k^m = y^m = y_k, \quad \hat{y} = y_k^{m+1}, \quad y_r = (\hat{y} - y) / h,$$

$$y_z = (y_{k+1} - y_k) / h, \;\; y_{\bar{z}} = (y_k - y_{k-1}) / h,$$

$$(ay_{\bar{z}})_{z,k} = \frac{1}{h^2} (a_{k+1} y_{k+1}^m - (a_{k+1} + a_k) y_k^m + a_k y_{k-1}^m), \;\; a_k = a(z_k).$$

Коэффициенты уравнения (10) определяются формулами

$$a(z)=\frac{1}{\rho(z-0{,}5h)}=\begin{cases}\dfrac{1}{\rho_1}, & h\le z\le\xi^-,\\ \dfrac{1}{\rho_2}, & \xi^+<z\le H,\end{cases}\qquad b(z)=\begin{cases}a(z), & z\ne\xi^+,\\ a(z+h), & z=\xi^+,\end{cases}$$

$$d(r,z)=\frac{k_0^2\tilde{\varepsilon}(r,z)}{\rho(z)},\;\; \tilde{\varepsilon}(r,z)=\varepsilon(r+\tau/2,z),\;\; \varepsilon(r,z)=n^2(r,z)-1.$$

Условия сопряжения (5) аппроксимируем разностными уравнениями

$$4ik_0ba(z)y_r+\frac{2}{h}[\alpha(\hat{y}^+-\hat{y}^-+y^+-y^-)-a(z)(\hat{y}_{\bar{z}}+y_{\bar{z}})]+d(r,z)(\hat{y}+y)=0,\; z=\xi^-,$$

$$4ik_0a(z+h)y_r+\frac{2}{h}[-\alpha(\hat{y}^+-\hat{y}^-+y^+-y^-)+a(z+h)(\hat{y}_z+y_z)]+$$
$$+d(r,z)(\hat{y}+y)=0,\quad z=\xi^+. \tag{11}$$

Пользуясь разложением в ряд Тейлора в точке (r,z), $r=r_m+0{,}5\tau$, $z\in\omega_h$, легко показать, что уравнения (10), (11) аппроксимируют дифференциальное уравнение (4) и условия сопряжения (5) с погрешностью $O(\tau^2+h^2)$.

Таким образом, исходной задаче (4)–(7) поставим в соответствие разностную задачу

$$4ik_0b(z)y_r+(a\hat{y}_{\bar{z}})_z+(ay_{\bar{z}})_z+d(r,z)(\hat{y}+y)=0,\; (r,z), r=r_m\in\overline{\omega}_\tau,\; z\ne\xi^\pm, \tag{12}$$

$$4ik_0b(z)y_r+\frac{2}{h}[\alpha(\hat{y}^+-\hat{y}^-+y^+-y^-)-a(z)(\hat{y}_{\bar{z}}+y_{\bar{z}})]+$$
$$+d(r,z)(\hat{y}+y)=0,\; z=\xi^-, \tag{13}$$

$$4ik_0b(z)y_r+\frac{2}{h}[-\alpha(\hat{y}^+-\hat{y}^-+y^+-y^-)+a(z+h)(\hat{y}_z+y_z)]+$$
$$+d(r,z)(\hat{y}+y)=0,\; z=\xi^+, \tag{14}$$

$$y(r,0)=y(r,H)=0,\quad r\in\overline{\omega}_\tau, \tag{15}$$

с заданным начальным условием $y(r_0,z)$.

Для исследования свойств разностной схемы (12)–(15) введем гильбертово пространство $H_h=L_2(\omega_h)$ комплекснозначных функций, заданных на сетке $\overline{\omega}_h$, обращающихся в нуль в граничных узлах и удовлетворяющих разностным условиям сопряжения. Скалярное произведение и норму в H_h определим по формулам

$$(\varphi,\psi)=(\varphi,\psi)_1+(\varphi,\psi)_2+\frac{h}{2}\varphi(\xi^-)\overline{\psi}(\xi^-)+\frac{h}{2}\varphi(\xi^+)\overline{\psi}(\xi^+),\;\; ||\varphi||=(\varphi,\varphi)^{1/2},$$

где $(\varphi,\psi)_1=\sum\limits_{k=1}^{n_1-1}h\varphi_k\overline{\psi}_k$, $(\varphi,\psi)_2=\sum\limits_{k=n_1+1}^{N-1}h\varphi_k\overline{\psi}_k$, а черта означает комплексное сопряжение.

Учитывая соотношения (12)–(15), задаче (4)–(7) можно поставить в соответствие двухслойную неявную разностную схему в операторной форме

$$4ik_0 By_r + A(\hat{y}+y) + C(\hat{y}+y) = 0, \quad r \in \overline{\omega}_\tau, \tag{16}$$

$$y^0 \text{ задано.} \tag{17}$$

Здесь y^0, $y \in H_h$, $y^0 = \{u(z), z \in \omega_h\}$, $y = y(r) = \{y(r,z), z \in \omega_h\}$, $B = b(z)E$, $C = d(r,z)E$, где E — тождественный оператор, а линейный комплекснозначный оператор A действует в пространстве H_h и определяется соотношениями

$$Ay = \begin{cases} (ay_{\bar{z}})_z, & z \in \omega_h,\ z \neq \xi^\pm, \\ \dfrac{2}{h}[\alpha(y^+ - y^-) - a(z)y_{\bar{z}}], & z = \xi^-, \\ \dfrac{2}{h}[-\alpha(y^+ - y^-) + a(z+h)y_z], & z = \xi^+. \end{cases}$$

Устойчивость по начальным данным будем исследовать в энергетическом пространстве H_D, определяемом скалярным произведением $(y,\varphi)_D = (Dy,\varphi)$ и нормой $\|y\|_D = (Dy,y)^{1/2}$, где D — некоторый (возможно, зависящий от r) самосопряженный положительно-определенный оператор. Применительно к двухслойной схеме (16), (17) равномерная устойчивость по начальным данным в H_D означает выполнение энергетического неравенства [18]

$$(Dy^{m+1}, y^{m+1})^{1/2} \le (Dy^m, y^m)^{1/2}, \quad m = 0,1,2,\ldots$$

Имеет место утверждение.

Лемма 1. Пусть $y,\varphi \in H_h$. Тогда справедливы следующие соотношения:

$$\operatorname{Im}(iBy_r, (\hat{y}+y)) = \frac{1}{\tau}((B\hat{y},\hat{y}) - (By,y)), \tag{18}$$

$$(Ay,\varphi) = (y, A\varphi). \tag{19}$$

Доказательство. Для доказательства (18) учтем, что по определению мнимой части имеем

$$\operatorname{Im}(ib(z)\, y_r \overline{(\hat{y}+y)}) = \frac{1}{2}[b(z)(y_r \overline{(\hat{y}+y)} + \overline{y_r}(\hat{y}+y))].$$

Учитывая далее выражение для оператора разностной производной, после несложных преобразований находим

$$\operatorname{Im}(ib(z)\, y_r \overline{(\hat{y}+y)}) = \frac{1}{\tau} b(z)(|\hat{y}|^2 - |y|^2).$$

Следовательно, для мнимой части скалярного произведения $(iBy_r, (\hat{y}+y))$ получаем

$$\operatorname{Im}(iBy_r, \hat{y}+y) = \frac{1}{\tau}((B\hat{y},\hat{y}) - (By,y)).$$

Для доказательства свойства (19) воспользуемся второй разностной формулой Грина [18] для комплекснозначных функций, заданных на равномерной сетке $\overline{\omega}_h = \{x_i = ih,\ i = \overline{0,N}\}$:

$$(y,(av_{\bar{z}})_z)_{\omega_h}-((ay_{\bar{z}})_z,v)_{\omega_h}=-((\bar{a}-a)y_{\bar{z}},v_{\bar{z}}]+[y\bar{a}\bar{v}_{\bar{z}}-\bar{v}ay_{\bar{z}}]_N-$$

$$-[y_0\bar{a}_1\bar{v}_{z,0}-\bar{v}_0a_1y_{z,0}],\ (y,v)_{\omega_h}=\sum_{k=1}^{N-1}hy_k\bar{v}_k. \tag{20}$$

На основании формулы Грина (20) сначала преобразуем скалярные произведения $(Ay,\varphi)_1$, $(Ay,\varphi)_2$, учитывая, что $a-\bar{a}=0$, $\varphi_0=y_0=0$. Тогда имеем

$$(Ay,\varphi)_1=(y,A\varphi)_1+\frac{1}{\rho_1}(\bar{\varphi}y_{\bar{z}}-y\bar{\varphi}_{\bar{z}})_{\xi^-},\ (Ay,\varphi)_2=(y,A\varphi)_2+\frac{1}{\rho_2}(y\bar{\varphi}_z-\bar{\varphi}y_z)_{\xi^+}.$$

Отсюда после преобразований следует

$$(Ay,\varphi)=(Ay,\varphi)_1+(Ay,\varphi)_2+\frac{h}{2}(Ay)_{\xi^-}\bar{\varphi}_{\xi^-}+\frac{h}{2}(Ay)_{\xi^+}\bar{\varphi}_{\xi^+}=$$

$$=(y,A\varphi)_1+\frac{1}{\rho_1}(\bar{\varphi}y_{\bar{z}}-y\bar{\varphi}_{\bar{z}})_{\xi^-}+\left[\alpha(y^+-y^-)-\frac{1}{\rho_1}y_{\bar{z}}\right]_{\xi^-}\bar{\varphi}_{\xi^-}+$$

$$+(y,A\varphi)_2+\frac{1}{\rho_2}(y\bar{\varphi}_z-\bar{\varphi}y_z)_{\xi^+}+\left[-\alpha(y^+-y^-)+\frac{1}{\rho_2}y_z\right]_{\xi^+}\bar{\varphi}_{\xi^+}=$$

$$=(y,A\varphi)_1+(y,A\varphi)_2-\alpha(y^+-y^-)\overline{(\varphi^+-\varphi^-)}-\frac{1}{\rho_1}y^-\overline{\varphi_{\bar{z}}^-}+\frac{1}{\rho_2}y^+\overline{\varphi_z^+}=$$

$$=(y,A\varphi)_1+(y,A\varphi)_2+\frac{h}{2}y_{\xi^-}\overline{(A\varphi)}_{\xi^-}+\frac{h}{2}y_{\xi^+}\overline{(A\varphi)}_{\xi^+}=(y,A\varphi).$$

Таким образом, свойство (19) разностного оператора A установлено.

Перейдем к анализу устойчивости разностной схемы (16), (17) по начальным данным. Предварительно докажем следующую теорему.

Теорема 1. Для решения разностной схемы (16), (17) справедливо энергетическое тождество

$$(b\hat{y},\hat{y})+\frac{\tau}{4k_0}(\mathrm{Im}\,(d)(\hat{y}+y),\hat{y}+y)=(by,y). \tag{21}$$

Для доказательства умножим в смысле скалярного произведения $(\cdot,\cdot)$ уравнение (16) на величину $w=\hat{y}+y$. Тогда, отделяя мнимую часть полученного тождества, имеем

$$\mathrm{Im}\,\{4k_0(iBy_r,w)+(Aw,w)+(Cw,w)\}=0. \tag{22}$$

С учетом $\mathrm{Im}\,(Aw,w)=\dfrac{1}{2i}\{(Aw,w)-(w,Aw)\}$ и свойства самосопряженности (19) тождество (22) принимает вид

$$\mathrm{Im}\,\{4k_0(iBy_r,w)+(Cw,w)\}=0. \tag{23}$$

Воспользовавшись далее леммой 1, тождество (23) с учетом

$$\mathrm{Im}\,(Cw,w)=\mathrm{Im}\,(d\,w,w)=(\mathrm{Im}\,(d)w,w)=||(\mathrm{Im}\,d)^{1/2}(\hat{y}+y)||^2,$$

$$\mathrm{Im}\,n^2(r,z)=(c_0/c(r,z))^2\nu(r,z)\geq 0$$

преобразуем к виду

$$\frac{4k_0}{\tau}((B\hat{y},\hat{y})-(By,y))+||(\mathrm{Im}\,d)^{1/2}(\hat{y}+y)||=0.$$

Отсюда следует справедливость теоремы.

На основании тождества (21) можно установить единственность и равномерную устойчивость разностной схемы (16), (17) по начальным данным в норме энергетического пространства комплекснозначных функций H_B.

Теорема 2. Разностная схема (16), (17) имеет единственное решение.

Теорема 3. Разностная схема (16), (17) равномерно устойчива по начальным данным в норме H_B, и для ее решения имеет место априорная оценка

$$|| y^{m+1} ||_B \le || y^m ||_B , \; m = 0, 1, 2, \ldots$$

Прямым следствием этого неравенства является оценка

$$|| y^m ||_B \le || y^0 ||_B , \; m = 0, 1, 2, \ldots ,$$

выражающая устойчивость разностной схемы (16), (17) по начальным данным.

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

В целях использования градиентных методов оптимизации исследуем дифференциальные свойства критерия качества (8). Покажем, что функционал (8) дифференцируемый в произвольной точке $u(z) \in U$ в комплексном пространстве со скалярным произведением

$$< u, v > = \mathrm{Re}\,(u, v). \tag{24}$$

Для этого оценим главную линейную часть приращения функционала $\Delta J_\varepsilon (u) = J_\varepsilon (u+h) - J_\varepsilon (u)$ в зависимости от приращения управления *h*.

Учитывая комплекснозначность управления $u \in U$, рассмотрим случай амплитудно-фазового управления. Легко видеть, что приращение решения $\delta p = \delta p(r, z) = p(r, z; u+h) - p(r, z; u)$ удовлетворяет краевой задаче

$$2ik_0 \frac{\partial \delta p}{\partial r} + \rho(z) \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho(z)} \frac{\partial \delta p}{\partial z} \right) + k_0^2 (n^2 (r, z) - 1) \delta p = 0,$$

$$z \in (0, \xi) \cup (\xi, H), \quad r_0 < r < \infty, \tag{25}$$

$$\left\{ \frac{1}{\rho(z)} \frac{\partial \delta p}{\partial z} \right\}^+ = \alpha [\delta p] |_{z=\xi}, \; \left\{ \frac{1}{\rho(z)} \frac{\partial \delta p}{\partial z} \right\}^- = \alpha [\delta p] |_{z=\xi}, \tag{26}$$

$$\delta p |_{z=0} = 0, \; \delta p |_{z=H} = 0, \tag{27}$$

с начальным условием

$$\delta p |_{r=r_0} = h(z). \tag{28}$$

Рассматривая теперь выражение для приращения функционала (8), имеем

$$\Delta J_\varepsilon (u) = \int_0^H \frac{1}{\rho(z)} \{ \beta(z) (| p(u+h) - p_0 |^2 - | p(u) - p_0 |^2) + \frac{1}{\varepsilon^2} (| u+h |^2 - | u |^2) \} \, dz,$$

где $p(u+h) = p(R, z; u+h), \; p(u) = p(R, z; u)$.

После несложных преобразований приращение функционала можно записать в виде

$$\Delta J_{\varepsilon}(u)=2\operatorname{Re}\int_0^H \frac{1}{\rho(z)}\beta(z)\,\delta p(\overline{p(u)-p_0})dz+2\frac{1}{\varepsilon^2}\operatorname{Re}\int_0^H \frac{1}{\rho(z)}h\bar{u}\,dz+$$

$$+\int_0^H \frac{1}{\rho(z)}\left(\beta(z)|\delta p|^2+\frac{1}{\varepsilon^2}|h|^2\right)dz. \tag{29}$$

Чтобы окончательно определить выражение для главной линейной части, введем в рассмотрение сопряженную функцию $\psi(r,z)=\psi(r,z;u)$ как решение в области $G_R=\{r_0<r<R,\, 0<z<H\}$ краевой задачи

$$-2ik_0\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial r}+\rho(z)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho(z)}\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial z}\right)+k_0^2(n^2(r,z)-1)\overline{\psi}=0,$$

$$z\in(0,\xi)\bigcup(\xi,H),\quad r_0<r<R, \tag{30}$$

$$\left\{\frac{1}{\rho(z)}\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial z}\right\}^{-}=\alpha[\overline{\psi}]|_{z=\xi},\ \left\{\frac{1}{\rho(z)}\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial z}\right\}^{+}=\alpha[\overline{\psi}]|_{z=\xi}, \tag{31}$$

$$\overline{\psi}|_{z=0}=0,\ \overline{\psi}|_{z=H}=0, \tag{32}$$

$$\overline{\psi}|_{r=R}=\beta(z)(\overline{p(u)-p_0}). \tag{33}$$

Сформулированную сопряженную задачу (30)–(33) можно получить следующим образом. Умножим уравнение (25) на некоторую комплексно-сопряженную функцию $\overline{\psi}(r,z)$ и результат проинтегрируем с весом $1/\rho(z)$ по области G_R, учитывая разрывность функции $\rho(z)$. Тогда получим

$$\int_{r_0}^R dr\int_\Omega \frac{1}{\rho(z)}\overline{\psi}\left(2ik_0\frac{\partial\delta p}{\partial r}+\rho(z)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho(z)}\frac{\partial\delta p}{\partial z}\right)+k_0^2(n^2(r,z)-1)\delta p\right)dz=0. \tag{34}$$

Используя преобразования, имеем

$$\int_{r_0}^R dr\int_\Omega 2ik_0\frac{1}{\rho(z)}\overline{\psi}\frac{\partial\delta p}{\partial r}dz=2ik_0\int_\Omega \frac{1}{\rho(z)}\overline{\psi}(R,z)\delta p(R,z)\,dz-$$

$$-2ik_0\int_\Omega \frac{1}{\rho(z)}\overline{\psi}(r_0,z)\delta p(r_0,z)\,dz-\int_{r_0}^R dr\int_\Omega 2ik_0\frac{1}{\rho(z)}\delta p\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial r}dz,$$

$$\int_{r_0}^R dr\int_\Omega \overline{\psi}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho(z)}\frac{\partial\delta p}{\partial z}\right)dz=\int_{r_0}^R dr\int_0^\xi \overline{\psi}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial\delta p}{\partial z}\right)dz+\int_{r_0}^R dr\int_\xi^H \overline{\psi}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho_2}\frac{\partial\delta p}{\partial z}\right)dz=$$

$$=\int_{r_0}^R\left(\overline{\psi}\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial\delta p}{\partial z}-\delta p\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial z}\right)\Bigg|_{z=0}^{z=\xi-0}dr+\int_{r_0}^R\left(\overline{\psi}\frac{1}{\rho_2}\frac{\partial\delta p}{\partial z}-\delta p\frac{1}{\rho_2}\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial z}\right)\Bigg|_{z=\xi+0}^{z=H}dr+$$

$$+\int_{r_0}^R dr\int_\Omega \delta p\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho(z)}\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial z}\right)dz.$$

Соотношение (34) можно записать в виде

$$\int_{r_0}^{R} dr \int_{\Omega} \frac{1}{\rho(z)} \delta p \left(-2ik_0 \frac{\partial \overline{\psi}}{\partial r} + \rho(z) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho(z)} \frac{\partial \overline{\psi}}{\partial z} \right) + k_0^2 (n^2(r,z) - 1) \overline{\psi} \right) dz +$$

$$+ 2ik_0 \int_{\Omega} \frac{1}{\rho(z)} \overline{\psi}(R,z) \delta p(R,z) dz - 2ik_0 \int_{\Omega} \frac{1}{\rho(z)} \overline{\psi}(r_0,z) \delta p(r_0,z) dz + \tag{35}$$

$$+ \int_{r_0}^{R} \left(\overline{\psi} \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial \delta p}{\partial z} - \delta p \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial \overline{\psi}}{\partial z} \right) \Bigg|_{z=0}^{z=\xi-0} dr + \int_{r_0}^{R} \left(\overline{\psi} \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial \delta p}{\partial z} - \delta p \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial \overline{\psi}}{\partial z} \right) \Bigg|_{z=\xi+0}^{z=H} dr = 0.$$

Отсюда следует, что если ввести в рассмотрение сопряженную функцию как решение краевой задачи (30)–(33), то в результате (35) примет вид

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\rho(z)} \overline{\psi}(r_0,z) \delta p(r_0,z) dz - \int_{\Omega} \frac{1}{\rho(z)} \overline{\psi}(R,z) \delta p(R,z) dz = 0.$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. Пусть $\delta p, \overline{\psi}$ — решения задачи (25)–(28) и (30)–(33) соответственно. Тогда имеет место соотношение

$$\int_0^H \frac{1}{\rho(z)} \overline{\psi}\, \delta p|_{r=r_0} dz = \int_0^H \frac{1}{\rho(z)} \overline{\psi}\, \delta p|_{r=R} dz. \tag{36}$$

Принимая во внимание установленную лемму и начальное условие (28), легко видеть, что если для уравнения (30) в качестве начального условия $\overline{\psi}|_{r=R}$ выбрать условие (33), то выражение (29) для приращения функционала $\Delta J_\varepsilon(u)$ можно представить в виде

$$\Delta J_\varepsilon(u) = 2\mathrm{Re} \int_0^H \frac{1}{\rho(z)} \overline{\psi}|_{r=r_0} h dz + \frac{2}{\varepsilon^2} \mathrm{Re} \int_0^H \frac{1}{\rho(z)} h \overline{u} dz +$$

$$+ \int_0^H \frac{1}{\rho(z)} \left(\beta(z) |\delta p|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} |h|^2 \right) dz\,. \tag{37}$$

Для оценки в (37) интегрального члена, содержащего приращение решения δp, воспользуемся следующей леммой.

Лемма 3. Для комплекснозначного решения краевой задачи (4)–(7) справедлива оценка

$$\| p(R,z) \| \le \| u(z) \|, \; r_0 < R < \infty. \tag{38}$$

Для доказательства неравенства (38) уравнение (4) умножим на комплексно-сопряженную функцию $\overline{p(r,z;u)}$ и проинтегрируем с весом $1/\rho(z)$ по области $z \in (0,H)$. Затем, отделив в полученном выражении мнимую часть, приходим к соотношению

$$k_0 \int_{\Omega} \frac{1}{\rho(z)} \left(\frac{\partial p}{\partial r} \overline{p} + \frac{\partial \overline{p}}{\partial r} p \right) dz + \frac{1}{2i} \left(\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho(z)} \frac{\partial p}{\partial z} \right) \overline{p} dz - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho(z)} \frac{\partial \overline{p}}{\partial z} \right) p dz \right) +$$

$$+ k_0^2 \int_{\Omega} \frac{1}{\rho(z)} \mathrm{Im}\,(n^2(r,z)) |p|^2 dz = 0. \tag{39}$$

Учитывая условия сопряжения (5) и граничные условия (6), для второго слагаемого в (39) находим

$$\int_{\Omega}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho(z)}\frac{\partial p}{\partial z}\right)\overline{p}dz-\int_{\Omega}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho(z)}\frac{\partial \overline{p}}{\partial z}\right)pdz=-\alpha[p]|_{z=\xi}[\overline{p}]|_{z=\xi}+\alpha[p]|_{z=\xi}[\overline{p}]|_{z=\xi}=0.$$

Поэтому соотношение (39) принимает вид

$$\int_{\Omega}\frac{1}{\rho(z)}\left(\frac{\partial p}{\partial r}\overline{p}+\frac{\partial \overline{p}}{\partial r}p\right)dz+k_0\int_{\Omega}\frac{1}{\rho(z)}\mathrm{Im}\,(n^2(r,z))|p|^2\,dz=0. \tag{40}$$

Интегрируя (40) по $r\in(r_0,R)$, после преобразований с учетом начального условия (7) и неравенства $\mathrm{Im}\,n^2(r,z)=(c_0/c(r,z))^2\nu(r,z)\geq 0$ в результате получим оценку (38).

Оценка (38) означает единственность решения задачи (4)–(7) и его непрерывную зависимость от начальных данных.

Поскольку приращение решения δp удовлетворяет краевой задаче (25)–(28), на основании оценки (38) получим неравенство

$$\int_0^H\frac{1}{\rho(z)}\beta(z)|\delta p|^2|_{r=R}\,dz\leq M\int_0^H\frac{1}{\rho(z)}|h|^2\,dz=M||h||^2, \tag{41}$$

где M — некоторая положительная постоянная.

Учитывая оценку (41) в (37), можно окончательно представить выражение для приращения функционала $\Delta J_{\varepsilon}(u)$ в виде

$$\Delta J_{\varepsilon}(u)=2\mathrm{Re}\int_0^H\frac{1}{\rho(z)}\overline{\psi}|_{r=r_0}\,hdz+\frac{2}{\varepsilon^2}\mathrm{Re}\int_0^H\frac{1}{\rho(z)}h\overline{u}\,dz+o(||h||).$$

Отсюда следует дифференцируемость функционала $J_{\varepsilon}(u)$ по $u(z)$ в пространстве $L_2^2(\Omega,1/\rho)$ действительных пар $\{\mathrm{Re}\,u,\mathrm{Im}\,u\}$.

Таким образом, установлена следующая теорема.

Теорема 4. Функционал (8) дифференцируемый по Фреше в пространстве $L_2^2(\Omega,1/\rho)$ действительных пар $\{\mathrm{Re}\,u,\mathrm{Im}\,u\}$. Градиент функционала определяется выражением

$$J'_{\varepsilon}(u)=2\left\{\psi_1(r_0,z;u)+\frac{1}{\varepsilon^2}u_1,\psi_2(r_0,z;u)+\frac{1}{\varepsilon^2}u_2\right\},$$

где $\psi=\psi_1+i\psi_2$ — решение сопряженной задачи (30)–(33), $u=u_1(z)+iu_2(z)$.

Из изложенного следует, что для определения градиента необходимо при фиксированном $u(z)$ получить решение двух краевых задач. Вначале с помощью прямой задачи (4)–(7) нужно определить функцию $p(r,z;u)$, затем из (30)–(33) найти значение сопряженной функции.

Приближенное решение задачи оптимального управления (4)–(9) можно получить, используя градиентные методы [17, 19], а также предложенную для численного решения прямой задачи (4)–(7) разностную схему (16), (17). Отметим, что двухслойная разностная схема (16), (17) может быть непосредственно применима и для численного решения сопряженной задачи (30)–(33).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бреховских Л.М., Лысанов Ю.П. Теоретические основы акустики океана. — Л.: Гидрометеоиздат, 1982. — 264 с.
2. Распространение волн и подводная акустика / Под ред. Дж.Б. Келлера и Дж. Пападакиса. — М.: Мир, 1980. — 230 с.
3. Тапперт Ф.Д. Метод параболического уравнения // Распространение волн в подводной акустике. — М.: Мир, 1980. — С. 180–226.
4. Завадский В.Ю. Моделирование волновых процессов. — М.: Наука, 1991. — 368 с.
5. Гладкий А.В., Сергиенко И.В., Скопецкий В.В. Численно-аналитические методы исследования волновых процессов. — Киев: Наук. думка, 2001. — 452 с.
6. Lee D., Mc Daniel S.T. Ocean acoustic propagation by finite difference method // Comput. Math. Appl. — 1987. — **14**. — P. 305–423.
7. Lee D., Pierse A.D., Shang E.C. Parabolic equation development in the twentieth Century // J. Comput. Acoust. — 2000. — **1**, N 4. — P. 527–637.
8. Athanasoulis G.A., Belibasakis K.A., Mitsoudis D.A., Kampanis N.A., Dougalis V.A. Coupled mode and finite element approximations of underwater sound propagation problems in general stratified environments // J. Comput. Acoust. — 2008. — **6**, N 1. — P. 83–116.
9. Mitsoudis D.A., Makridakis Ch., Plexousakis M. Helmholtz equation with artificial boundary conditions in a two-dimensional waveguide // SIAM Journal on Mathematical Analysis. — 2012. — **44**. — P. 4320–4344.
10. Mitsoudis D.A., Kampanis N.A., Dougalis V.A. Finite element discretization of the Helmholtz equation in an underwater acoustic waveguide // Effective Computational Methods in Wave Propagation / N.A. Campanis, V.A. Dougalis and J.A. Ekaterinaris (eds.). — Boca Raton; London; New York: CRC Press / Taylor & Francis, 2008. — P. 113–134.
11. Алексеев Г.В., Комаров Е.Г. Численное исследование экстремальных задач теории излучения звука в плоском волноводе // Математическое моделирование. — 1991. — **3**, № 12. — С. 52–64.
12. Данилов В.Я., Кравцов Ю.А., Наконечный А.Г. Математические аспекты управления гидроакустическими полями // Формирование акустических полей в океанических волноводах. — Н. Новгород: ИПФ АН СССР, 1991. — С. 32–55.
13. Bermúdez A., Gamallo P., Rodriguez R. Finite element methods in local active control of sound // SIAM J. Control and Optim. — 2004. — **43**, N 2. — P. 437–465.
14. Гладкий А.В. Исследование и оптимизация волновых процессов в неоднородных средах с импедансной границей // Кибернетика и системный анализ. — 2013. — **49**, № 2. — С. 94–105.
15. Meyer M., Hermand J.-P. Optimal nonlocal boundary control of the wide-angle parabolic equation for inversion of a waveguide acoustic field // J. Acoust. Soc. Amer. — 2005. — **117**, N 5. — P. 2937–2948.
16. Сергиенко И.В., Скопецкий В.В., Дейнека В.С. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. — Киев: Наук. думка, 1991. — 432 с.
17. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Вычислительная теплопередача. — М.: Едиториал УРСС, 2003. — 784 с.
18. Самарский А.А., Гулин А.В. Устойчивость разностных схем. — М.: Наука, 1973. — 416 с.
19. Васильев П.Ф. Методы оптимизации. — М.: Факториал Пресс, 2002. — 824 с.

Поступила 27.10.2015