УДК 542.67+6281

В.Л. Поляков

ФИЛЬТРОВАНИЕ СУСПЕНЗИЙ ЧЕРЕЗ МНОГОСЛОЙНУЮ ЗАГРУЗКУ ПРИ НЕЛИНЕЙНОЙ КИНЕТИКЕ МАССООБМЕНА
1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Представлены строгие теоретические зависимости для расчета объемных концентраций осадка и взвеси, потерь напора, а также характерных времен (защитного действия загрузки и достижения предельно допустимых потерь напора) в многослойной загрузке при нелинейной кинетике массообмена и постоянной скорости фильтрования. Кроме того, в частном случае двухслойной загрузки приведены аналогичные формулы применительно к линейной кинетике.

Ключевые слова: фильтрование, суспензия, многослойная загрузка, нелинейная кинетика, концентрация, потери напора, фильтрат, осадок.

Введение. Одной из основных причин недостаточно эффективной работы традиционных фильтров с однородной загрузкой является значительная неравномерность распределения осадка по ее высоте. Поэтому промывку этих фильтров, как правило, приходится проводить задолго до исчерпания грязеемкостного ресурса фильтрующего материала. Работа фильтровальных установок продлевается различными способами. Так, удается существенно интенсифицировать осветление суспензий, применяя двух- и многослойные загрузки, ступенные фильтры [1–7]. Метод расчета характеристик фильтрования (выходная концентрация, напор, характерные времена) для одной сравнительно простой, с формальной точки зрения, кинетики массообмена между твердой (фильтрующий материал и осадок) и жидкой (суспензия) фазами насыщенной пористой среды, а именно линейной [8, 9], применительно к загрузкам, сложенным из любого количества слоев, описан в [10]. Зачастую, однако, накапливаемый в порах осадок оказывает серьезное влияние на адгезионный процесс. Во-первых, частицы осадка могут становиться вторичными коллекторами, что способствует усилению осаждения взвеси по крайней мере в начале фильтроцикла. Во-вторых, прилипая к поверхности первичных коллекторов, чаще всего зерен, взвесь сокращает поверхность последних, которая доступна ей, что ведет к ухудшению адгезионных свойств материала загрузки. Чтобы учесть отмеченные особенности взаимного влияния зерен и частиц суспензии, коэффициент скорости прилипания последних α_l в уравнении линейной массообменной кинетики

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \alpha_l C - \beta S, \qquad (1)$$

считается переменным и зависит от объемной концентрации осажденных твердых частиц S (C – объемная концентрация взвеси, β – коэффициент скорости отрыва прилипших частиц). На основе многочисленных экспериментальных данных [8, 11– 14], главным образом выходных кривых концентрации C, предложен целый ряд зависимостей $\alpha = \alpha(S)$, подстановка которых в (1) привела к уравнениям уже нелинейной кинетики. Среди них наибольшее распространение при математическом моделировании массообмена получило уравнение

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \alpha_n (S_0 - S) C - \beta S, \qquad (2)$$

где α_n – приведенный коэффициент скорости адгезии, S_0 – грязеемкость по отношению к осажденным частицам суспензии (при наличии в осадке связанной воды величина S_0 будет меньше фактической грязеемкости и подчас намного). Таким образом учитывается постепенное ослабление поглотительной способности зерен из-за уменьшения на них количества вакантных для взвешенных частиц мест. Подобная трактовка коэффициента α_l и трансформация в связи с этим уравнения (1) крайне затрудняют использование аналитических методов и получение решений соответствующих математических задач фильтрования. Тем не менее строгое решение, по существу, базовой задачи, отвечающей наиболее распространенному на практике режиму фильтрования с постоянной скоростью v, было найдено в [15] и с многочисленными ошибками представлено в [16]. Затем аналогичным путем найдено фактически точное решение задачи для более сложной ситуации, когда исходная концентрация взвеси C_0 изменяется со временем закономерным образом, т.е. задана функция $C_0 = C_0(t)$ [17]. Такое решение может найти применение в инженерной практике. Но основное его значение заключается в том, что подобные условия фильтрования характерны для работы отдельных слоев слоистой загрузки и ступеней ступенного фильтра вследствие ничтожно малого вклада в массоперенос диффузионного механизма транспорта взвеси. Естественно, что именно это решение послужило основой для разработки многочисленных расчетных формул, а по существу, инженерного метода применительно к условиям массообмена согласно (2) и фильтрам со слоистой загрузкой. Несмотря на свою громоздкость, отмеченные формулы благодаря интегральной форме позволяют с помощью различных стандартных пакетов программ математического анализа (Mathcad, Matlab и др.) оперативно выполнять разнообразный количественный анализ, устанавливать рациональные технологические и конструктивные параметры.

Формулировка математической задачи и расчетный метод

Математическая модель фильтрования суспензий через многослойную загрузку имеет сложные структуру и форму вследствие большого разнообразия физико-химических свойств ее материала. В случае N слоев модель состоит из N взаимосвязанных однотипных субмоделей, каждая из которых описывает комплексный осветлительный процесс в пределах строго определенного слоя. Ее детальная характеристика представлена в [10], но только для линейной кинетики. Основополагающая модель при осложненном прилипании взвеси, благодаря которой и разработан новый расчетный метод, следует из вышеупомянутой в результате замены N уравнений линейной кинетики (1) на аналогичное количество уравнений нелинейной кинетики (2). Тогда математическая задача разделения суспензии в i-том слое ($1 \le i \le N$) формулируется следующим образом:

$$n_{ei}\frac{\partial C_i}{\partial t} + v\frac{\partial C_i}{\partial z} + \frac{\partial S_i}{\partial t} = 0; \qquad (3)$$

$$\frac{\partial S_i}{\partial t} = \alpha_{ni}\left(S_{0i} - S_i\right)C_i - \beta_i S_i; \qquad (4)$$

$$v = -k_i\frac{\partial H_i}{\partial z}; \qquad (5)$$

$$k_i = k_{0i}\cdot f_i\left(S_i\right), \qquad (6)$$

где индекс "i" указывает на принадлежность соответствующей характеристики к i-тому слою загрузки; H_i – пьезометрический напор; n_e – эффективная пористость; k, k_0 – текущий и исходный коэффициенты фильтрации; f – эмпирическая функция, характеризующая снижение проницаемости слоя по мере отложения в нем взвешенных частиц. Оператор граничных и начальных условий не зависит от процессов осаждения и отрыва, а поэтому остается таким же, как и в работе [10], в которой он подробно описан.

В соответствии с [18] общую математическую модель целесообразно условно разделить на два взаимосвязанных блока – деформационный и гидродинамический. Первый из них характеризует поведение частиц суспензии в загрузке и базируется на уравнениях (3), (4), а второй – фильтрацию носителя и основывается на (5), (6). В случае постоянной скорости фильтрования влияние гидродинамического блока на деформационный является минимальным и им можно пренебречь. Следует заметить, что обратное влияние оказывается намного сильнее и поэтому должно учитываться в полной мере. Отмеченный факт послужил основанием для решения в [10] сначала системы уравнений (3), (4) при соответствующих условиях и однородной загрузке независимо от уравнений фильтрации (5), (6), а затем установления на базе (5), (6) при уже известной относительной функции-концентрации $\overline{S}\left(\overline{z},\overline{t}\right)$ распределения и потерь напора. Далее эти результаты адаптируются к многослойной загрузке. Но прежде с применением масштабов C_0, S_{0i}, v, L (высота загрузки), k_e (эффективный коэффициент фильтрации чистой загрузки [10]), n_{01} (пористость чистого верхнего слоя), $H_{u0}-H_d$ (разница напоров во входном на момент $t=0$ и выходном сечениях загрузки) введены безразмерные переменные и параметры: $\overline{C}_i=\dfrac{C_i}{C_0}$, $\overline{S}_i=\dfrac{S_i}{S_{0i}}$, $\overline{z}=\dfrac{z}{L}$, $\overline{t}=\dfrac{vt}{n_{01}L}$, $\overline{n}_{ei}=\dfrac{n_{ei}}{n_{01}}$, $\overline{k}_i=\dfrac{k_i}{k_e}$, $\overline{k}_{0i}=\dfrac{k_{0i}}{k_e}$, $\tilde{H}_i=\dfrac{H_i-H_d}{H_u-H_d}$, $\overline{\alpha}_{ni}=\dfrac{n_{01}LC_0\alpha_{ni}}{v}$, $\overline{\beta}_i=\dfrac{n_{01}L\beta_i}{v}$, $\psi_i=\dfrac{S_{0i}}{n_{01}C_0}$. Тогда систему уравнений (3) – (6) можно преобразовать в виде

$$\overline{n}_{ei}\frac{\partial\overline{C}_i}{\partial\overline{t}}+\frac{\partial\overline{C}_i}{\partial\overline{z}}+\psi_i\frac{\partial\overline{S}_i}{\partial\overline{t}}=0; \tag{7}$$

$$\frac{\partial\overline{S}_i}{\partial\overline{t}}=\overline{\alpha}_{ni}\left(1-\overline{S}_i\right)\overline{C}_i-\overline{\beta}_i\overline{S}_i; \tag{8}$$

$$\overline{k}_i\frac{\partial\tilde{H}_i}{\partial\overline{z}}=-1; \tag{9}$$

$$\overline{k}_i=\overline{k}_{0i}\cdot f_i\left(\overline{S}_i\right). \tag{10}$$

Решение уравнений (7), (8) для однородной загрузки было построено при заданной переменной входной концентрации $C(0,t)$ и практически точно отразило изменение $\bar{C}$, $\bar{S}$ по высоте и со временем при $\bar{t} >> 1$. В случае многослойной загрузки оправданно считать известной концентрацию взвеси на входе в *i*-тый слой C_{0i}, т.е. принимать условие

$$\bar{z} = \bar{M}_{i-1}, \qquad \bar{C}_i = \bar{C}_{0i}\left(\bar{t}\right), \tag{11}$$

где $\bar{M}_i = \dfrac{M_i}{L}$ (M_i – глубина *i*-того слоя $\left(M_1 = 0\right)$), $M_i = \sum\limits_{j=1}^{i-1} m_j$ (m_j – толщина j-того слоя). Действительно, величина $\bar{C}_{01}\left(\bar{t}\right)$ может быть определена предварительно путем последовательного решения аналогичных (7), (8), (11) задач для первого (здесь входная концентрация C_0 является постоянной и заданной), второго и далее вплоть до *i*–1-того слоев. После этого $\bar{C}_{i-1}\left(\bar{M}_i, \bar{t}\right)$ в силу условий равенства концентраций на межслойных границах отождествляется с $\bar{C}_{01}\left(\bar{t}\right)$. Принимая это во внимание и исходя из [17], для искомых концентраций и $\bar{M}_i \le \bar{z} \le \bar{M}_{i+1}$ предлагаются следующие зависимости:

$$\bar{C}_i\left(\bar{z},\bar{t}\right) = -\frac{\bar{\beta}_i}{\bar{\alpha}_{ni}} + \frac{U_{i1}\left(\bar{z},\bar{t}\right)}{\bar{\alpha}_{ni} U_i\left(\bar{z},\bar{t}\right)}; \tag{12}$$

$$\bar{S}_i\left(\bar{z},\bar{t}\right) = 1 - \frac{U_{i2}\left(\bar{z},\bar{t}\right)}{\bar{\alpha}_{ni}\psi_i U_i\left(\bar{z},\bar{t}\right)}. \tag{13}$$

Здесь

$$U_i\left(\bar{z},\bar{t}\right) = \bar{\alpha}_{ni}\psi_i \int\limits_0^{\bar{z}-\bar{M}_i} e^{\bar{\alpha}_{ni}\psi_i\left(\bar{z}-\bar{M}_i-\theta\right)} I_0\left(2\sqrt{\bar{\alpha}_{ni}\bar{\beta}_i\psi_i\bar{t}\theta}\right)d\theta + \tilde{U}_i\left(\bar{t}\right) +$$
$$+\sqrt{\bar{\alpha}_{ni}\bar{\beta}_i\psi_i\left(\bar{z}-\bar{M}_i\right)} \int\limits_0^{\bar{t}} \tilde{U}_i(\xi) \frac{I_1\left(2\sqrt{\bar{\alpha}_{ni}\bar{\beta}_i\psi_i\left(\bar{z}-\bar{M}_i\right)\left(\bar{t}-\xi\right)}\right)}{\sqrt{\bar{t}-\xi}} d\xi; \tag{14}$$

$$U_{i1}\left(\bar{z},\bar{t}\right)=\left[\bar{\beta}_i+\bar{\alpha}_{ni}\bar{C}_{01}\left(\bar{t}\right)+\bar{\alpha}_{ni}\bar{\beta}_i\psi_i\left(\bar{z}-\bar{M}_i\right)\right]\cdot\tilde{U}_i\left(\bar{t}\right)+$$
$$+\sqrt{\frac{\bar{\alpha}_{ni}^3\bar{\beta}_i\psi_i^3}{\bar{t}}}\int\limits_0^{\bar{z}-\bar{M}_i}\sqrt{\theta}\,e^{\bar{\alpha}_{ni}\psi_i\left(\bar{z}-\bar{M}_i-\theta\right)}I_1\left(2\sqrt{\bar{\alpha}_{ni}\bar{\beta}_i\psi_i\bar{t}\theta}\right)d\theta+$$
$$(15)$$
$$+\sqrt{\bar{\alpha}_{ni}\bar{\beta}_i\psi_i\left(\bar{z}-\bar{M}_i\right)}\int\limits_0^{\bar{t}}\tilde{U}_i\left(\xi\right)\left[\frac{\sqrt{\bar{\alpha}_{ni}\bar{\beta}_i\psi_i\left(\bar{z}-\bar{M}_i\right)}}{\bar{t}-\xi}I_0\left(2\sqrt{\bar{\alpha}_{ni}\bar{\beta}_i\psi_i\left(\bar{z}-\bar{M}_i\right)\left(\bar{t}-\xi\right)}\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{I_1\left(2\sqrt{\bar{\alpha}_{ni}\bar{\beta}_i\psi_i\left(\bar{z}-\bar{M}_i\right)\left(\bar{t}-\xi\right)}\right)}{\left(\bar{t}-\xi\right)^{3/2}}\right]d\xi;$$

$$U_{i2}\left(\bar{z},\bar{t}\right)=\bar{\alpha}_{ni}\psi_i I_0\left(2\sqrt{\bar{\alpha}_{ni}\bar{\beta}_i\psi_i\left(\bar{z}-\bar{M}_i\right)\bar{t}}\right)+$$
$$+\bar{\alpha}_{ni}^2\psi_i^2\int\limits_0^{\bar{z}-\bar{M}_i}e^{\bar{\alpha}_{ni}\psi_i\left(\bar{z}-\bar{M}_i-\theta\right)}I_0\left(2\sqrt{\bar{\alpha}_{ni}\bar{\beta}_i\psi_i\bar{t}\theta}\right)d\theta+$$
$$+\bar{\alpha}_{ni}\bar{\beta}_i\psi_i\int\limits_0^{\bar{t}}\tilde{U}_i\left(\xi\right)I_0\left(2\sqrt{\bar{\alpha}_{ni}\bar{\beta}_i\psi_i\left(\bar{z}-\bar{M}_i\right)\left(\bar{t}-\xi\right)}\right)d\xi, \qquad (16)$$

$$\tilde{U}_i\left(\bar{t}\right)=\exp\left[\bar{\beta}_i\bar{t}+\bar{\alpha}_{ni}\int\limits_0^{\bar{t}}\bar{C}_{0i}\left(\xi\right)d\xi\right],$$

где I_j – функция Бесселя мнимого аргумента первого рода j-того порядка (j = 0; 1).

В дальнейшем фильтрация принимается нисходящей, что для моделирования непринципиально. Тогда величину $\bar{C}_i$ на нижней границе i-того слоя $\left(\bar{z}=\bar{M}_{i+1}\right)$ можно использовать на последующем этапе расчетов в качестве граничного условия теперь уже в задаче относительно концентрации взвеси в подстилающем слое $\bar{C}_{i+1}$. При решении этой задачи получено выражение для $\bar{C}_{i+1}\left(\bar{M}_{i+2},\bar{t}\right)$, и дальше такая процедура повторяется вплоть до нижнего N слоя, когда, в конце концов, устанавливаются концентрации $\bar{C}_N\left(\bar{z},\bar{t}\right)$, $\bar{S}_N\left(\bar{z},\bar{t}\right)$. Важнейшим их следствием является концентрация проскочивших пористую среду частиц $\overline{C}_e$, которая имеет особое значение для обоснования технологических, конструктивных параметров фильтра. Изменение $\overline{C}_e$ со временем в N-слойной загрузке, согласно (12), описывается зависимостью

$$\overline{C}_e\left(\overline{t}\right)=\overline{C}_N\left(1,\overline{t}\right)=-\frac{\overline{\beta}_N}{\overline{\alpha}_{nN}}+\frac{U_{N1}\left(1,\overline{t}\right)}{\overline{\alpha}_{nN}U_N\left(1,\overline{t}\right)}, \qquad (17)$$

где функции $U_{N1}(\overline{t})$, $U_N(\overline{t})$ можно вычислить по формулам (14), (15).

Формула (17) служит базой для вычисления важного технологического параметра – времени защитного действия загрузки t_p, которое зачастую и определяет продолжительность фильтроцикла. Качество фильтрата строго регламентируется, и превышение концентрацией взвеси на выходе из фильтра предельного значения C_{e*} не допускается. Тогда вышеупомянутое относительное время $\overline{t}_p$ легко устанавливается подбором в результате решения уравнения

$$\overline{C}_{e*}=-\frac{\overline{\beta}_N}{\overline{\alpha}_{nN}}+\frac{U_{N1}\left(1,\overline{t}_p\right)}{\overline{\alpha}_{nN}U_N\left(1,\overline{t}_p\right)}. \qquad (18)$$

В более простом случае двухслойной загрузки ($N = 2$) сначала рассчитывают концентрационные характеристики в верхнем слое опять-таки по формулам (12), (13), которые благодаря постоянству входной концентрации взвеси заметно упрощаются. Тогда

$$\overline{C}_1\left(\overline{z},\overline{t}\right)=\frac{I_0\left(2\sqrt{\overline{\alpha}_{n1}\overline{\beta}_1\psi_1\overline{z}\overline{t}}\right)+G_1\left(\overline{z},\overline{t}\right)}{G_1\left(\overline{z},\overline{t}\right)-G_2\left(\overline{z},\overline{t}\right)+e^{\overline{\alpha}_{n1}\psi_1\overline{z}+\overline{\beta}_1\overline{t}}}, \qquad (19)$$

$$\overline{S}_1\left(\overline{z},\overline{t}\right)=\frac{\overline{\alpha}_{n1}}{\overline{\alpha}_{n1}+\overline{\beta}_1}\cdot\frac{G_1\left(\overline{z},\overline{t}\right)}{G_1\left(\overline{z},\overline{t}\right)-G_2\left(\overline{z},\overline{t}\right)+e^{\overline{\alpha}_{n1}\psi_1\overline{z}+\overline{\beta}_1\overline{t}}}, \qquad (20)$$

где

$$G_1\left(\overline{z},\overline{t}\right)=\left(\overline{\alpha}_{n1}+\overline{\beta}_1\right)\int_0^{\overline{t}}e^{\left(\overline{\alpha}_{n1}+\overline{\beta}_1\right)\left(\overline{t}-\lambda\right)}I_0\left(2\sqrt{\overline{\alpha}_{n1}\overline{\beta}_1\psi_1\overline{z}\lambda}\right)d\lambda,$$

$$G_2\left(\bar{z},\bar{t}\right)=\bar{\beta}_1\int_0^{\bar{t}} e^{\bar{\beta}_1(\bar{t}-\lambda)} I_0\left(2\sqrt{\bar{\alpha}_{n1}\bar{\beta}_1\psi_1\bar{z}\lambda}\right)d\lambda.$$

Из (20) вытекает еще одна формула, позволяющая отслеживать накопление осажденных частиц на входе в загрузку:

$$\bar{S}_1\left(0,\bar{t}\right)=\frac{\bar{\alpha}_{n1}}{\bar{\alpha}_{n1}+\bar{\beta}_1}\left(1-e^{-\left(\bar{\alpha}_{n1}+\bar{\beta}_1\right)\bar{t}}\right). \qquad (21)$$

Для продолжения расчетов исходную математическую модель необходимо серьезно корректировать. Рост концентрации взвеси и осажденных частиц во втором (нижнем) слое загрузки описывается уравнениями (12), (13), в которых следует положить i = 2, $\bar{M}_i=\bar{m}_1$,

$$\tilde{U}_2\left(\bar{t}\right)=\exp\left(\bar{\beta}_2\bar{t}+\bar{\alpha}_{n2}\int_0^{\bar{t}}\bar{C}_1\left(\bar{m}_1,\xi\right)d\xi\right),\ \bar{m}_1=\frac{m_1}{L},\ \bar{C}_{02}\left(\bar{t}\right)=\bar{C}_1\left(\bar{m}_1,\bar{t}\right).$$

Поскольку в продолжении данной работы будет проведено сопоставление результатов расчета множества примеров на основе нелинейной (2) и линейной кинетики (1), то далее, в дополнение к (12) – (20), приводим формулы, рекомендуемые для определения на практике концентраций в двухслойной загрузке при линейном массообмене. Для верхнего слоя $\left(\bar{m}_1\ge\bar{z}\ge 0\right)$ получено:

$$\bar{C}_1\left(\bar{z},\bar{t}\right)=e^{-\bar{\alpha}_{l1}\bar{z}}\left[e^{-\bar{\beta}_1\bar{t}}I_0\left(2\sqrt{\bar{\alpha}_{l1}\bar{\beta}_1\bar{z}\bar{t}}\right)+\bar{\beta}_1\int_0^{\bar{t}}e^{-\bar{\beta}_1\lambda}I_0\left(2\sqrt{\bar{\alpha}_{l1}\bar{\beta}_1\bar{z}\lambda}\right)d\lambda\right], \qquad (22)$$

$$\bar{S}_1\left(\bar{z},\bar{t}\right)=\bar{\alpha}_{l1}e^{-\bar{\alpha}_{l1}\bar{z}}\int_0^{\bar{t}}e^{-\bar{\beta}_1\lambda}I_0\left(2\sqrt{\bar{\alpha}_{l1}\bar{\beta}_1\bar{z}\lambda}\right)d\bar{z}. \qquad (23)$$

Из (22) следует, что концентрация взвеси на границе между слоями повышается следующим образом:

$$\bar{C}_{1*}\left(\bar{t}\right)=\bar{C}_1\left(\bar{m}_1,\bar{t}\right)=e^{-\bar{\alpha}_{l1}\bar{m}_1}\times$$
$$\times\left[e^{-\bar{\beta}_1\bar{t}}I_0\left(2\sqrt{\bar{\alpha}_{l1}\bar{\beta}_1\bar{m}_1\bar{t}}\right)+\bar{\beta}_1\int_0^{\bar{t}}e^{-\bar{\beta}_1\lambda}I_0\left(2\sqrt{\bar{\alpha}_{l1}\bar{\beta}_1\bar{m}_1\lambda}\right)d\lambda\right]. \qquad (24)$$

Тогда искомые концентрации во втором слое будут

$$\overline{C}_2(\overline{z},\overline{t}) = e^{-\overline{\alpha}_{l2}(\overline{z}-\overline{m}_1)}\Bigg[\overline{C}_{1*}(\overline{t}) + \sqrt{\overline{\alpha}_{l2}\overline{\beta}_2(\overline{z}-\overline{m}_1)}\times$$
$$\times\int_0^{\overline{t}} \frac{e^{-\overline{\beta}_2(\overline{t}-\xi)} I_1\left(2\sqrt{\overline{\alpha}_{l2}\overline{\beta}_2(\overline{z}-\overline{m}_1)(\overline{t}-\xi)}\right)}{\sqrt{\overline{t}-\xi}}\overline{C}_{1*}(\xi)\,d\xi\Bigg], \qquad (25)$$

$$\overline{S}_2(\overline{z},\overline{t}) = \overline{\alpha}_{l2} e^{-\overline{\alpha}_{l2}(\overline{z}-\overline{m}_1)}\int_0^{\overline{t}} e^{-\overline{\beta}_2(\overline{t}-\xi)} I_0\left(2\sqrt{\overline{\alpha}_{l2}\overline{\beta}_2(\overline{z}-\overline{m}_1)(\overline{t}-\xi)}\right)\overline{C}_{1*}(\xi)\,d\xi. \qquad (26)$$

Ввиду отсутствия в условиях этой задачи параметров S_{0i} в качестве масштаба для S_i используют $n_{01}C_0$, в результате $\overline{\alpha}_{li} = \dfrac{\alpha_{li}L}{v}$, $\overline{S}_i = \dfrac{S_i}{n_{01}C_0}$. Зависимости (22) – (26) выведены путем незначительного упрощения строгих формул из [10], поэтому они главным образом являются приближенными. Однако небольшая погрешность в расчетах $\overline{C}_i, \overline{S}_i$ имеет место только при $\overline{t} \approx 1$, а со временем она становится ничтожно малой.

В расчетной части данной работы использовали в основном формулу для относительной выходной концентрации, которую, согласно (25), можно записать в виде

$$\overline{C}_e(\overline{t}) = e^{-\overline{\alpha}_{l2}\overline{m}_2}\Bigg[\overline{C}_{1*}(\overline{t}) +$$
$$+\sqrt{\overline{\alpha}_{l2}\overline{\beta}_2\overline{m}_2}\int_0^{\overline{t}} \frac{e^{-\overline{\beta}_2(\overline{t}-\xi)} I_1\left(2\sqrt{\overline{\alpha}_{l2}\overline{\beta}_2\overline{m}_2(\overline{t}-\xi)}\right)}{\sqrt{\overline{t}-\xi}}\overline{C}_{1*}(\xi)\,d\xi\Bigg]. \qquad (27)$$

По аналогии с (18) время t_p следует определять из уравнения

$$\overline{C}_{e*}e^{\overline{\alpha}_{l2}\overline{m}_2} = \overline{C}_{1*}(\overline{t}_p) + \sqrt{\overline{\alpha}_{l2}\overline{\beta}_2\overline{m}_2}\int_0^{\overline{t}_p} \frac{e^{-\overline{\beta}_2(\overline{t}_p-\xi)} I_1\left(2\sqrt{\overline{\alpha}_{l2}\overline{\beta}_2\overline{m}_2(\overline{t}_p-\xi)}\right)}{\sqrt{\overline{t}_p-\xi}}\overline{C}_{1*}(\xi)\,d\xi \qquad (28)$$

При высокой исходной концентрации взвешенных частиц основным фактором, лимитирующим длительность работы фильтра, могут стать быстрорастущие потери напора в загрузке, а не их проскок. Поскольку они складываются из потерь в каждом слое, то возникает задача установления функции приведенного напора в пределах i-того слоя $\tilde{H}_i(\bar{z},\bar{t})$. Интегрирование (9) с привлечением (10) и условия равенства напоров на нижней границе указанного слоя $(\bar{z}=\bar{M}_{i+1})$ позволяет записать уравнение

$$\tilde{H}_i(\bar{z},\bar{t})=\tilde{H}_{i+1}(\bar{M}_{i+1},\bar{t})+\frac{1}{\bar{k}_{oi}}\int_{\bar{z}}^{\bar{M}_{i+1}}\frac{d\eta}{f_i(\bar{S}_i(\eta,\bar{t}))}, \qquad (29)$$

причем при $i=N \quad \bar{H}_{i+1}=0, \quad \bar{M}_{i+1}=1$. Следовательно, относительные потери напора здесь достигнут величины

$$\Delta\bar{H}_i=\tilde{H}_i(\bar{M}_i,\bar{t})-\tilde{H}_{i+1}(\bar{M}_{i+1},\bar{t}).$$

Таким образом, относительные суммарные потери напора в загрузке $\Delta\bar{H}$ можно записать в виде

$$\Delta\bar{H}=\sum_{i=1}^{N}\Delta\bar{H}_i=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\bar{k}_{oi}}\int_{\bar{M}_i}^{\bar{M}_{i+1}}\frac{d\eta}{f_i(\bar{S}_i(\eta,\bar{t}))}. \qquad (30)$$

Если скорость фильтрования удается поддерживать постоянной вплоть до момента достижения потерями $\Delta\bar{H}$ некоторого граничного значения $\Delta\bar{H}_*$ (обусловливается конструкцией фильтра), то указанный момент t_h несложно найти путем решения уравнения

$$\Delta\bar{H}_*=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\bar{k}_{0i}}\int_{\bar{M}_i}^{\bar{M}_{i+1}}\frac{d\eta}{f_i(\bar{S}_i(\eta,\bar{t}_h))}. \qquad (31)$$

Алгоритм определения длительности фильтроцикла t_f (принимая во внимание два критерия: требуемое качество фильтрата, допускаемые в загрузке потери напора) излагается и иллюстрируется для однородной загрузки в работе [19]. Во второй части нашей работы подобный подход к обоснованию t_f будет реализован для двухслойной загрузки.

Основная проблема при определении потерь напора в фильтре и затем времени t_f заключается в установлении зависимости коэффициента фильтрации загрузки от концентрации осажденных частиц суспензии. Окончательному ее решению препятствует отсутствие в настоящее время надежного прогноза состава и свойств осадка, неопределенность соотношения в нем частиц и связанной воды.

Выводы. Сформулирована математическая задача фильтрования суспензии с постоянной скоростью через многослойную загрузку при нелинейной кинетике массообмена между ее твердой и жидкой фазами, учитывающей ослабление прилипания взвеси по мере накопления осадка. Получено практически точное (при $\bar{t} >> 1$) аналитическое решение данной задачи и на его базе предложены многочисленные формулы для расчета важнейших характеристик двухфазного потока. Отдельно рассмотрен наиболее важный для практики случай двухслойной загрузки. Для оценки влияния осадка на осветление суспензии в фильтрах также приведены основные расчетные зависимости применительно к линейной форме массообмена. Особое значение имеют формулы, предназначенные для определения подбором времени защитного действия загрузки и достижения предельно допустимых потерь напора, исходя из которых и следует устанавливать истинную длительность фильтроцикла.

Резюме. Наведено строгі теоретичні залежності для розрахунку об'ємних концентрацій осаду і завісі, втрат напору, а також характерних часів (захисної дії завантаження і досягнення гранично припустимих втрат напору) у багатошаровому завантаженні при нелінійній кінетиці масообміну і сталій швидкості фільтрування. В частинному випадку двошарового завантаження, крім того, наведено аналогічні формули і стосовно лінійної кінетики.

V.L.Polyakov

SUSPENSION FILTRATION THROUGH MULTILAYER FILTER MEDIUM AT NONLINEAR MASS-EXCHANGE KINETICS: 1. THEORY

Summary

A number of exact theoretical dependencies have been presented for calculation of volumetric sediment and suspension concentrations, head losses and also characteristic times (filter medium protection action, limiting head loss) inside a multilayered filter medium at nonlinear mass-exchange kinetics

and constant filtration rate. In case of two-layer composition similar formulae have been proposed at linear kinetics.

1. *Непарадзе Г.Г., Грошев С.К., Трофимова Р.А.* // Водоснабж. и сан. техника. – 1986. – №2. – С.4 – 5.
2. *Солтнес Т., Эйкенброк В., Одегард Х.* // Вода и экология. – 2003. – **2**. – С.23 – 32.
3. *Шевчук Е.А., Мамченко А.В., Гончарук В.В.* // Химия и технология воды. – 2005. – **27**, №4. – С. 369 – 384.
4. *Emelco M.B.* // Water Res. – 2003. – **37.** – P. 2998 – 3008.
5. *Grubb D.G., Sitar N.* // Water Resour. Res. – 1999. – **35**, N 11. – P. 3275 – 3289.
6. *Kavamura S.* // J. Amer. Water Works Assoc. – 1985. – **77,** N 12. – P.42 – 47.
7. *Tunnell H.R.* // Proc. Eng. Soc. West. 36th Int. Water Congress (Pittsburg, Pa., 1976). – Pittsburg , 1976. – P. 97 – 103.
8. *Saiers J.E., Hornberger G.M.* // Water Resour. Res. – 1994. – **30**, N 9. – P. 2499 – 2506.
9. *Ren J., Packman A.I., Welty C.* // Ibid. – 2000. – **36**, N 9. – P. 2493 – 2500.
10. *Поляков В.Л.* // Химия и технология воды. – 2008. – **30**, №1. – С. 3 – 31.
11. *Минц Д.М.* Теоретические основы технологии очистки воды. – М.: Стройиздат, 1964. – 155 с.
12. *Сенявин М.М., Веницианов Е.В., Аюкаев Р.И.* // Водные ресурсы. – 1977. – №2. – С.157 – 170.
13. *Bai R., Mackie R.I.* // Water Res. – 1995. – **29**, N 11. – P. 2601 – 2604.
14. *Ojha C.S.P., Graham N.J.D.* // J. Environ Eng. – 1992. – 1**18**, N 6. – P. 964 – 979.
15. *Томас Г.* // Хроматография / Под ред. М.М.Дубинина. – М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1949. – С. 25 – 52.
16. *Алексеев В.С., Коммунар Г.М., Шержуков Б.С.* Массоперенос в водонасыщенных горных породах. Сер. Гидрогеология, инж. геология. – М.: ВИНИТИ, 1989. – 143 с.
17. *Поляков В.Л.* // Доп. НАН України. – 2009. – №12. – С. 48 – 55.
18. *Олейник А.Я., Тугай А.М.* // Там же. – 2001. – №9. – С.190 – 194.
19. *Поляков В.Л.* // Химия и технология воды. – 2009. – **31**, N 6. – С. 605 – 618.

Ин-т гидромеханики
НАН Украины, г. Киев

Поступила 28.05.2009