



МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭВОЛЮЦИИ РАСПРОСТРАНЯЮЩЕГОСЯ СИГНАЛА ОТ ВХОДА ДО ВЫХОДА С ПОЛНЫМ ПОГЛОЩЕНИЕМ

Аннотация. Приведена постановка начально-краевой задачи распространения ступенчатого импульса от входа до выхода на основе гиперболического уравнения с диссипацией, описывающего распространение волн с конечной скоростью. Точное аналитическое решение получено в пространстве изображений Лапласа. Проведено численное обращение преобразования Лапласа и дан анализ полученных результатов.

Ключевые слова: распространение сигнала, обобщенное уравнение, полное поглощение на выходе, преобразование Лапласа, численное обращение.

ВВЕДЕНИЕ

В реальных системах конечной длины сигнал (импульс) от входа распространяется вдоль системы, доходит до конечной области интервала, где может отражаться или поглощаться частично либо полностью в зависимости от задания стратегии функционирования системы. В большинстве исследований начально-краевая задача рассматривается в полубесконечном интервале от входа на основе телеграфного уравнения. В данной работе изучается распространение сигнала в конечном интервале с его полным поглощением на выходе.

Распространение сигналов с полным поглощением на выходе представляет интерес в различного рода устройствах при обработке сигналов [1] и в биологических процессах, включая мозговую активность, при передаче сигналов синапсами [2]. Некоторые частные задачи для телеграфного уравнения исследованы аналитически, а в последние годы — с использованием компьютерного моделирования [3, 4]. Так, решение задачи в полубесконечной области без учета диссипативного члена получено в [5]. Телеграфное уравнение как частный случай общего гиперболического уравнения анализировалось также в [6] с применением функций Римана. Сингулярное вырождение уравнения и построение обобщенных решений исследовалось в [7].

В реальных системах любое возмущение распространяется с конечной скоростью [8–15]. Максвелл провел исследования (1867) по теории газов на основе кинетической теории газов и показал, что волны в газах также распространяются с конечной скоростью, в отличие от традиционной теории, предсказывающей бесконечную скорость распространения. Следуя Максвеллу, Каттанео записал (1948) транспортное уравнение, дополненное членом с временной релаксацией η_1 . Это привело к разрешающему уравнению гиперболического типа с диссипацией.

Рассмотрим уравнение для функции $T(x, y, t)$, описывающей состояние системы при его резком изменении (неравновесная термодинамика, движение час-

тиц в среде, седиментация и др.),

$$\nabla^2 T - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} - \frac{1}{k_1} \frac{\partial T}{\partial t} = 0, \quad (1)$$

где c_1 — скорость распространения возмущения, определяемая как $c_1 = \sqrt{k_1 / \eta_1}$, η_1 — параметр релаксации, k_1 — коэффициент диффузии, x и y — пространственные координаты, t — время, ∇^2 — лапласиан. Это гиперболическое уравнение с диссипацией.

Вклад гиперболического и параболического операторов определяется решением уравнения (1). При мгновенном включении сигнала его передача в начальный момент времени описывается гиперболическим оператором. Затем проявляются диффузионные эффекты.

Все последующие обобщения параболических моделей основаны на обобщенном транспортном уравнении. В результате было предложено много моделей, обобщающих параболические [16].

Далее, принимая в качестве исходных характерных величин η_1 (с) и k_1 ($\text{м}^2/\text{с}$), получаем

$$x^* = x / \sqrt{\eta_1 k_1}, \quad t^* = t / \eta_1, \quad T^* = T / T_0, \quad c_1^* = 1, \quad k_1^* = 1. \quad (2)$$

Уравнение (1) в одномерном случае с учетом (2) принимает вид

$$\frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} - \frac{\partial^2 T^*}{\partial t^{*2}} - \frac{\partial T^*}{\partial t^*} = 0. \quad (3)$$

Проведенное масштабирование упрощает запись уравнения, но усложняет анализ задачи с деформированными масштабами. В дальнейшем звездочки опускаем.

Рассмотрим уравнение распространения свободных гармонических волн типа бегущих волн

$$T(x, t) = A e^{i(kx - \omega t)}, \quad (4)$$

где $k = 2\pi / \lambda$ — волновое число, λ — длина волны, $\lambda^* = \lambda / \sqrt{\eta_1 k_1}$, $\omega = kc_p$ — круговая частота, c_p — фазовая скорость, $c_p^* = c_p \sqrt{\eta_1 / k_1}$.

После подстановки (4) в (3) получаем условие разрешимости в виде дисперсионного уравнения и записываем (4) в виде

$$e^{ik(x - (\text{Re} c_p)t)} e^{k(\text{Im} c_p)t}. \quad (5)$$

Величины $\text{Re} c_p$ и $\text{Im} c_p$ находятся из дисперсионного уравнения в явном виде

$$\text{Re} c_p = \sqrt{1 - \frac{1}{4} \left(\frac{\lambda}{2\pi} \right)^2}, \quad \text{Im} c_p = -\frac{1}{2} \frac{\lambda}{2\pi}, \quad (6)$$

второй множитель в (6) равен $\exp(-t/4)$.

Из (5) и (6) видно, что предельный переход $\lambda \rightarrow 0$ соответствует выходу на характеристику $\text{Re} c_p = 1$, а с увеличением длины волны λ вклад гиперболическости сильно убывает.

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА

Исследуем распространение импульса, который мгновенно включается на входе и проходит до выхода на конечном интервале $x \in (0, l_1)$. При мгновенном

включении импульса его передача в начальный момент времени описывается гиперболическим оператором. Затем проявляются диффузионные эффекты.

Начально-краевая задача для функции $T(x, t)$ на основе уравнения (3) формулируется в виде

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} - \frac{\partial T}{\partial t} = 0, \quad x \in (0, l_1), \quad t \in (0, T_1), \quad (7)$$

с граничными условиями

$$T(x, t)|_{x=0} = H(t), \quad T(x, t)|_{x=l_1} = H(t - l_1 / c_1), \quad (8)$$

где $H(t)$ — функция Хевисайда, и начальными условиями

$$T(x, t)|_{t=0} = 0, \quad T_t(x, t)|_{t=0} = 0. \quad (9)$$

Для решения задачи (7)–(9) применяем преобразование Лапласа

$$T^L(x, p) = \int_0^{\infty} T(x, t) e^{-pt} dt. \quad (10)$$

В пространстве изображений получаем из (7)–(10) уравнения

$$\frac{d^2 T^L}{dx^2} - p(p+1)T^L = 0, \quad (11)$$

$$T^L(x, p)|_{x=0} = \frac{1}{p}, \quad T^L(x, p)|_{x=l_1} = \frac{1}{p} e^{-pl_1/c_1}. \quad (12)$$

Решение уравнения (11) записывается в виде

$$T^L(x, p) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x}, \quad (13)$$

где

$$\lambda = \sqrt{p(p+1)}, \quad (14)$$

а произвольные постоянные C_1 и C_2 определяются из граничных условий (12):

$$C_1 = -\frac{1}{p} \frac{e^{-\lambda l_1} - e^{-pl_1/c_1}}{e^{\lambda l_1} - e^{-\lambda l_1}}, \quad C_2 = \frac{1}{p} \frac{e^{\lambda l_1} - e^{-pl_1/c_1}}{e^{\lambda l_1} - e^{-\lambda l_1}}. \quad (15)$$

Таким образом, соотношения (13)–(15) представляют точное решение в пространстве изображений задачи (7)–(9) на конечном интервале $x \in (0, l_1)$, соответствующем входу в систему при $x = 0$ и дальнейшему распространению волн до конца интервала $x = l_1$, где имеет место полное поглощение волн. На входе при $x = 0$ задается функция Хевисайда. На выходе при $x = l_1$ задается условие полного поглощения, так что волны обратно не распространяются. Для другой входной функции решение может быть получено с помощью интеграла Дюамеля [5].

Построение точного аналитического решения связано со сложным анализом в комплексной плоскости. Из анализа рассматриваемой задачи следует, что особые точки определяются корнем λ , который является многозначным, что существенно усложняет задачу при приближении от больших $|p|$ к началу координат. Поэтому исследователи, как правило, ограничиваются большими $|p|$ (малые времена).

Если иметь в виду распространение нервного возбуждения в волокне, то, как отмечалось выше, в начальный момент времени, когда $\lambda \rightarrow 0$, проявляется гиперболичность, т.е. распространение сигнала с конечной скоростью. При увеличении λ резко возрастает влияние диссипативности и сигнал плохо распространяется в конечную точку. Синапс (в мозге) сильно диссипируется из-за нарушения миелиновой (диэлектрической) внешней оболочки, и потенциал реального нервного возбуждения в конечную точку (нейрон) приходит искаженным или вообще не доходит. Это приводит к заболеваниям типа рассеянного склероза, Альцгеймера, Паркинсона [2]. Приведенная здесь модель может применяться для приближенного исследования указанных явлений.

ЧИСЛЕННОЕ ОБРАЩЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

Преобразование Лапласа функции $f(t)$ определяется оператором [17]

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt \quad (16)$$

для комплексного параметра $p = \sigma + i\tau$ в предположении, что $F(p)$ — аналитическая функция в области $\text{Re } p > \sigma_c$, в этой области она равномерно сходится, $F(p) \rightarrow 0$ относительно $\arg p$ при $p \rightarrow \infty$ и в случае абсолютной сходимости (16) вдоль прямой при $\forall \text{Re } p > \sigma_c$ существует оператор обращения

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_c - i\infty}^{\sigma_c + i\infty} F(p)e^{pt} dp. \quad (17)$$

Обратная задача заключается в нахождении решения $f(t)$ интегрального уравнения первого рода (17), где $F(p)$ — известная функция комплексного аргумента p . Ядро e^{-pt} — гладкая функция t и p , и операция осреднения f с весом e^{-pt} может существенно сгладить сингулярности функции $f(t)$. Задача восстановления всех локальных неровностей $f(t)$ требует привлечения подходов, чувствительных даже к незначительным особенностям поведения $F(p)$.

Функция $f(t)$ неустойчива относительно малых вариаций $F(p)$. Следовательно, проблема обращения, как задача отыскания решения $f(t)$ интегрального уравнения первого рода (16), относится к числу некорректных задач: решения возможны не для всех величин численных или функциональных параметров, а слабые вариации этих параметров могут приводить к большим вариациям решения. Этот факт — главная причина, ограничивающая возможности всех известных алгоритмов обращения. Для увеличения точности обращений необходимо удерживать в рядах по возможности большее количество членов. Однако это требует повышения точности рассчитываемых коэффициентов, что ранее было ограничено возможностями компьютера.

Характерная особенность всех методов численного обращения в том, что они хорошо реализуются при больших параметрах преобразования Лапласа $|p| < \infty$, $|p| \gg 1$, т.е. вблизи бесконечно удаленной точки в комплексной плоскости $p = \text{Re } p + i\text{Im } p$. По мере уменьшения $|p|$ все методы численного обращения ухудшаются.

Алгоритмы численного обращения преобразования Лапласа посредством сопоставления решений с эталонными табличными оригиналами и некоторыми точными решениями подробно анализируются в [18]. Метод, основанный на разложениях по смещенным многочленам Лежандра [19] и применении рядов

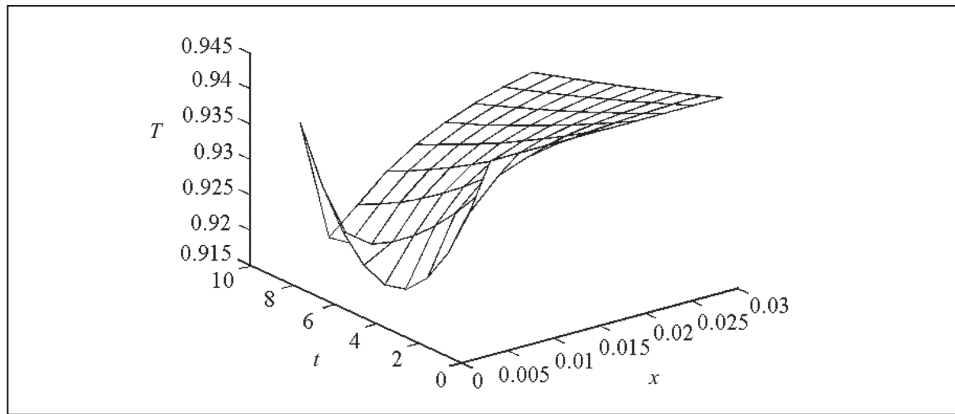


Рис. 1. Эволюция импульса в пространстве и времени

Фурье по четным дугам синуса [5], эффективно использовался во многих работах для недиссипативных систем. Проводилось много исследований распространения пульсовых волн давления в кровеносных сосудах [2].

Показано, что существует оптимальное число членов в разложениях, т.е. увеличение числа членов в сходящихся рядах ограничено сверху возможностями численной реализации — числом значащих цифр. Установлено также, что точность всех алгоритмов численного обращения падает с увеличением времени анализа.

Обратная задача рассеяния плоских электромагнитных волн цилиндрической плазменной неоднородностью как некорректная рассматривалась методами функционального анализа в [20]. По известным измерениям амплитуды рассеяния $T_m(k)$ в нескольких точках можно восстановить плотность электронов $N(r)$ как функции радиуса r .

В дальнейшем было предложено много других методов численного обращения преобразования Лапласа. Развивался также альтернативный подход численного обращения преобразования Лапласа, основанный на разложениях Фурье [21]. Этот метод был применен при решении начально-краевой задачи для гиперболической системы уравнений, содержащей параметр релаксации (параболический оператор) [22], и только для начальных времен. Отметим, что в такого типа задачах имеется гиперболический оператор более высокого порядка, чем параболический, и это существенно облегчает реализацию численного обращения.

На основе точного решения, полученного в пространстве изображений Лапласа, построено численное решение методом Дурбина [23], показанное на рис. 1.

Заметим, что в каждом методе необходимо подбирать некоторый корректирующий параметр для определенного класса возмущений.

Исследование распространения импульса проведено численным обращением преобразования Лапласа на основе метода Эйлера [24]. Формула для вычисления искомой функции имеет вид

$$T(x, t) = \frac{10^{M/3}}{t} \sum_{k=0}^{2M} \eta_k \operatorname{Re} \left(T^L \left(x, \frac{\beta_k}{t} \right) \right),$$

где $\beta_k = \frac{M \ln(10)}{3} + \pi i k$, $\eta_k = (-1)^k \xi_k$, $\xi_0 = \frac{1}{2}$, $\xi_k = 1$, $1 \leq k \leq M$, $\xi_{2M} = \frac{1}{2^M}$,
 $\xi_{2M-k} = \xi_{2M-k+1} + 2^{-M} C_M^k$, $0 < k < M$.

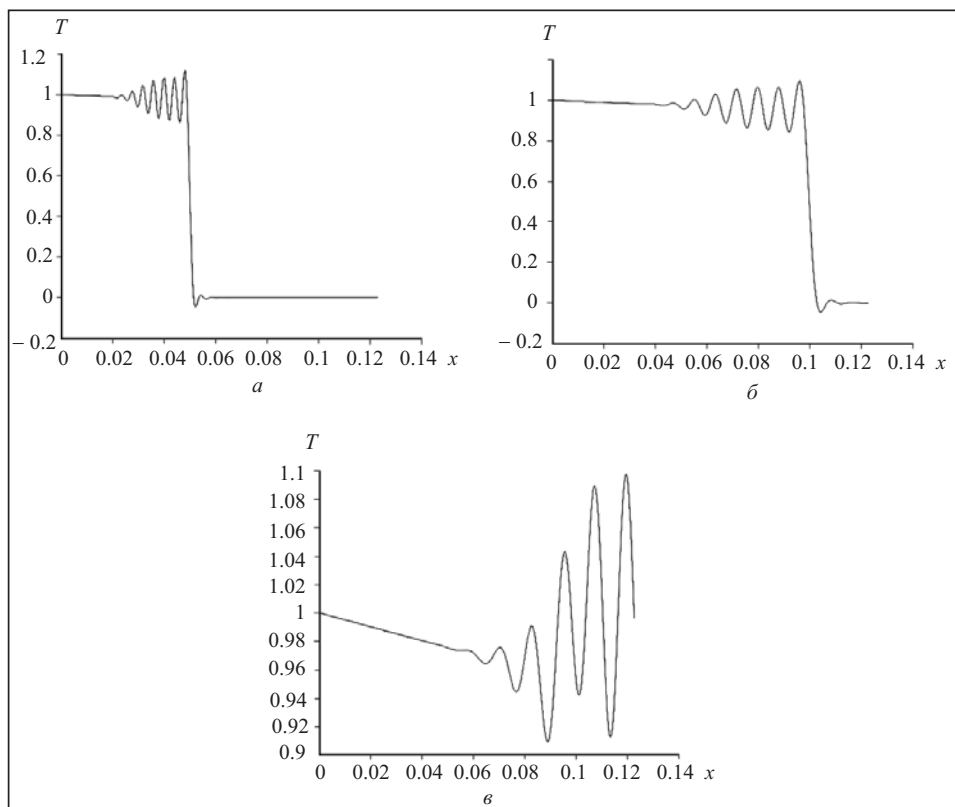


Рис. 2. Графики распространения импульса при $t = 0.05$ (а), 0.10 (б), 0.15 (е)

При этом значение параметра M полагалось равным 16, что согласно [18] дает точность в девять значащих цифр. Результаты представлены на рис. 2, где видно распространение импульса в разные моменты времени при $t = 0.05, 0.10, 0.15$. Процессы соответствуют расстоянию 1 см, величине диффузии $1 \text{ м}^2/\text{с}$ и 10 % релаксации согласно исследованиям Максвелла и его последователей. Принимаем в расчетах величину $k_1 = 1 \text{ м}^2/\text{с}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе проведен анализ распространения сигнала от входа до конечной точки на основе обобщенного гиперболического уравнения с учетом диссипации. Исследовано распространение гармонических волн и показано сильное демпфирование сигнала. Приведена постановка и решение начально-краевой задачи с полным поглощением в конечной точке. Построено точное аналитическое решение в пространстве изображений Лапласа. Получены численные решения на основе современных методов и метода Эйлера численного обращения преобразования Лапласа. Показано прохождение импульса и его полное поглощение на выходе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Винер Н. Кибернетика, или управление и связь в животном и машине. — М.: Наука, 1983. — 403 с.
2. Селезов И. Т., Кривонос Ю. Г. Волновые задачи биогидродинамики и биофизики. — Киев: Наук. думка, 2013. — 308 с.

3. Mc Cartin B.J. Characteristic based schemes for the hyperbolic heat conduction equations // Applied Mathematical Sciences. — 2009. — **3**, N 42. — P. 2055–2083.
4. Vabishchevich P.N. Splitting schemes for hyperbolic heat conduction equation // BIT Number Math. — 2013. — DOI 10.1007/s10543-013-0423-7.
5. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. — М.: ГИФМЛ, 1960. — 208 с.
6. Courant R., Hilbert D. Methods of mathematical physics. — New York; London: Interscience, 1962. — Vol 1, 2.
7. Кривонос Ю.Г., Селезов И.Т. О моделировании седиментации гиперболическим уравнением и его вырождение // Доп. НАН України. — 2014. — № 9. — С. 40–43.
8. Maxwell J.C. A dynamical theory of the electromagnetic field // Phil. Trans. Roy. Soc. London. — 1865. — **155**. — P. 459–512 (Published 1 January 1865). — doi:10.1098/rstl.1865.0008.
9. Maxwell I.C. On the dynamical theory of gases // Phil. Trans. Roy. Soc. London. — 1867. — **157**. — P. 49–88.
10. Cattaneo C. Sulla conduzione del calore // Atti Seminario Univ. Modena. — 1948. — **3**. — P. 3–21.
11. Vernotte P. Les paradoxes de la théorie continue de l'équation de la chaleur // Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. — 1958. — **246**, N 22. — P. 3154–3155; La véritable équation de la chaleur. — 1958. — **247**, N 23. — P. 2103–2105.
12. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. — 3-е изд., перераб. — М.: Физматгиз, 1960. — 512 с. — (Теоретическая физика; Т. 2).
13. Luikov A.V. Application of irreversible thermodynamics methods to investigation of heat and mass transfer // Int. J. Heat Mass Transfer. — 1966. — **9**. — P. 139–152.
14. Селезов И.Т. Концепция гиперболичности в теории управляемых динамических систем // Кибернетика и вычисл. техника. — 1969. — Вып. 1. — С. 131–137.
15. Селезов И.Т., Кривонос Ю.Г. Волновые гиперболические модели распространения возмущений. — Киев: Наук. думка, 2015. — 172 с.
16. Selezov I., Volynski R. Wave refraction and sediment dynamics modeling in coastal zone. — Kiev: SMP "AVERS", 2013. — 150 p.
17. Крылов В.И., Скобля Н.С. Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа. — М.: Наука, 1974. — 224 с.
18. Селезов И.Т., Кривонос Ю.Г. Математические методы в задачах распространения и дифракции волн. — Киев: Наук. думка, 2012. — 232 с.
19. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. — М.: Физматгиз, 1961. — 524 с.
20. Селезов И.Т. К обратным задачам диагностики плазменных неоднородностей // Распределенное управление процессами в сплошных средах. — Киев: Ин-т кибернетики АН УССР, 1972. — С. 22–48.
21. Honig G., Hirdes U. A method for the numerical inversion of Laplace transform // J. Comp. Appl. Math. — 1984. — **10**, N 1. — P. 113–132.
22. Sherief H.H., Youssef H.M. Short time solution for a problem in magnetoelastocity with thermal relaxation // J. Thermal Stresses. — 2004. — **27**, N 6. — P. 537–559.
23. Durbin F. Numerical inversion of Laplace transforms: an efficient improvement to Dubner and Abate's method // Computer J. — 1973. — **17**, N 4. — P. 371–376.
24. Abate J., Whitt W. A unified framework for numerically inverting Laplace transforms // INFORMS J. on Computing. — 2006. — **18**, N 4. — P. 408–421.

Поступила 12.08.2015