УДК 519.21

Г.Д. БИЛА

ИДЕНТИФИКАЦИЯ НЕПАРАМЕТРИЧЕСКОГО СИГНАЛА ПРИ НАЛИЧИИ СЛУЧАЙНОГО ШУМА С СИЛЬНОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ

Аннотация. Исследована стохастическая модель передачи информации типа «сигнал плюс шум» в случае неизвестной функции сигнала из некоторого компактного множества почти периодических функций K, которая наблюдается на фоне случайного шума, заданного функционалом от гауссовского случайного процесса с сильной зависимостью. Изучена задача идентификации сигнала по наблюдениям $x(t)$ на интервале $[0, T]$, доказана с вероятностью единица состоятельность и асимптотическая нормальность оценки сигнала.

Ключевые слова: стохастическая система, идентификация сигнала, сильная зависимость случайного процесса, сильная состоятельность оценки, асимптотическая нормальность.

Разработка и исследование математических моделей, описывающих различные явления, — одна из самых важных проблем теории управления. Например, движение ракеты, работу промышленного предприятия, процесс размножения клеток можно представить стохастическими системами. Для управления этими различными по сути явлениями требуются одни и те же методы обработки информации, позволяющие наиболее полно и адекватно описывать реальные физические процессы. Информационная модель процессов управления предусматривает основанную на вероятностном подходе схему передачи информации, характерную для обработки данных в теории связи, метеорологии, гидроакустике, статистической радиофизике, экономике и других областях естественных и социальных наук.

Например, схема передачи информации в теории связи начинается с источника информации, создающего сообщения или их последовательность для передачи по линии связи на передатчик, который перерабатывает их в сигналы в соответствии с данным каналом связи. В последнем, как правило, на сигнал действуют искажающие его помехи, поэтому прием–восстановление информации осуществляется в условиях случайных шумов. Основным этапом исследования математической модели такой системы связи является восстановление информационного сообщения, т.е. идентификация полезного сигнала при наличии шума.

В зависимости от рассматриваемого сигнала сообщения описываются различными функциями. Например, человеческая речь представляет собой некоторую функцию времени $a(t)$, $t \in \mathbb{R}^1$, телевидение — функцию многих переменных $a(s,t)$, $t \in \mathbb{R}^1$, $s \in \mathbb{R}^n$, которая в момент времени t описывает интенсивность света в точке $s \in \mathbb{R}^n$ передаваемого сообщения и т.д.

В общем случае такая математическая модель передачи информации называется «сигнал плюс шум» и записывается в виде

$$x(t) = a(t) + \varepsilon(t), \ t \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

где $x(t)$ — принятый сигнал, $a(t)$ — переданный (полезный) сигнал и $\varepsilon(t)$ — случайный шум, искажающий полезный сигнал.

Исследование такого типа моделей также актуально для задач прогнозирования ситуаций, которые могут стать причиной технологических аварий или природных катаклизмов с катастрофическими человеческими и материальными потерями. В работе [1] обосновывана модель паводка, описанная гармоническим сигналом, наблюдения которого зашумлены некоторым стационарным случайным процессом. Например, в случае одномерного аргумента модель паводка имеет вид $a(t)=\sum_{k=1}^{n} A_k \sin(\omega_k t+\varphi_k)$, где A_k и ω_k — соответственно амплитуды и частоты периодических составляющих, φ_k — фаза, являющаяся некоторой случайной величиной. Как правило, величины $a(t)$ наблюдаются на фоне случайного шума $\varepsilon(t)$, т.е. модель наблюдений имеет вид (1). Задача заключается в идентификации полезного сигнала по наблюдениям $x(t)$ на временном интервале $[0, T]$, т.е. в данном случае в оценке неизвестных параметров A_k и ω_k, $k=1,.., n$.

В зависимости от статистических свойств случайного шума различают модели с длинной и короткой памятью случайного процесса. Описанная модель оценки неизвестных параметров амплитуд и частот сигнала при условии, что случайный шум удовлетворяет свойству короткой памяти, рассматривалась в [2–5], где изучены так называемые периодограммные оценки и оценки наименьших квадратов неизвестных параметров и доказаны утверждения об их строгой состоятельности и асимптотической нормальности. Аналогичные стохастические модели гармонических сигналов в случае шума с длинной памятью изучались в работах [6–8], а при независимых случайных шумах — в [9, 10] и т.д.

Более сложной является задача, когда полезный сигнал $a(t)$ представляется в виде бесконечного ряда неизвестных гармоник. В этом случае необходимо оценить функцию $a(t)$ в определенном функциональном пространстве. Исследования проводились для функции одной переменной [11, 12] и для двумерной функции [13]. В обоих случаях полезный сигнал наблюдается на фоне случайного шума, описываемого процессом и полем с короткой памятью.

В данной статье рассматривается стохастическая модель передачи информации типа «сигнал плюс шум» в случае неизвестной функции сигнала из некоторого компактного множества почти-периодических функций K, которая наблюдается на фоне случайного шума, заданного функционалом от гауссовского случайного процесса с сильной зависимостью, и исследуется задача идентификации сигнала по наблюдениям $x(t)$ на интервале $[0, T]$.

Пусть стохастическая модель наблюдений имеет вид $x(t)=a_0(t)+\varepsilon(t)$, $0 \le t \le T$, при следующих условиях.

Условие 1. Случайный процесс $\varepsilon(t)=G(n(t))$, $t \in \mathbb{R}^1$, — функционал от гауссовского стационарного процесса $\{n(t),\ t \in \mathbb{R}^1\}$, причем $E\varepsilon(0)=EG(n(0))=0$, $E\varepsilon^2(0)=EG^2(n(0))<\infty$.

Условие 2. Процесс $\{n(t),\ t \in \mathbb{R}^1\}$ — действительный непрерывный в среднем квадратическом стационарный гауссовский случайный процесс с сильной зависимостью

$$En(t)=0,\quad B(t)=\frac{1}{(1+t^2)^{\alpha/2}},\quad t \ge 0,\quad 0<\alpha<1.$$

Условие 3. Функция $G\colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ — нелинейная борелевская, для которой

$$\int_{-\infty}^{\infty} G^2(u)\varphi(u)du<\infty,$$

где $\varphi(u)=\frac{1}{2\pi}e^{-u^2/2}$, $u \in \mathbb{R}^1$. Функцию $G(u)$, $u \in \mathbb{R}^1$, можно разложить [14] в ряд

$$G(u)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k}{k!}H_k(u),\quad C_k=\int_{-\infty}^{\infty} G(u)H_k(u)\varphi(u)du,\quad k=0,1,\ldots,$$

по ортогональным полиномам Чебышева–Эрмита

$$H_k(u) = (-1)^k e^{u^2/2} \frac{d^k}{du^k} e^{-u^2/2}, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

в пространстве $L_2(\mathbb{R}^1, \varphi(u)du)$.

Условие 4. Существует целое число $m \geq 1$ такое, что $C_1 = \ldots = C_{m-1} = 0$, $C_m \neq 0$ — коэффициенты в разложении функции $G(u)$, $u \in \mathbb{R}^1$, по полиномам Чебышева–Эрмита.

Сформулируем одно обобщение закона больших чисел для стационарного случайного процесса с сильной зависимостью.

Лемма 1 [6, 8, 15]. Пусть выполняются условия 1–4. Тогда с вероятностью единица при $T \to \infty$

$$\sup_{\omega \in \mathbb{R}^1} \left| \frac{1}{T} \int_0^T [e^{i\omega t} \varepsilon(t) dt \right| \to 0.$$

Условие 5. Пусть K — множество действительных функций вида

$$a(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(a) e^{i\lambda_k t}, \quad t \in \mathbb{R}^1,$$

с фиксированной последовательностью показателей Фурье $\{\lambda_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$, причем $\lambda_0 = 0$, $\lambda_{-k} = \lambda_k$, $0 < \lambda_k < \lambda_{k+1}$, $\lambda_k - \lambda_{k-1} \geq \Delta > 0$ при $k \geq 1$ с некоторым фиксированным $\Delta > 0$, а коэффициенты Фурье $\{c_k(a)\}_{k=-\infty}^{\infty}$ с некоторыми числами $L > 0$, $\nu > 0$ удовлетворяют условиям

$$c_{-k}(a) = \overline{c_k(a)}, \quad k \geq 0, \quad a \in K,$$

$$|c_0(a)| \leq L, \quad |c_k(a)| k^{1+\nu} \leq L, \quad k \geq 1.$$

В качестве оценки функции a_0 на основании наблюдений случайного процесса $\{x(t), 0 \leq t \leq T\}$ рассмотрим оценку a_T метода наименьших квадратов, предполагая, что $T \to \infty$. Оценка a_T определяется как элемент множества K, для которого выполняется соотношение

$$\int_0^T [a_T(\tau) - x(\tau)]^2 d\tau = \min_{a \in K} \int_0^T [a(\tau) - x(\tau)]^2 d\tau.$$

Поскольку множество K компактно относительно равномерной сходимости на оси, а траектории процесса $\{n(t), (t) \in \mathbb{R}^1\}$ непрерывны, функция a_T, для которой достигается минимум, существует и является единственной, если только множество K не содержит функций, совпадающих на отрезках вида $[0, T]$ и не совпадающих на оси.

Свойства почти-периодических функций a из множества K, которые используются при доказательстве следующих утверждений, детально изучены в работах [12, 16]. Доказательство сходимости оценки a_T функции $a \in K$ к ее истинному значению a_0 основано на фундаментальных результатах [12], где предложен универсальный подход к доказательству состоятельности оценок.

Теорема 1 [12, 17]. Пусть $(\Omega, U, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство и K — компактное подмножество некоторого банахова пространства с нормой $\|\cdot\|$. Предположим, что $\{U_T, T \in \mathbb{R}_+^1\}$ — поток σ-алгебр таких, что $U_T \subset U, U_T \subset U_S$, $T < S$ (каждый элемент вектора T меньше соответствующего элемента вектора S), и $\{Q_T(s) = Q_T(s,\omega) : (s,\omega) \in K \times \Omega, T \in \mathbb{R}_+^1\}$ является семейством действительных функций, удовлетворяющим следующим условиям:

а) для фиксированных T и ω функция $Q_T(s,\omega)$, $s \in K$, непрерывна;

б) для фиксированного T и для каждого $s \in K$ функция $Q_T(s,\omega)$ U_T-измерима;

в) для некоторого фиксированного элемента $s_0 \in K$ при каждом $s \in K$

$$\mathbf{P}\{\lim_{T\to\infty} Q_T(s,\omega) = \Phi(s\,;s_0)\} = 1,$$

где $\Phi(s\,;s_0)$, $s \in K$, — действительная функция, непрерывная на K и такая, что

$$\Phi(s;\,s_0) > \Phi(s_0\,;s_0), \quad s \neq s_0;$$

г) для любого $\delta > 0$ существует $\gamma_0 > 0$ и функция $c(\gamma)$, $\gamma > 0$, $c(\gamma) \to 0$, $\gamma \to 0$, такая, что для любого элемента $s' \in K$ при любом $\gamma : 0 < \gamma < \gamma_0$ выполняется соотношение

$$\mathbf{P}\left\{\overline{\lim_{T\to\infty}} \sup_{\{\|s-s'\|<\gamma,\, \|s-s_0\|\geq\delta\}} |Q_T(s) - Q_T(s')| < c(\gamma)\right\} = 1.$$

Для каждого $T \in \mathbb{R}_+^1$ и $\omega \in \Omega$ элемент $s_T = s_T(\omega)$ определяется соотношением $Q_T(s_T) = \min_{s\in K} Q_T(s)$.

Для функции Q_T всегда существует точка минимума, возможно даже больше чем одна, тогда точка s_T — любая из них. В силу теоремы 6 работы [17] s_T можно выбрать U_T-измеримой как функцию от ω. Тогда $\mathbf{P}\{\| s_T - s_0 \| \to 0,\ T \to \infty\} = 1$.

Если соотношение в условии г) заменить на

$$\mathbf{P}\left\{\overline{\lim_{T\to\infty}} \sup_{\|s-s'\|<\gamma} |Q_T(s) - Q_T(s')| < c(\gamma)\right\} = 1,$$

то $\mathbf{P}\{Q_T(s_T) \to \Phi(s_0\,;s_0),\ T \to \infty\} = 1$.

Теорема 2 [18]. Предположим, что выполняются условия 1–5 и K — компактное относительно равномерной сходимости на оси множество почти-периодических функций. Тогда при $T \to \infty$

$$\mathbf{P}\left\{\lim_{T\to\infty} \| a_T - a_0 \| = 0\right\} = 1,$$

где $\| a \|^2 = E(a^2) = \lim_{u\to\infty} \dfrac{1}{u} \displaystyle\int_0^u a^2(\tau)d\tau$ по определению.

Доказательство. Положим для $T > 0$, $a \in K$

$$Q_T(a) = \frac{1}{T}\int_0^T [a(t) - x(t)]^2\, dt - \frac{1}{T}\int_0^T \varepsilon^2(t)dt,$$

при этом очевидно, что минимизация по $a \in K$ функционала $Q_T(a)$ приводит к оценке a_T.

Для доказательства теоремы 2 достаточно убедиться в выполнении условий теоремы 1. В силу выбора функционала $Q_T(a)$, очевидно, имеют место условия непрерывности а) и измеримости б) теоремы 1. Проверим выполнение условия в). Пусть элемент $a \in K$ фиксированный, тогда по определению

$$\Phi(a, a_0) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T [a(t) - a_0(t)]^2\, dt = \| a - a_0 \|^2.$$

Для любых $a \in K$ и $a \neq a_0$ рассмотрим

$$EQ_T(a) = E\left(\frac{1}{T}\int_0^T [a(t) - x(t)]^2\,dt - \frac{1}{T}\int_0^T \varepsilon^2(t)dt\right) =$$

$$= E\left(\frac{1}{T}\int_0^T [a(t) - a_0(t)]^2\,dt - \frac{2}{T}\int_0^T \varepsilon(t)[a(t) - a_0(t)]dt\right).$$

Обозначим
$$\eta_T(a) = \frac{1}{T}\int_0^T \varepsilon(t)[a(t) - a_0(t)]\,dt.$$

Тогда, учитывая вид функций a, a_0 и неравенство $\| a \| \le c_0$, получаем

$$\eta_T(a) = \frac{1}{T}\int_0^T \varepsilon(t)\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(a)e^{i\lambda_k t} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(a_0)e^{i\lambda_k t}\right]dt =$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T \varepsilon(t)\sum_{k=-\infty}^{\infty}[c_k(a) - c_k(a_0)]e^{i\lambda_k t}\,dt \le \frac{2c_0}{T}\int_0^T \varepsilon(t)e^{i\lambda_k t}\,dt\,.$$

Откуда по лемме 1 $\eta_T(a) \to \infty$ при $T \to \infty$ с вероятностью единица. Таким образом, при $T \to \infty$ функционал

$$Q_T(a) = \frac{1}{T}\int_0^T [a(t) - a_0(t)]^2\,dt - 2\eta_T(a) \to \| a - a_0 \|^2$$

с вероятностью единица. На основании свойств функций из K величина $\| a - a_0 \| > 0$, если a и a_0 из K отличаются хотя бы в одной точке. Отсюда следует, что условие в) теоремы 1 выполняется с функцией $\Phi(a, a_0) = \| a - a_0 \|^2$.

Для проверки условия г) теоремы 1 для $\gamma > 0$ и функции $a \in K$ рассмотрим величину

$$\varsigma_T(a,\gamma) = \sup_{(\tilde{a}:\, \| \tilde{a} - a_0 \| < \gamma)} |Q_T(\tilde{a}) - Q_T(a)| =$$

$$= \sup_{(\tilde{a}:\, \| \tilde{a} - a_0 \| < \gamma)} \left| \frac{1}{T}\int_0^T [\tilde{a}(t) - x(t)]^2\,dt - \frac{1}{T}\int_0^T [a(t) - x(t)]^2\,dt \right| =$$

$$= \sup_{(\tilde{a}:\, \| \tilde{a} - a_0 \| < \gamma)} \left| \frac{1}{T}\int_0^T [\tilde{a}(t) - a(t)][\tilde{a}(t) + a(t) - 2a_0(t) - 2\varepsilon(t)]\,dt \right| < c(\gamma)\,.$$

Откуда
$$\varsigma_T(a,\gamma) \le 2\gamma[2c_0 + \frac{1}{T}\int_0^T |\varepsilon(t)|\,dt],$$

причем в силу заданных условий теоремы, леммы 1 и леммы 5.4 из работы [19] при $T \to \infty$
$$\frac{1}{T}\int_0^T |\varepsilon(t)|\,dt \to 0$$

с вероятностью единица. Поэтому для величины $c(\gamma) = 5\gamma c_0$ получаем $\lim_{T\to\infty} \mathbf{P}\{\varsigma_T(a,\gamma) < c(\gamma)\} = 1$.

Очевидно, что $c(\gamma) \to 0$, $\gamma \to 0$, поэтому имеет место условие г) теоремы 1. Таким образом, можно утверждать, что при $T \to \infty$ имеем $\| a_T - a_0 \| \to 0$ с вероятностью единица. ■

Условие 6. Предположим, что выполняется неравенство $m\alpha>1$, $m\geq 2$, где $m=\operatorname{rank} G$, $0<\alpha<1$ — параметр корреляционной функции $B(t)$ случайного процесса $\{n(t),\ (t)\in\mathbb{R}^1\}$.

Пусть для $k\geq m$ функция

$$f^{*(k)}(\lambda)=\int\limits_{\mathbb{R}^{k-1}} f(\lambda-\lambda_2-\ldots-\lambda_k)\prod_{i=2}^{k} f(\lambda_i)\,d\lambda_2\ldots d\lambda_k$$

есть k-я свертка спектральной плотности $f(\lambda)$, $\lambda\in\mathbb{R}^1$, случайного процесса $\{n(t),\ (t)\in\mathbb{R}^1\}$. Отметим, что $B^k(\cdot)\in L_1(\mathbb{R}^1)$, $k\geq m$, поэтому все $f^{*(k)}(\lambda)$, $k\geq m$, — непрерывные ограниченные функции.

Условие 7. Функция $f^{*(k)}(\lambda_k)>0$, $k\geq m$, $m=\operatorname{rank} G$, $\lambda_k\in\mathbb{R}^1$, $k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$

Рассмотрим граничное поведение оценки a_T для заданной стохастической модели и условий задачи. Для этого введем некоторые обозначения и докажем ряд дополнительных утверждений.

Для фиксированного целого $n>0$ рассмотрим функцию ε_n^T вида $\sum\limits_{|k|\leq n} s_k e^{i\lambda_k t}$, которая минимизирует величину $\int\limits_0^T|\varepsilon(\tau)-\sum\limits_{|k|\leq n} s_k e^{i\lambda_k\tau}|^2 d\tau$ по набору действительных чисел $\{s_k, |k|\leq n\}$. Известно [20], что функция ε_n^T определяется следующим образом: $\varepsilon_n^T(\tau)=\sum\limits_{|k|\leq n} b_k e^{i\lambda_k\tau}$, где $b_k=b_k(n,T)=\sum\limits_{|j|\leq n}\varphi_n^{kj}\gamma_{jT}$, $\gamma_{jT}=\frac{1}{T}\int\limits_0^T e^{-i\lambda_j t}\varepsilon(t)dt$, $j=0,\pm 1,\ldots$, а матрица $(\varphi_n^{kj})_{|k|\leq n,\,|j|\leq n}$ — обратная к матрице Грамма $(\varphi_{kj})_{|k|\leq n,\,|j|\leq n}=\left(\frac{1}{T}\int\limits_0^T e^{i\lambda_k\tau-i\lambda_j\tau}d\tau\right)_{|k|\leq n,\,|j|\leq n}$. Функция ε_n^T определена с вероятностью единица.

Лемма 2. Предположим, что случайный процесс $\varepsilon(t)$, $t\in\mathbb{R}^1$, удовлетворяет условиям 1– 4, 6, 7. Для фиксированных целого $n>0$ и действительного t случайная величина $\sqrt{T}\varepsilon_n^T(t)$ при $T\to\infty$ асимптотически нормальна со средним 0 и дисперсией $\sigma_n^2=2\pi\sum\limits_{k=m}^{\infty}\frac{C_k^2}{k!}\sum\limits_{|k|\leq n} f^{*(k)}(\lambda_k)$.

Доказательство. При заданных условиях доказательство леммы 2 заключается в применении центральной предельной теоремы [15, 21] к величине $\sqrt{T}\varepsilon_n^T(t)$, представленной в виде $\sqrt{T}\varepsilon_n^T(t)=\frac{1}{\sqrt{T}}\int\limits_0^T\varepsilon(\tau)W_T(\tau)d\tau$, с функцией $W_T(\tau)=\sum\limits_{|k|\leq n,|j|\leq n} e^{i\lambda_k\tau-i\lambda_j\tau}\varphi_n^{kj}$.

Покажем, что условия центральной предельной теоремы выполняются. Очевидно, что

$$\frac{1}{T}\int\limits_0^T W_T^2(\tau)d\tau=\sum_{\substack{|k|\leq n,\,|j|\leq n\\|\nu|\leq n,\,|\mu|\leq n}} e^{i\lambda_k t-i\lambda_\nu t}\varphi_n^{kj}\varphi_n^{\mu\nu}\left(\frac{1}{T}\int\limits_0^T e^{i\lambda_\mu\tau-i\lambda_j\tau}d\tau\right)=\sum_{\substack{|k|\leq n,\,|j|\leq n\\|\nu|\leq n,\,|\mu|\leq n}} e^{i\lambda_k t-i\lambda_\nu t}\varphi_n^{kj}\varphi_{\mu j}\varphi_n^{\mu\nu}$$

с учетом вида функции φ_n^{kj}, $\lim_{T\to\infty}\varphi_n^{kj}=\delta_{kj}$, тогда

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T W_T^2(\tau)\,d\tau=2n+1\,.$$

Легко проверяются и следующие условия. При $\forall h\in\mathbb{R}^1$ получаем

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T(2n+1)}\int_0^T W_T(\tau+|h|)\,W_T(\tau)\,d\tau=$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2n+1}\sum_{\substack{k|\le n,\ |j|\le n\\ |\nu|\le n,\ |\mu|\le n}} e^{i\lambda_k t-i\lambda_\nu t-i\lambda_j|h|}\varphi_n^{kj}\varphi_n^{\mu\nu}\left(\frac{1}{T}\int_0^T e^{i\lambda_\mu\tau-i\lambda_j\tau}\,d\tau\right)=\frac{1}{2n+1}\sum_{|k|\le n}e^{i\lambda_k h}\,.$$

Эта функция непрерывна по h на оси и определяет так называемую спектральную меру функции W_T, которая сосредоточена в точках λ_k, $|k|\le n$. Таким образом, согласно центральной предельной теореме величина $\sqrt{T}\varepsilon_n^T(t)$ асимптотически нормальна со средним 0 и дисперсией $\sigma_n^2=2\pi\sum_{k=m}^{\infty}\frac{C_k^2}{k!}\sum_{|k|\le n}f^{*(k)}(\lambda_k)$ для предельного распределения.

Лемма 2 доказана. ■

Лемма 3. Предположим, что случайный процесс $\varepsilon(t)$, $t\in\mathbb{R}^1$, удовлетворяет условиям 1–4, 6, 7 и K — множество почти-периодических функций из условия 5. Тогда при любом фиксированном $n>0$

$$\lim_{T\to\infty}\mathbf{P}\{\varepsilon_n^T\in K\}=1\,.$$

Доказательство. На основании свойств почти-периодических функций, условия леммы и неравенства Чебышева справедливы следующие оценки:

$$\mathbf{P}\{\max_{|k|\le n}|b_k|k^{1+\nu}\ge\varepsilon\}\le\sum_{|k|\le n}\mathbf{P}\{|b_k|k^{1+\nu}\ge\varepsilon\}\le\varepsilon^{-2}\sum_{|k|\le n}k^{2+2\nu}E|b_k|^2=$$

$$=\varepsilon^{-2}\sum_{|k|\le n}k^{2+2\nu}\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T E(\varepsilon(u),\varepsilon(v))\left|\sum_{|j|\le n}\varphi_n^{jk}e^{-i\lambda_j u}\right|\left|\sum_{|l|\le n}\varphi_n^{kl}e^{i\lambda_l v}\right|dudv\le$$

$$\le\varepsilon^{-2}\sum_{|k|\le n}\left[k^{2(1+\nu)}\left(\sum_{|j|\le n}|\varphi_n^{jk}|\right)^2\right]\frac{1}{T^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{C_m^2}{m!}\int_0^T\int_0^T B^m(u-v)\,dudv\,.$$

Из условий леммы 3, относящихся к процессу $\{n(t),\,(t)\in\mathbb{R}^1\}$, функции $G(u)$, $u\in\mathbb{R}^1$, и виду корреляционной функции $B(t)$, $t\in\mathbb{R}^1$, имеем

$$E(\varepsilon(u),\varepsilon(v))=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{C_m^2}{m!}B^m(u-v)\le E(G^2(n(0)))B(u-v)\,,$$

где $G^2(n(0))=\text{const}<\infty$, $\alpha>\frac{1}{m}$ — параметр корреляционной функции $B(t)$, $m=\operatorname{rank}G$ — эрмитов ранг функции $G(u)$, $u\in\mathbb{R}^1$. Чтобы завершить доказательство леммы 3, покажем, что при $T\to\infty$ и $\alpha>\frac{1}{m}$ с вероятностью единица

$$\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T B(u-v)dudv\to 0\,.$$

Известно [22], что корреляционная функция $B(t)$, $t \in \mathbb{R}^1$, гауссовского сильнозависимого процесса представляется в виде $B(t) = L(|t|) \cdot |t|^{-\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$, где $L(t)$, $t > 0$, — медленно меняющаяся на бесконечности функция. Заменим переменные $u = u^* T$ и $v = v^* T$, тогда

$$\frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T B(u - v)\, du dv = \int_0^1 \int_0^1 B(T(u^* - v^*))\, du^* dv^* =$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \frac{L(T|u^* - v^*|)}{T^\alpha |u^* - v^*|^\alpha} du^* dv^* = \frac{L(T)}{T^\alpha} \int_0^1 \int_0^1 \frac{L(T|u^* - v^*|)}{L(T)} \cdot \frac{du^* dv^*}{|u^* - v^*|^\alpha} \sim$$

$$\sim \frac{L(T)}{T^\alpha} \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{|u^* - v^*|^\alpha} du^* dv^* = \frac{2}{(1-\alpha)(2-\alpha)} B(T),$$

где $f(T) \sim h(T)$ означает, что $\lim\limits_{T \to \infty} f(T) / h(T) = 1$. В предыдущих преобразованиях используется лемма из работы [23] для функции $|t^* - s^*|^{-\alpha}$. В качестве $\eta > 0$ выберем такое число, что $\alpha + \eta < 1$, тогда для последовательности $T_n = n^{1/\alpha + \eta}$, $\eta > 0$, $\alpha \in (0,1)$, справедливо $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{L(T_n)}{T_n^\alpha} < \infty$, откуда при $T \to \infty$ $\varepsilon_n^T \in K$ с вероятностью единица. ■

Лемма 4. Предположим, что случайный процесс $\varepsilon(t)$, $t \in \mathbb{R}^1$, удовлетворяет условиям 1–4, 6, 7 и K — множество почти-периодических функций из условия 5. Тогда с некоторой константой c, не зависимой от a и T, при всех $T \geq 1$

$$TE(\| a_T - a_0 \|^2) \leq c.$$

Доказательство. Покажем вначале, что при заданных условиях для любой функции $a \in K$ или $a = a^{(1)} - a^{(2)}$, где $a^{(1)}$, $a^{(2)} \in K$, выполняется неравенство

$$\left| \frac{1}{T} \int_0^T a^2(\tau) d\tau - \| a \|^2 \right| \leq \frac{c_1}{T} \tag{2}$$

с некоторой константой c_1, не зависимой от a и $T > 0$. Действительно, на основании равенства Парсеваля для $\| a \|^2$ имеем

$$\left| \frac{1}{T} \int_0^T a^2(\tau) d\tau - \| a \|^2 \right| = \left| \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} c_j(a) \overline{c_k(a)}\, e^{i\lambda_j \tau - i\lambda_k \tau}\, d\tau - \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(a)|^2 \right| =$$

$$= \frac{1}{T} \left| \sum_{j \neq k}^{\infty} c_j(a) \overline{c_k(a)} \, \frac{e^{i(\lambda_j - \lambda_k)T} - 1}{i(\lambda_j - \lambda_k)} \right| \leq \frac{2}{\Delta T} \sum_{j \neq k}^{\infty} |c_j(a) c_k(a)| \leq \frac{c_1}{T},$$

где $c_1 = \frac{2}{\Delta} \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} (L|k|^{-(1+\nu)})^2$, $\Delta > 0$, $L > 0$, $\nu > 0$, $k \geq 1$, из условия 5 о коэффициентах Фурье функции $a(t) \in K$.

Из определения функции a_T:

$$\int_0^T [a_T(\tau) - x(\tau)]^2 d\tau \leq \int_0^T [a_0(\tau) - x(\tau)]^2 d\tau,$$

откуда с учетом вида $x(t)$, $t \in \mathbb{R}^1$, следует, что

$$\int_0^T [a_T(\tau) - a_0(\tau)]^2 d\tau \le 2\int_0^T [a_T(\tau) - a_0(\tau)]\varepsilon(\tau) d\tau . \tag{3}$$

Применяя неравенство (2) к левой части неравенства (3), получаем

$$T \| a_T - a_0 \|^2 - c_1 \le 2\int_0^T [a_T(\tau) - a_0(\tau)]\varepsilon(\tau)\, d\tau .$$

Далее, из неравенства Парсеваля

$$T \| a_T - a_0 \|^2 - c_1 \le 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} [c_k(a_T) - c_k(a_0)] \int_0^T e^{i\lambda_k \tau} \varepsilon(\tau) d\tau \le$$

$$\le 2 \left\{ \| a_T - a_0 \|^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \int_0^T e^{i\lambda_k \tau} \varepsilon(\tau)\, d\tau \right|^2 \right\}^{1/2} . \tag{4}$$

Отметим, что согласно условию 5, лемме 1 и лемме 5.4 из работы [19] математическое ожидание

$$\frac{1}{T} E \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \int_0^T e^{i\lambda_k \tau} \varepsilon(\tau) d\tau \right|^2 \right\} = c_2 ,$$

где c_2 конечно. Таким образом, из (4) для всех $T \ge 1$ следует неравенство

$$TE(\| a_T - a_0 \|^2) \le 2c_2^{1/2} \{[TE(\| a_T - a_0 \|^2)]^{1/2} + c_1\} .$$

Следовательно,

$$TE(\| a_T - a_0 \|^2) \le \{c_2^{1/2} + (c_2 + c_1)^{1/2}\} = c$$

при $T \ge 1$. ■

Теорема 3. Предположим, что случайный процесс $\varepsilon(t)$, $t \in \mathbb{R}^1$, удовлетворяет условиям 1–4, 6, 7, K — множество почти-периодических функций из условия 5 и функция a_0 — внутренняя точка множества K. Пусть a_T — оценка метода наименьших квадратов функции a_0 в множестве K по наблюдениям $x(t) = a_0(t) + \varepsilon(t)$, $0 \le t \le T$. При каждом фиксированном $t \in \mathbb{R}^1$ распределение случайной величины $\sqrt{T}[a(t) - a_0(t)]$ слабо сходится при $T \to \infty$ к нормальному закону распределения с математическим средним 0 и дисперсией

$$\sigma^2 = 2\pi \sum_{k=m}^{\infty} \frac{C_k^2}{k!} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f^{*(k)}(\lambda_k) .$$

Доказательство. Для доказательства теоремы 3 будем использовать идею А.Я. Дороговцева доказательства теоремы 8 в работе [12] и дополнительные утверждения [19, 21], относящиеся к процессам с сильной зависимостью.

Вначале отметим, что ряд σ^2 сходится. Это следует из интегрируемости корреляционной функции $B^m(t)$, $t \in \mathbb{R}^1$, при $m\alpha > 1$, $m = \operatorname{rank} G$, и условия 7.

Пусть $\Phi(x; u^2)$, $x \in \mathbb{R}^1$, — функция нормального распределения с математическим средним 0 и дисперсией u^2, и $\rho_{nT}(t) = a_T(t) - a_0(t) - \varepsilon_{nT}(t)$, $t \in \mathbb{R}^1$.

Для фиксированных значений $t, x \in \mathbb{R}^1$, любого $\delta > 0$ и целого $n > 0$ справедливо неравенство

$$\mathbf{P}\{\sqrt{T}[a_T(t)-a_0(t)]<x\}=\mathbf{P}\{\sqrt{T}[a_T(t)-a_0(t)]<x\,,$$

$$\sqrt{T}|\rho_{nT}(t)|\geq\delta\}+\mathbf{P}\{\sqrt{T}[a_T(t)-a_0(t)]<x,\sqrt{T}|\rho_{nT}(t)|<\delta\}\leq$$

$$\leq\mathbf{P}\{\sqrt{T}|\rho_{nT}(t)|\geq\delta\}+\mathbf{P}\{\sqrt{T}\varepsilon_{nT}(t)<x+\delta,\sqrt{T}|\rho_{nT}(t)|<\delta\}\leq$$

$$\leq\mathbf{P}\{\sqrt{T}|\rho_{nT}(t)|\geq\delta\}+\mathbf{P}\{\sqrt{T}\varepsilon_{nT}(t)<x+\delta\}\,.$$

Докажем, что

$$\overline{\lim_{T\to\infty}}\,\mathbf{P}\{\sqrt{T}|\rho_{nT}(t)|\geq\delta\}\leq\gamma_n(\delta) \tag{5}$$

с числовой последовательностью $\{\gamma_n(\delta),\,n\geq 1\}$, для которой при каждом $\delta>0$ имеет место $\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_n(\delta)=0$.

Из условия теоремы 3 известно, что a_0 является внутренней точкой множества K, а по лемме 3 имеем $\lim\limits_{T\to\infty}\mathbf{P}\{\varepsilon_n^T\in K\}=1$. Тогда

$$\overline{\lim_{T\to\infty}}\mathbf{P}\{\sqrt{T}|\rho_{nT}(t)|\geq\delta\}=\overline{\lim_{T\to\infty}}\mathbf{P}\{\sqrt{T}|\rho_{nT}(t)|\geq\delta;a_0+\varepsilon_{nT}\in K\}\leq \tag{6}$$

$$\leq\overline{\lim_{T\to\infty}}\mathbf{P}\left\{\sqrt{T}\,|\,p_{nT}(t)|\geq\frac{\delta}{2};a_0+\varepsilon_{nT}\in K\right\}+\overline{\lim_{T\to\infty}}\mathbf{P}\left\{\sqrt{T}\,|\,q_{nT}(t)|\geq\frac{\delta}{2};a_0+\varepsilon_{nT}\in K\right\},$$

где

$$p_{nT}(t)=\sum_{|k|\leq n}[c_k(a_T)-c_k(a_0)]e^{i\lambda_k t}-\varepsilon_{nT}(t)\,,$$

$$q_{nT}(t)=\sum_{|k|\leq n}[c_k(a_T)-c_k(a_0)]e^{i\lambda_k t}\,.$$

Обозначим

$$a_{nT}(t)=\sum_{|k|\leq n}c_k(a_T)e^{i\lambda_k t}\,,\;a_{n0}(t)=\sum_{|k|\leq n}c_k(a_0)e^{i\lambda_k t}\,.$$

Из равенства

$$2\int_0^T[a_{nT}(\tau)-a_{n0}(\tau)-\varepsilon(\tau)]^2\,d\tau+2\int_0^T[\varepsilon_{nT}(\tau)-\varepsilon(\tau)]^2\,d\tau=$$

$$=\int_0^T p_{nT}^2(\tau)d\tau+\int_0^T[a_{nT}(\tau)-a_{n0}(\tau)+\varepsilon_{nT}(\tau)-2\varepsilon(\tau)]^2\,d\tau$$

с учетом соотношения

$$\int_0^T[a_{nT}(\tau)-a_{n0}(\tau)+\varepsilon_{nT}(\tau)-2\varepsilon(\tau)]^2\,d\tau\geq 4\int_0^T[\varepsilon_{nT}(\tau)-\varepsilon(\tau)]^2\,d\tau\,,$$

которое следует из определения функции $\varepsilon_{nT}(\tau)$, имеем

$$\int_0^T p_{nT}^2(\tau)d\tau\leq 2\int_0^T[a_{nT}(\tau)-a_{n0}(\tau)-\varepsilon(\tau)]^2\,d\tau-2\int_0^T[\varepsilon_{nT}(\tau)-\varepsilon(\tau)]^2\,d\tau\,. \tag{7}$$

Поскольку из определения функции a_T при условии $a_0+\varepsilon_{nT}\in K$ справедливо неравенство

$$\int_0^T[a_T(\tau)-a_0(\tau)-\varepsilon(\tau)]^2\,d\tau+\int_0^T[\varepsilon_{nT}(\tau)-\varepsilon(\tau)]^2\,d\tau=$$

$$=\int_0^T[a_T(\tau)-x(\tau)]d\tau-\int_0^T[a_0(\tau)+\varepsilon_{nT}(\tau)-x(\tau)]^2\,d\tau\leq 0\,,$$

из (7) следует соотношение

$$\int_0^T p_{nT}^2(\tau)d\tau \le 2\int_0^T [a_{nT}(\tau)-a_{n0}(\tau)-\varepsilon(\tau)]^2 d\tau - 2\int_0^T [a_T(\tau)-a_0(\tau)-\varepsilon(\tau)]^2 d\tau. \quad (8)$$

Аналогично находим

$$2\int_0^T [a_T(\tau)-a_0(\tau)-\varepsilon(\tau)]^2 d\tau + 2\int_0^T [a_{nT}(\tau)-a_{n0}(\tau)-\varepsilon(\tau)]^2 d\tau =$$

$$= \int_0^T [a_T(\tau)-a_0(\tau)+a_{nT}(\tau)-a_{n0}(\tau)-2\varepsilon(\tau)]^2 d\tau + \int_0^T q_{nT}^2(\tau)d\tau \ge$$

$$\ge 4\int_0^T [a_T(\tau)-a_0(\tau)-\varepsilon(\tau)]^2 d\tau + \int_0^T q_{nT}^2(\tau)d\tau,$$

откуда

$$\int_0^T q_{nT}^2(\tau)d\tau \le 2\int_0^T [a_{nT}(\tau)-a_{n0}(\tau)-\varepsilon(\tau)]^2 d\tau - 2\int_0^T [a_T(\tau)-a_0(\tau)-\varepsilon(\tau)]^2 d\tau =$$

$$= 2\int_0^T [-q_{nT}^2(\tau)]\{q_{nT}(\tau)+2[a_{nT}(\tau)-a_{n0}(\tau)-\varepsilon(\tau)]\}d\tau.$$

Поэтому

$$3\int_0^T q_{nT}^2(\tau)d\tau \le 4\int_0^T q_{nT}(\tau)[\varepsilon(\tau)-a_{nT}(\tau)+a_{n0}(\tau)]d\tau. \quad (9)$$

Оценим теперь математическое ожидание правой части неравенства (9). Из выражения для q_{nT} имеем

$$E\left|\int_0^T q_{nT}(\tau)[\varepsilon(\tau)-a_{nT}(\tau)+a_{n0}(\tau)]d\tau\right| \le$$

$$\le E\left|\int_0^T q_{nT}(\tau)\varepsilon(\tau)d\tau\right| - E\left|\int_0^T q_{nT}(\tau)[a_{nT}(\tau)-a_{n0}(\tau)]d\tau\right| =$$

$$= E\left|\sum_{|k|>n}[c_k(a_T)-c_k(a_0)]\int_0^T e^{i\lambda_k\tau}\varepsilon(\tau)\,d\tau\right| -$$

$$-E\left|\sum_{|k|>n}[c_k(a_T)-c_k(a_0)]\sum_{|j|\le n}[c_j(a_T)-c_j(a_0)]\int_0^T e^{i(\lambda_k-\lambda_j)\tau}d\tau\right|. \quad (10)$$

Из леммы 1, леммы 4 и леммы 5.4 из работы [19] справедливо, что

$$E\left|\sum_{|k|>n}[c_k(a_T)-c_k(a_0)]\int_0^T e^{i\lambda_k\tau}\varepsilon(\tau)d\tau\right| \le c. \quad (11)$$

В силу условия 5 имеем

$$E\left|\sum_{|j|\le n,\ |k|>n}[c_k(a_T)-c_k(a_0)][c_j(a_T)-c_j(a_0)]\frac{e^{i(\lambda_k-\lambda_j)T}-1}{(\lambda_k-\lambda_j)}\right| \le$$

$$\le 2L^2\Delta^{-1}\sum_{k=-\infty}^{\infty}|k|^{-a}\sum_{|k|>n}|k|^{-a}. \quad (12)$$

Заметим, что для функций из множества K вида

$$a(\tau)=\sum_{|k|>n} c_k(a)e^{i\lambda_k\tau},\ \tau\in\mathbb{R}^1,$$

при фиксированном n справедливо неравенство

$$T\|a\|^2\le\int_0^T a^2(u)du+2L^2\Delta^{-1}\left(\sum_{|k|>n}|k|^{-a}\right)^2. \tag{13}$$

Это неравенство доказывается аналогично неравенству (2) из доказательства леммы 4.

Согласно свойствам функций из множества K для каждого $\varepsilon>0$ существует [12] $\varepsilon_1>0$ такое, что для любой функции $a\in K$ из неравенства $|a(t)|>\varepsilon T^{-1/2}$ при некотором $t\in\mathbb{R}$ следует неравенство $\|a\|^2>\varepsilon_1 T^{-1}$, $\varepsilon_1=\varepsilon_1(\varepsilon)$.

Пусть теперь число n такое, что

$$\delta_n=2L^2\Delta^{-1}\sum_{|k|>n}|k|^{-a}<\varepsilon_1\left(\frac{\delta}{2}\right).$$

Тогда на основании (13) получаем

$$\mathbf{P}\left\{\sqrt{T}|q_{nT}(t)|\ge\frac{\delta}{2},a_0+\varepsilon_{nT}\in K\right\}\le\mathbf{P}\left\{T\|q_{nT}\|^2\ge\varepsilon_1\left(\frac{\delta}{2}\right),\ a_0+\varepsilon_{nT}\in K\right\}\le$$

$$\le\mathbf{P}\left\{\int_0^T q_{nT}^2(\tau)\,d\tau+\delta_n\ge\varepsilon_1\left(\frac{\delta}{2}\right),\ a_0+\varepsilon_{nT}\in K\right\},$$

откуда с учетом (9) и неравенства Маркова имеем

$$\mathbf{P}\left\{\sqrt{T}|q_{nT}(t)|\ge\frac{\delta}{2},\ a_0+\varepsilon_{nT}\in K\right\}\le$$

$$\le\mathbf{P}\left\{\frac{4}{3}\int_0^T q_{nT}(\tau)[\varepsilon(\tau)-a_{nT}(\tau)+a_{n0}(\tau)]\,d\tau\ge\varepsilon_1\left(\frac{\delta}{2}\right)-\delta_n\right\}\le$$

$$\le\frac{4}{3}\left[\varepsilon_1\left(\frac{\delta}{2}\right)-\delta_n\right]^{-1}E\left|\int_0^T q_{nT}(\tau)[\varepsilon(\tau)-a_{nT}(\tau)+a_{n0}(\tau)]\,d\tau\right|.$$

В силу (10)–(12) справедливо следующее неравенство:

$$\mathbf{P}\left\{\sqrt{T}\,|q_{nT}(t)|\ge\frac{\delta}{2},a_0+\varepsilon_{nT}\in K\right\}\le\gamma_n^{(1)}(\delta),\ T>1, \tag{14}$$

с величиной

$$\gamma_n^{(1)}(\delta)=\frac{4}{3}\left[\varepsilon_1\left(\frac{\delta}{2}\right)-\delta_n\right]^{-1}\left[c+2L^2\Delta^{-1}\sum_{k=-\infty}^{\infty}|k|^{-a}\sum_{|k|>n}|k|^{-a}\right].$$

Для оценки величины p_{nT} из соотношения (8) имеем

$$\int_0^T p_{nT}^2(\tau)\,d\tau\le-2\int_0^T q_{nT}^2(\tau)\,d\tau+4\int_0^T q_{nT}(\tau)[\varepsilon(\tau)-a_{nT}(\tau)+a_{n0}(\tau)]\,d\tau,$$

откуда аналогично доказательству (14) получаем

$$\mathbf{P}\left\{\sqrt{T}|\,p_{nT}(t)|\ge\frac{\delta}{2},\ a_0+\varepsilon_{nT}\in K\right\}\le3\gamma_n^{(1)}(\delta),\ T>1. \tag{15}$$

Очевидно, что теперь соотношение (5) следует из (6), (14) и (15) при $\gamma_n(\delta) = 4\gamma_n^{(1)}(\delta)$ для любого $n \ge n_0$.

Вернемся к рассмотрению величины

$$\mathbf{P}\{\sqrt{T}[a_T(t) - a_0(t)] < x\}.$$

С учетом соотношения

$$\lim_{T\to\infty} \mathbf{P}\{\sqrt{T}\varepsilon_{nT}(t) < x + \delta\} = \Phi(x + \delta; \sigma_n^2),$$

которое следует из леммы 2 и доказанного неравенства (5), имеем

$$\overline{\lim_{T\to\infty}} \mathbf{P}\{\sqrt{T}[a_T(t) - a_0(t)] < x\} \le \gamma_n(\delta) + \Phi(x + \delta; \sigma_n^2), \ n \ge n_0,$$

левая часть от n не зависит, а $\sigma_n^2 \to \sigma^2 > 0$, $n \to \infty$, тогда

$$\overline{\lim_{T\to\infty}} \mathbf{P}\{\sqrt{T}[a_T(t) - a_0(t)] < x\} \le \Phi(x + \delta; \sigma^2),$$

и, учитывая, что $\delta > 0$ произвольно, получаем неравенство

$$\overline{\lim_{T\to\infty}} \mathbf{P}\{\sqrt{T}[a_T(t) - a_0(t)] < x\} \le \Phi(x; \sigma^2). \tag{16}$$

Аналогично доказывается неравенство

$$\overline{\lim_{T\to\infty}} \mathbf{P}\{\sqrt{T}[a_T(t) - a_0(t)] < x\} \ge \Phi(x; \sigma^2). \tag{17}$$

Теперь утверждение теоремы следует из неравенства (16) и (17). ■

Таким образом, в статье рассмотрена стохастическая модель передачи информации типа «сигнал плюс шум» в случае неизвестной функции сигнала из некоторого компактного множества почти-периодических функций K, которая наблюдается на фоне случайного шума, заданного функционалом от гауссовского случайного процесса с сильной зависимостью. Исследована задача идентификации сигнала по наблюдениям $x(t)$ на интервале $[0, T]$, доказана с вероятностью единица состоятельность и асимптотическая нормальность оценки сигнала. Практическое применение таких моделей изучено в работах [1, 10, 24, 25].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сванидзе Г.Г. Математическое моделирование гидрологических рядов. — Л.: Гидрометеоиздат, 1977. — 296 с.
2. Гречка Г.П., Дороговцев А.Я. Об асимптотических свойствах периодограммной оценки частоты и амплитуды гармонического колебания // Вычисл. и прикл. математика. — 1976. — № 28. — С. 18–31.
3. Иванов А.В. Одно решение задачи о выявлении скрытых периодичностей // Теория вероятностей и мат. статистика. — 1979. — Вып. 20. — С. 44–59.
4. Кнопов П.С. Оптимальные оценки параметров стохастических систем. — К.: Наук. думка, 1981. — 152 с.
5. Кнопов П.С. Оценивание неизвестных параметров почти периодической функции при наличии шума. I // Кибернетика — 1984. — №. 6. — С. 83–87, 98.
6. Жураковський Б.М., Іванов О.В. Консистентність оцінки найменших квадратів параметрів суми гармонічних коливань у моделях із сильно залежним шумом // Наукові вісті НТУУ «КПІ». Теоретичні та прикладні проблеми математики. — 2010. — Вип. 4. — С. 60–66.
7. Жураковський Б.М., Іванов О.В. Властивості періодограмних оцінок параметрів гармонічного коливання у моделях регресії з сильно залежним шумом // Наукові вісті НТУУ «КПІ». Теоретичні та прикладні проблеми математики. — 2012. — № 4 (84). — С. 59–65.

8. Кнопов П.С., Била Г.Д. Периодограммные оценки в моделях нелинейной регрессии с сильнозависимым шумом // Кибернетика и системный анализ. — 2013. — № 4. — С. 163–172.
9. Hannan E.J. The estimation of frequency // Journal of Applied Probability. — 1973. — **10**, N 3. — P. 510–519.
10. Lévy-Leduc C. Efficient frequency estimation from a particular almost periodic function with application to laser vibrometry // Journal of Time Series Analysis. — 2006. — **27**, N 5. — P. 637–669.
11. Дороговцев А.Я. Об оценке почти-периодического сигнала по наблюдению в стационарном шуме // Вопросы статистики и управления случайными процессами (тематический сборник). — 1973. — С.74–105.
12. Дороговцев А.Я. Теория оценок параметров случайных процессов. — К.: Вища шк., 1982. — 192 с.
13. Кнопов П.С., Пепеляев В.А. О непараметрической оценке почти-периодического сигнала // Кибернетика и системный анализ. — 2007. — № 3. — С. 57–63.
14. Леоненко Н.Н., Иванов А.В. Статистический анализ случайных полей. — К.: Вища шк., 1986. — 216 с.
15. Ivanov O.V., Leonenko N.N., Ruiz–Medina M.D., Zhurakovsky B.M. Estimation of harmonic component in regression with cyclically dependent errors // Statistics: A Journal of Theoretical and Applied Statistics. — 2015. — **49**, N 1. — P. 156–186.
16. Bohr H. Almost periodic functions. — New York: Chelsea Publishing Company, 1947. — 114 p.
17. Knopov P.S., Kasitskaya E.J. Empirical estimates in stochastic optimization and identification. — New York: Kluwer Academic Publishers, 2002. — 250 p.
18. Біла Г.Д. Оптимальне оцінювання параметрів нелінійних стохастичних систем : Дис. … канд. фіз.-мат. наук: ІК НАНУ. — К., 2014. — 121 с.
19. Taqqu M.S. Convergence of integrated processes of arbitrary Hermite rank // Z. Wahrscheinlichkeitstheofie verw. Gebiete. Springer–Verlag. — 1979. — **50**, N 1. — P. 53–83.
20. Ахиезер Н.И., Глазман И.М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1966. — 544 с.
21. Біла Г.Д. Оцінка двовимірного сигналу за спостереженнями з сильнозалежним випадковим шумом // Прикладна статистика. Актуарна та фінансова математика: Наук. журнал. Донецький нац. ун-т. — 2013. — № 1–2. — С. 116–134.
22. Beran J. Statistics for Long–Memory Processes. — New York: Chapman and Hall, 1994. — 315 p.
23. Ivanov A.V., Orlovsky I.V. Lp-estimates in nonlinear regression with long-range dependence // Theory of Stochastic Processes. — 2002. — **7(23)**, N 3 — 4. — P. 38–49.
24. Кнопов П.С. О некоторых прикладных задачах теории случайных полей // Кибернетика и системный анализ. — 2010. — № 1. — С. 70–81.
25. Прикладной анализ случайных процессов / А.В. Графкин и др.; под ред. Прохорова С.А. — Самара: СНЦ РАН, 2007. — 582 с.

Поступила 23.07.2015