Физика низких температур, 2002, т. 28, № 6, с. 604–620

# Модель самосогласованного поля для пространственно неоднородных бозе-систем

Ю. М. Полуэктов

*Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт»*
*ул. Академическая,1 г. Харьков, 61108, Украина*
E-mail: antarasov@kipt.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 27 августа 2001 г. после переработки 27 февраля 2002 г.

Построена модель самосогласованного поля для пространственно неоднородных многочастичных бозе-систем с нарушенными симметриями. Получена система самосогласованных уравнений для волновых функций квазичастиц и волновой функции частиц конденсата, а также система уравнений для нормальной и аномальной одночастичных матриц плотности. Найдена многочастичная волновая функция. На основании микроскопического рассмотрения в приближении самосогласованного поля построена термодинамика многочастичных бозе-систем. Подчеркивается существенное различие бозе-конденсации в модели идеального газа и бозе-конденсации в системе взаимодействующих бозе-частиц, обусловленное обязательным присутствием наряду с одночастичным также парного конденсата, даже при сколь угодно слабом взаимодействии. Обсуждается вопрос о роли одночастичных и коллективных возбуждений в бозе-системах.

Побудовано модель самоузгодженого поля для просторово неоднорідних багаточастинкових бозе-систем з порушеними симетріями. Отримано систему самоузгоджених рівнянь для хвильових функцій квазічастинок і хвильової функції частинок конденсату, а також система рівнянь для нормальної й аномальної одночастинкових матриць щільності. Знайдено багаточастинкову хвильову функцію. На підставі мікроскопічного розгляду в наближенні самоузгодженого поля побудовано термодинаміку багаточастинкових бозе-систем. Підкреслюється істотне розходження бозе-конденсації в моделі ідеального газу і бозе-конденсації в системі взаємодіючих бозе-частинок, обумовлене обов'язковою присутністю поряд з одночастинковим також парного конденсату, навіть при як завгодно слабкій взаємодії. Обговорюється питання про роль одночастинкових і колективних збуджень у бозе-системах.

PACS: 67.40.Db, 05.30.Jp

## 1. Введение

Модель самосогласованного поля (СП) в квантовую механику многочастичных систем введена Хартри [1] для описания состояний электронов в атомах. Симметрия многочастичной волновой функции относительно перестановок в рамках этой модели учтена Фоком [2]. В настоящее время методы самосогласованного поля широко используются для расчета атомных оболочек [1], структуры атомного ядра [3], свойств молекул и твердых тел [4]. Важной особенностью модели СП является возможность описания в ее рамках состояний с более низкой симметрией, чем симметрия исходного гамильтониана. В частности, Боголюбов обобщил модель Хартри–Фока на состояния с нарушенной симметрией относительно фазовых преобразований [5]. Модель Хартри–Фока–Боголюбова позволяет описывать сверхпроводящие состояния фермионных систем со спариванием. Модель СП использовали в основном для теоретического исследования свойств фермионов и только в отдельных случаях ее применяли для изучения многочастичных бозе-систем [6]. Интерес к проблеме бозе-конденсации существенно возрос в связи с экспериментальным обнаружением различными группами исследователей бозе-конденсации в спин-поляризованных атомарных газах [7,8].

В рамках модели СП возникают одночастичные возбуждения с отличной от нуля энергией активации при нулевом импульсе, на необходимость существования которых в бозе-системах обращено внимание в книге Н. Н. Боголюбова и Н. Н. Боголюбова (мл.) [9]. Наличие щели в спектре таких квазичастиц обусловлено присутствием в бозе-системе с нарушенной фазовой симметрией пар частиц с противоположными импульсами, которые, как отмечено в [9], должны иметь энергию диссоциации. Возбуждения с звуковым законом дисперсии, предсказанные Ландау [10], также существующие в системах взаимодействующих бозе-частиц, могут быть найдены из нестационарных уравнений СП.

Во втором разделе предлагаемой работы выведена система уравнений СП для многочастичной системы взаимодействующих бозе-частиц. Эти уравнения позволяют описывать при конечных температурах пространственно неоднородные состояния с нарушенными симметриями относительно преобразований различного вида. В третьем разделе, на основании микроскопического подхода в модели СП, получены термодинамические соотношения, выражения для энергии и термодинамического потенциала и тем самым показано, что модель СП полностью согласуется с общими принципами термодинамики. В четвертом разделе рассмотрена пространственно однородная бозе-система частиц с короткодействующим отталкивательным взаимодействием в несверхтекучем и сверхтекучем состояниях с одночастичным бозе-конденсатом. Найдены многочастичные волновые функции бозе-системы с одночастичным конденсатом. Обсуждение вопроса о формировании спектра возбуждений в многочастичных бозе-системах содержится в пятом разделе статьи. Заметим, что с привлечением экспериментальных данных по рассеянию нейтронов в $^4$He этот вопрос был рассмотрен в [11].

Обобщение полуфеноменологического ферми-жидкостного подхода на случай сверхтекучей бозе-жидкости осуществлено в работе [12]. Пространственно неоднородные состояния слабонеидеального бозе-газа в рамках приближения Боголюбова рассмотрены в [13], а в отсутствие одночастичного бозе-конденсата в линейном приближении — в [14].

В настоящей работе в общей форме формулируется модель СП для бозе-систем со спонтанно нарушенными симметриями на основе метода, развитого для ферми-систем в [15]. Показано, что состояние системы с нарушенной фазовой инвариантностью, даже сколь угодно слабо взаимодействующих бозе-частиц, существенно отличается от идеального бозе-газа с конденсатом. Поскольку многочастичные бозе-системы при низких температурах всегда, независимо от характера межчастичного взаимодействия, переходят в состояния с нарушенной фазовой симметрией, а модель идеального газа излишне проста и не отражает существенных черт таких состояний взаимодействующих бозе-частиц, то модель СП, позволяющую описывать состояния со спонтанно нарушенными симметриями, более естественно, чем модель независимых частиц, принять в качестве исходной при построении микроскопической теории многочастичных бозе-систем. К достоинствам предлагаемого подхода следует отнести то, что в нем все частицы системы рассматриваются на совершенно равноправной основе. Выделенность конденсата частиц с нулевым импульсом возникает в пространственно однородном состоянии как следствие общей теории.

## 2. Уравнения самосогласованного поля

Будем рассматривать систему бозе-частиц со спином, равным нулю, взаимодействующих посредством парного потенциала $U(\mathbf{r},\mathbf{r}')$. Гамильтониан такой системы имеет вид

$$H = H_K + H_I, \tag{1}$$

где

$$H_K = \int dx dx' \, \Psi^+(x) H(x,x') \Psi(x'), \tag{2}$$

$$H_I = \frac{1}{2}\int dx dx' \, \Psi^+(x)\Psi^+(x') U(x,x') \Psi(x')\Psi(x), \tag{3}$$

причем

$$H(x,x') = H_0(x,x') - \mu\delta(x-x'),$$
$$H_0(x,x') = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\delta(x-x') + U_0(x)\delta(x-x'), \tag{4}$$

где обозначено $x = \{\mathbf{r}\}$, а $U_0(x)$ — потенциал внешнего поля. Предполагается, что многочастичная система, находясь в контакте с термостатом, может обмениваться с ним как энергией, так и частицами, т.е. используется большой канонический ансамбль. В силу этого в гамильтониан включен член с химическим потенциалом μ. Полевые операторы подчиняются бозевским условиям коммутации и имеют вид

$$\Psi(x)=\sum_j \varphi_j(x)a_j, \quad \Psi^+(x)=\sum_j \varphi_j^*(x)a_j^+, \quad (5)$$

где $a_j^+, a_j$ — операторы рождения и уничтожения реальных бозе-частиц в состоянии $j$, а волновые функции удовлетворяют одночастичному уравнению Шредингера

$$\int dx' H_0(x,x')\varphi_j(x')=\varepsilon_j^{(0)}\varphi_j(x). \quad (6)$$

Для перехода к приближению СП разобьем исходный гамильтониан (1) на сумму двух слагаемых

$$H=H_0+H_C, \quad (7)$$

где первое слагаемое представляет собой гамильтониан модели СП, включающий члены не выше квадратичных по полевым операторам:

$$H_0=\int dxdx'\Big\{\Psi^+(x)[H(x,x')+W(x,x')]\Psi(x')+$$
$$+\frac{1}{2}\Psi^+(x)\Delta(x,x')\Psi^+(x')+\frac{1}{2}\Psi(x')\Delta^*(x,x')\Psi(x)\Big\}+$$
$$+\int dx\,[F(x)\Psi^+(x)+F^*(x)\Psi(x)]+E_0', \quad (8)$$

а второе — корреляционный гамильтониан, учитывающий корреляции частиц, не включенные в приближение СП:

$$H_C=\frac{1}{2}\int dxdx'\Big\{\Psi^+(x)\Psi^+(x')U(x,x')\Psi(x')\Psi(x)-2\Psi^+(x)W(x,x')\Psi(x')-$$
$$-\Psi^+(x)\Delta(x,x')\Psi^+(x')-\Psi(x')\Delta^*(x,x')\Psi(x)\Big\}-\int dx\,[F(x)\Psi^+(x)+F^*(x)\Psi(x)]-E_0'. \quad (9)$$

Гамильтониан модели СП (8), в отличие от случая фермиевской системы [15], содержит также линейные по $\Psi,\Psi^+$члены. Самосогласованные поля $F(x), W(x,x')$ и $\Delta(x,x')$, входящие в $H_0$, должны быть найдены из условия наилучшего приближения этого гамильтониана к исходному гамильтониану $H$, причем в силу эрмитовости выполнены условия

$$W(x,x')=W^*(x',x), \quad \Delta(x,x')=\Delta(x',x). \quad (10)$$

Выбор неоператорного слагаемого $E_0'$ в (8) и (9) важен для корректной формулировки модели СП. Итак, в приближении СП многочастичная система характеризуется гамильтонианом $H_0$, а влияние корреляционного гамильтониана $H_C$ может быть учтено по теории возмущений. В данной работе, однако, ограничимся подробным изучением бозе-системы в рамках модели СП, пренебрегая эффектами, обусловленными корреляционным гамильтонианом.

Гамильтониан (8) может быть приведен к диагональной форме. Для этого следует предварительно избавиться от линейных по бозе-операторам членов, введя «сдвинутые» бозе-операторы $\Phi(x)$, $\Phi^+(x)$, так что

$$\Psi(x)=\chi(x)+\Phi(x), \quad \Psi^+(x)=\chi^*(x)+\Phi^+(x), \quad (11)$$

и определив функцию $\chi(x)$ так, чтобы в $H_0$ выпали линейные по полевым операторам члены. В результате получаем условие:

$$\int dx'\,[\Omega(x,x')\chi(x')+\Delta(x,x')\chi^*(x')]+F(x)=0, \quad (12)$$

где $\Omega(x,x')=H(x,x')+W(x,x')$. С учетом последнего условия самосогласованный гамильтониан принимает вид

$$H_0=\int dxdx'\left\{\Phi^+(x)\Omega(x,x')\Phi(x')+\frac{1}{2}\Phi^+(x)\Delta(x,x')\Phi^+(x')+\frac{1}{2}\Phi(x')\Delta^*(x,x')\Phi(x)\right\}-$$
$$-\int dxdx'\left\{\chi^*(x)\Omega(x,x')\chi(x')+\frac{1}{2}\chi^*(x)\Delta(x,x')\chi^*(x')+\frac{1}{2}\chi(x')\Delta^*(x,x')\chi(x)\right\}+E_0'. \quad (13)$$

Этот гамильтониан с помощью канонических преобразований Боголюбова

$$\Phi(x) = \sum_i \, [u_i(x)\gamma_i + v_i^*(x)\gamma_i^+] \, ,$$
$$\Phi^+(x) = \sum_i [v_i(x)\gamma_i + u_i^*(x)\gamma_i^+] \tag{14}$$

приводим к диагональному виду

$$H_0 = E_0 + \sum_i \varepsilon_i \gamma_i^+ \gamma_i \, , \tag{15}$$

где $i$ — полный набор квантовых чисел, характеризующих состояние квазичастицы. Как видим, приближение СП естественно приводит к представлению о квазичастицах в бозе-системах. Условиями перехода от гамильтониана (13) к гамильтониану (15) являются уравнения для коэффициентов боголюбовского преобразования, которые имеют смысл компонент волновой функции квазичастицы:

$$\int dx' \, [\Omega(x,x')u_i(x') + \Delta(x,x')v_i(x')] = \varepsilon_i u_i(x), \tag{16}$$

$$\int dx' \, [\Omega^*(x,x')v_i(x') + \Delta^*(x,x')u_i(x')] = -\varepsilon_i v_i(x). \tag{17}$$

Требование каноничности преобразований (14) приводит к условиям нормировки

$$\int dx \, [u_i(x)u_{i'}^*(x) - v_i(x)v_{i'}^*(x)] = \delta_{ii'} \, ,$$
$$\int dx \, [u_i(x)v_{i'}(x) - v_i(x)u_{i'}(x)] = 0 \tag{18}$$

и полноты

$$\sum_i [u_i(x)u_i^*(x') - v_i^*(x)v_i(x')] = \delta(x-x'),$$
$$\sum_i [u_i(x)v_i^*(x') - v_i^*(x)u_i(x')] = 0 \tag{19}$$

решений самосогласованных уравнений.

Самосогласованные потенциалы $W(x,x')$ и $\Delta(x,x')$ могут быть найдены из условия минимальности функционала

$$I = \left[ \left\langle (H - H_0) \right\rangle_0 \right]^2 , \tag{20}$$

где усреднение производится со статистическим оператором

$$\rho_0 = \exp \beta \left( \Omega_0 - H_0 \right), \;\; \beta = 1/T \, , \tag{21}$$

$T$ — температура. Нормировочная постоянная определяется условием $\mathrm{Sp}\,\rho_0 = 1$:

$$\Omega_0 = -T \ln [\mathrm{Sp} \exp(-\beta H_0)], \tag{22}$$

и, как будет показано, имеет смысл термодинамического потенциала системы в приближении СП.

Определив полные одночастичные матрицы плотности соотношениями

$$\tilde{\rho}(x,x') = \langle \Psi^+(x')\Psi(x) \rangle_0 = \rho(x,x') + \chi^*(x')\chi(x), \tag{23}$$

$$\tilde{\tau}(x,x') = \langle \Psi(x')\Psi(x) \rangle_0 = \tau(x,x') + \chi(x')\chi(x) \tag{24}$$

и варьируя по ним функционал (20), из условия $\delta I = 0$ получаем связи самосогласованных потенциалов с полными одночастичными матрицами плотности

$$W(x,x') = U(x,x')\tilde{\rho}(x,x') + \\ + \delta(x-x') \int dx'' U(x,x'')\tilde{\rho}(x'',x''), \tag{25}$$

$$\Delta(x,x') = U(x,x')\tilde{\tau}(x,x') \, . \tag{26}$$

Надконденсатные матрицы плотности имеют вид

$$\rho(x,x') = \left\langle \Phi^+(x')\Phi(x) \right\rangle_0 = \\ = \sum_i [u_i(x)u_i^*(x') f_i + v_i^*(x)v_i(x')(1+f_i)] \, , \tag{27}$$

$$\tau(x,x') = \left\langle \Phi(x')\Phi(x) \right\rangle_0 = \\ = \sum_i [u_i(x)v_i^*(x') f_i + v_i^*(x)u_i(x')(1+f_i)] \, , \tag{28}$$

где

$$f_i = \langle \gamma_i^+ \gamma_i \rangle_0 = f(\varepsilon_i) = [\exp(\beta\varepsilon_i) - 1]^{-1} \tag{29}$$

— функция распределения бозе-квазичастиц. Эти матрицы, как и $\tilde{\rho}(x,x'), \tilde{\tau}(x,x')$, удовлетворяют условиям

$$\rho(x,x') = \rho^*(x',x), \;\; \tau(x,x') = \tau(x',x). \tag{30}$$

Поскольку операторы $\Phi(x)$, $\Phi^+(x)$, согласно (14), линейны по $\gamma$, $\gamma^+$, а гамильтониан $H_0$ (15) квадратичен, то

$$\langle \Phi(x) \rangle_0 = \langle \Phi^+(x) \rangle_0 = 0,$$

а следовательно,

$$\chi(x) = \langle \Psi(x) \rangle_0, \;\; \chi^*(x) = \langle \Psi^+(x) \rangle_0 \, . \tag{31}$$

Таким образом, $\chi(x)$ можно трактовать как функцию, определяющую плотность числа частиц в одночастичном бозе-конденсате в модели СП.

С учетом соотношений (25), (26), уравнения самосогласования (16) и (17) принимают вид:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U_0(x) - \mu + \int dx' U(x,x')\tilde{\rho}(x',x')\right]u_i(x) +$$
$$+\int dx' U(x,x')[\tilde{\rho}(x,x')u_i(x') + \tilde{\tau}(x,x')v_i(x')] = \varepsilon_i u_i(x), \tag{32}$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U_0(x) - \mu + \int dx' U(x,x')\tilde{\rho}(x',x')\right]v_i(x) +$$
$$+\int dx' U(x,x')[\tilde{\rho}^*(x,x')v_i(x') + \tilde{\tau}^*(x,x')u_i(x')] = -\varepsilon_i v_i(x). \tag{33}$$

Помимо уравнений (32), (33) следует получить еще одно уравнение, поскольку остается неопределенной бозе-конденсатная функция $\chi(x)$. С этой целью, варьируя (20) по $\chi(x)$ и полагая $\delta I = 0$, находим

$$F(x) = -2\chi(x)\int dx' U(x,x')\left|\chi(x')\right|^2. \tag{34}$$

В итоге, с учетом (12), приходим к уравнению

$$\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U_0(x) - \mu +\right.$$
$$\left.+\int dx' U(x,x')\left[\tilde{\rho}(x',x') - 2\left|\chi(x')\right|^2\right]\right\}\chi(x) +$$
$$+\int dx' U(x,x')[\tilde{\rho}(x,x')\chi(x') + \tilde{\tau}(x,x')\chi^*(x')] = 0. \tag{35}$$

Уравнение (35) совместно с (32), (33) и соотношениями (18), (19) и (29) полностью описывают систему многих бозе-частиц в приближении СП. Полученная система уравнений имеет три типа решений:

I) $\chi(x) = v_i(x) = 0,\ u_i(x) \neq 0$;

II) $\chi(x) = 0,\ v_i(x) \neq 0,\ u_i(x) \neq 0$;

III) $\chi(x) \neq 0,\ v_i(x) \neq 0,\ u_i(x) \neq 0$.

Первый тип решений (I) описывает состояния, в которых симметрия относительно фазовых преобразований

$$\Psi(x) \to \Psi(x)\,\mathrm{e}^{i\xi} \quad (\xi - \text{произвольная фаза}) \tag{36}$$

не нарушена. В этом «нормальном» состоянии система не содержит ни одночастичного, ни парного конденсатов и не обладает свойством сверхтекучести. Второй тип решений (II) описывает состояния с нарушенной относительно преобразования (36) симметрией за счет образования парного конденсата, аналогичного тому, который возникает в сверхтекучих ферми-системах [15]. В этом случае бозе-система обладает свойством сверхтекучести. Сверхтекучесть бозе-систем, обусловленная парными корреляциями, исследована в работах [16,17]. Решения типа III описывают сверхтекучие состояния с нарушенной фазовой симметрией, содержащие как одночастичный, так и парный бозе-конденсаты. Обратим внимание, что отсутствуют решения, в которых

$$\chi(x) \neq 0,\ v_i(x) = 0,\ u_i(x) \neq 0. \tag{37}$$

Именно такое решение отвечает случаю идеального бозе-газа ниже точки бозе-перехода, в котором имеются бозе-конденсат и надконденсатные частицы. Таким образом, система невзаимодействующих частиц с бозе-конденсатом и система взаимодействующих (даже как угодно слабо) бозе-частиц с нарушенной фазовой симметрией — это две существенно различные системы. Модель идеального газа с бозе-конденсатом в такой же мере непригодна для описания сверхтекучего состояния реальной системы взаимодействующих частиц, как, например, модель идеального ферми-газа — для описания сверхтекучего состояния ферми-системы, и не может быть использована как исходное приближение при построении теории возмущений. Именно использование модели идеального газа с конденсатом в качестве базовой приводит к различным трудностям при построении последовательной теории многочастичных бозе-систем с нарушенными симметриями. Это, как видим, связано с тем, что парные корреляции, всегда существующие в сверхтекучих системах взаимодействующих частиц, невозможно описать в модели идеального газа. Парные и более высокие корреляции, нарушающие фазовую симметрию, в реальных сверхтекучих бозе-системах играют не менее существенную роль, чем одночастичный бозе-конденсат. Так, по современным оценкам [18], в сверхтекучем $^4$He только около 8% частиц находится в одночастичном бозе-конденсате, а остальной вклад в сверхтекучую плотность дают парные и более высокие корреляции.

### 3. Термодинамические соотношения

Чтобы построить непротиворечивую модель СП и получить правильные термодинамические соотношения, важно правильно выбрать неоператорную часть в гамильтониане (8). Найдем ее из условия

$$\partial I / \partial E_0' = 0\,, \tag{38}$$

которое дает, что средние от точного и самосогласованного гамильтонианов равны:

$$\langle H \rangle_0 = \langle H_0 \rangle_0. \tag{39}$$

В силу этого получаем $E_0' =$

$$= -\frac{1}{2}\int dx dx' U(x,x') \langle \Psi^+(x)\Psi^+(x')\Psi(x')\Psi(x)\rangle_0 + $$
$$+ 2\int dx dx' U(x,x') |\chi(x)|^2 |\chi(x')|^2. \tag{40}$$

Полная энергия системы частиц в приближении СП имеет вид

$$E = \int dx dx' H_0(x,x') \langle \Psi^+(x)\Psi(x')\rangle_0 + $$
$$+ \frac{1}{2}\int dx dx' U(x,x') \langle \Psi^+(x)\Psi^+(x')\Psi(x')\Psi(x)\rangle_0 \tag{41}$$

и может быть представлена в виде суммы трех вкладов:

$$E = E_1 + E_2 + E_3, \tag{42}$$

где $E_1$ — энергия, определяемая надконденсатными возбуждениями; $E_2$ — энергия одночастичного конденсата; $E_3$ — энергия «взаимодействия» конденсатных и надконденсатных частиц. Первый вклад можно записать в виде суммы

$$E_1 = T^{(1)} + U_E^{(1)} + U_D^{(1)} + U_{\mathrm{EX}}^{(1)} + U_C^{(1)},$$

где

$$T^{(1)} = -\frac{\hbar^2}{2m}\int dx dx' \delta(x - x') \Delta\rho(x,x') \tag{43}$$

— кинетическая энергия надконденсатной подсистемы;

$$U_E^{(1)} = \int dx U_0(x) n_Q(x) \tag{44}$$

— энергия надконденсатной подсистемы во внешнем поле;

$$U_D^{(1)} = \frac{1}{2}\int dx dx' U(x,x') n_Q(x) n_Q(x') \tag{45}$$

— энергия прямого взаимодействия надконденсатных частиц;

$$U_{\mathrm{EX}}^{(1)} = \frac{1}{2}\int dx dx' U(x,x') |\rho(x,x')|^2 \tag{46}$$

— энергия обменного взаимодействия надконденсатных частиц;

$$U_C^{(1)} = \frac{1}{2}\int dx dx' U(x,x') |\tau(x,x')|^2 \tag{47}$$

— энергия конденсатных пар. В (44) и (45) $n_Q(x) = \rho(x,x)$ — плотность числа надконденсатных частиц. Конденсатную часть представим в виде суммы

$$E_2 = T^{(2)} + U_E^{(2)} + U_D^{(2)},$$

где

$$T^{(2)} = -\frac{\hbar^2}{4m}\int dx\, [\chi^*(x)\Delta\chi(x) + \chi(x)\Delta\chi^*(x)] \tag{48}$$

— кинетическая энергия одночастичного конденсата;

$$U_E^{(2)} = \int dx U_0(x) |\chi(x)|^2 \tag{49}$$

— энергия конденсата во внешнем поле;

$$U_D^{(2)} = \frac{1}{2}\int dx dx' U(x,x') |\chi(x)|^2 |\chi(x')|^2 \tag{50}$$

— энергия взаимодействия конденсатных частиц. Третий вклад в полную энергию $E_3 =$

$$= \int dx dx' U(x,x') \Big[ \rho(x,x')\chi^*(x)\chi(x') + n_Q(x)|\chi(x')|^2 + $$
$$+ \frac{1}{2}\tau(x,x')\chi^*(x)\chi^*(x') + \frac{1}{2}\tau^*(x,x')\chi(x)\chi(x') \Big] \tag{51}$$

определяется взаимодействием надконденсатных частиц и конденсата.

Найдем термодинамический потенциал системы бозе-частиц в приближении СП, который с учетом (15), (22) можно записать в виде

$$\Omega_0 = E_0 - T \ln\left[ \mathrm{Sp}\exp\ (-\beta \sum_i \varepsilon_i \gamma_i^+ \gamma_i) \right]. \tag{52}$$

Второе слагаемое в (52) рассчитывается так же, как и в случае идеального бозе-газа. Постоянную $E_0$ найдем из (15) с учетом

$$\langle H_0\rangle_0 = E - \mu N$$

($N$ — полное число частиц), так что

$$E_0 = E - \mu N - \sum_i \varepsilon_i f_i . \qquad (53)$$

Используя уравнения (32), (33) и (35), кинетические энергии $T^{(1)}$и $T^{(2)}$представим в виде

$$T^{(1)} = \mu N_Q - U_E^{(1)} - 2(U_D^{(1)} + U_{\rm EX}^{(1)} + U_C^{(1)}) + \sum_i \varepsilon_i f_i - \sum_i \varepsilon_i \int dx \left|v_i(x)\right|^2 -$$
$$-\int dxdx' U(x,x')\left[\rho(x,x')\chi(x)\chi^*(x') + n_Q(x)\left|\chi(x')\right|^2 + \frac{1}{2}\tau^*(x,x')\chi(x)\chi(x') + \frac{1}{2}\tau(x,x')\chi^*(x)\chi^*(x')\right], \quad (54)$$

$$T^{(2)} = \mu N_B - U_E^{(2)} - \int dxdx' U(x,x')\left[\rho(x,x')\chi(x)\chi^*(x') + n_Q(x)\left|\chi(x')\right|^2 +\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\tau^*(x,x')\chi(x)\chi(x') + \frac{1}{2}\tau(x,x')\chi^*(x)\chi^*(x') + \left|\chi(x)\right|^2\left|\chi(x')\right|^2\right], \quad (55)$$

где $N_Q = \int dx n_Q(x)$, $N_B = \int dx \left|\chi(x)\right|^2$ — числа надконденсатных и конденсатных частиц.

В силу (54), (55) энергию системы можно записать в виде

$$E = \mu N - (U_D^{(1)} + U_{\rm EX}^{(1)} + U_C^{(1)} + U_D^{(2)}) + \sum_i \varepsilon_i f_i - \sum_i \varepsilon_i \int dx \left|v_i(x)\right|^2 -$$
$$-\int dxdx' U(x,x')\left[\rho(x,x')\chi(x)\chi^*(x') + n_Q(x)\left|\chi(x')\right|^2 + \frac{1}{2}\tau^*(x,x')\chi(x)\chi(x') + \frac{1}{2}\tau(x,x')\chi^*(x)\chi^*(x')\right], \quad (56)$$

откуда, при сравнении с (53), определяется выражение для $E_0$ в (15). В итоге приходим к окончательному виду термодинамического потенциала бозе-системы:

$$\Omega_0 = -(U_D^{(1)} + U_{\rm EX}^{(1)} + U_C^{(1)} + U_D^{(2)}) -$$
$$-\sum_i \varepsilon_i \int dx \left|v_i(x)\right|^2 - \int dxdx' U(x,x')\left[\rho(x,x')\chi(x)\chi^*(x') + n_Q(x)\left|\chi(x')\right|^2 +\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\tau^*(x,x')\chi(x)\chi(x') + \frac{1}{2}\tau(x,x')\chi^*(x)\chi^*(x')\right] + T\sum_i \ln\left(1 - e^{-\beta\varepsilon_i}\right). \quad (57)$$

Можно показать, что вариация термодинамического потенциала, определенного формулой (22), равна среднему по самосогласованному состоянию вариации гамильтониана:

$$\delta\Omega_0 = \left\langle \delta H_0 \right\rangle_0 . \quad (58)$$

Выразив самосогласованный гамильтониан через $\chi(x)$, $\rho(x,x')$ и $\tau(x,x')$ (или $\tilde\rho(x,x')$ и $\tilde\tau(x,x')$) и варьируя его с учетом (58), получаем:

$$\frac{\delta\Omega_0}{\delta\chi^*(x)} = \left\langle \frac{\delta H_0}{\delta\chi^*(x)} \right\rangle_0 = \frac{\delta\Omega_0}{\delta\rho(x,x')} = \left\langle \frac{\delta H_0}{\delta\rho(x,x')} \right\rangle_0 = \frac{\delta\Omega_0}{\delta\tau^*(x,x')} = \left\langle \frac{\delta H_0}{\delta\tau^*(x,x')} \right\rangle_0 = 0. \quad (59)$$

При использовании терминов полных матриц плотности в соотношениях (59) следует сделать замены $\rho(x,x') \to \tilde\rho(x,x')$, $\tau(x,x') \to \tilde\tau(x,x')$. Таким образом, связи полей $F(x)$, $W(x,x')$, $\Delta(x,x')$ с волновой функцией конденсата $\chi(x)$ и одночастичными матрицами плотности $\rho(x,x')$, $\tau(x,x')$ (25), (26), (34), установленные с помощью вариационного принципа, приводят, как видно из (59), к экстремальности термодинамического потенциала относительно его варьирования по $\delta\chi$, $\delta\rho$ и $\delta\tau$.

Из уравнений (27), (28), (32), (33) и (35) может быть получена система уравнений для одночастичных матриц плотности $\rho(x,x')$, $\tau(x,x')$ (или $\tilde\rho(x,x')$, $\tilde\tau(x,x')$) и $\chi(x)$. Приведем систему для полных матриц плотности:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}(\Delta-\Delta')\tilde{\rho}(x,x')+[U_0(x)-U_0(x')]\,\tilde{\rho}(x,x')+$$
$$+\int dx''[U(x,x'')-U(x',x'')]\,[\tilde{\rho}(x,x'')\tilde{\rho}(x'',x')+\tilde{\rho}(x,x')\tilde{\rho}(x'',x'')+$$
$$+\tilde{\tau}(x,x'')\tilde{\tau}^*(x'',x')-2\chi(x)\chi^*(x')|\chi(x'')|^2]=0, \qquad (60)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}(\Delta+\Delta')\tilde{\tau}(x,x')+[U_0(x)+U_0(x')+U(x,x')-2\mu]\tilde{\tau}(x,x')+$$
$$+\int dx''[U(x,x'')+U(x',x'')][\tilde{\rho}(x,x'')\tilde{\tau}(x'',x')+\tilde{\rho}(x'',x'')\tilde{\tau}(x,x')+$$
$$+\tilde{\rho}(x',x'')\tilde{\tau}(x'',x)-2\chi(x)\chi(x')|\chi(x'')|^2]=0. \qquad (61)$$

К этим уравнениям следует присоединить и уравнение (35). Знание надконденсатных матриц плотности и волновой функции конденсата достаточно, чтобы вычислить среднее от произвольного оператора $O$:

$$\langle O\rangle_0=\int dxdx'O(x,x')\tilde{\rho}(x,x')=\int dxdx'\,[O(x,x')\rho(x,x')+O(x,x')\chi^*(x)\chi(x')]\,. \qquad (62)$$

Как видно, среднее разбивается на сумму надконденсатного и кондесатного вкладов.

Корреляционный гамильтониан (9) можно представить через надконденсатные матрицы плотности в следующем виде:

$$H_C=\frac{1}{2}\int dxdx'U(x,x')[\Phi^+(x)\Phi^+(x')\Phi(x')\Phi(x)-2\rho(x,x')\Phi^+(x)\Phi(x')-$$
$$-2\rho(x',x')\Phi^+(x)\Phi(x)-\tau(x,x')\Phi^+(x)\Phi^+(x')-\tau^*(x,x')\Phi(x')\Phi(x)+$$
$$+\rho(x,x')\rho(x',x)+\rho(x,x)\rho(x',x')+\tau(x',x)\tau^*(x',x)+2\chi^*(x)\Phi^+(x')\Phi(x')\Phi(x)+$$
$$+2\chi(x)\Phi^+(x')\Phi^+(x')\Phi(x)-2\rho(x,x')\chi(x')\Phi^+(x)-2\rho^*(x,x')\chi^*(x')\Phi(x)-$$
$$-2\rho(x',x')\chi(x)\Phi^+(x)-2\rho(x',x')\chi^*(x)\Phi(x)-2\tau(x,x')\chi^*(x')\Phi^+(x)-$$
$$-2\tau^*(x,x')\chi(x')\Phi(x)\,. \qquad (63)$$

Этот, довольно громоздкого вида, гамильтониан может быть записан более компактно через нормальные произведения операторов, и с ним развита теория возмущений, аналогично тому, как это реализовано для ферми-систем [19].

## 4. Пространственно однородная бозе-система

Полученные уравнения, пригодные для исследования пространственно неоднородных состояний, могут быть, разумеется, использованы и для анализа пространственно однородной системы. Рассмотрим этот важный частный случай. В пространственно однородной системе состояния частиц характеризуются их импульсом, так что здесь $i=k\equiv\{\mathbf{k}\}$, а волновые функции имеют вид плоских волн. Будем считать, что межчастичное взаимодействие имеет δ-образный характер: $U(x,x')=U_0\delta(x-x')$. В нормальной бозе-системе (величины со штрихом) волновая функция квазичастицы, ее закон дисперсии и функция распределения имеют следующий вид:

$$u'_k(x)=\frac{1}{\sqrt{V}}\,\mathrm{e}^{-kx},\ \varepsilon'_k=\frac{\hbar^2k^2}{2m}-\tilde{\mu}',\ f'_k=\left(\mathrm{e}^{\beta\varepsilon'_k}-1\right)^{-1}, \qquad (64)$$

где

$$\tilde{\mu}' = \mu' - 2U_0 n' \qquad (65)$$

— эффективный химический потенциал, а одночастичная матрица плотности и плотность числа частиц определяются формулами

$$\rho'(x,x') = \frac{1}{V}\sum_k e^{-ik(x-x')} f'_k, \; n' = \frac{1}{V}\sum_k f'_k, \qquad (66)$$

$V$ — объем, занимаемый системой. Связь химического потенциала с плотностью числа частиц определяется формулой, совпадающей с формулой для идеального бозе-газа выше точки конденсации, если в последней заменить химический потенциал $\mu$ на эффективный химический потенциал $\tilde{\mu}'$ (65):

$$n' = \frac{(mT)^{3/2}}{\sqrt{2}\pi^2\hbar^3}\int_0^\infty \frac{d\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}{e^{\varepsilon-\beta\tilde{\mu}'}-1}. \qquad (67)$$

Поскольку, согласно (65), в $\tilde{\mu}'$ входит плотность числа частиц, (67) содержит $n'$ как в левой, так и в правой части, поэтому формула (67) определяет более сложную зависимость плотности числа частиц от химического потенциала, чем в случае модели идеального газа. Очевидно, что условием бозе-конденсации является соотношение $\tilde{\mu}' = 0$, т.е. на линии фазового перехода

$$\mu' = \mu'_0 = 2U_0 n. \qquad (68)$$

Температура бозе-конденсации определяется такой же формулой, как и в случае идеального бозе-газа:

$$T_0 = \frac{2\pi\hbar^2}{m}\left[\frac{n'}{\zeta(3/2)}\right]^{2/3}, \qquad (69)$$

$\zeta(3/2) = 2{,}612$ – дзэта-функция Римана.

Ниже точки бозе-конденсации самосогласованные уравнения (32), (33) и (35) допускают решения вида плоских волн:

$$u_k(x) = \frac{u_k}{\sqrt{V}} e^{-ikx}, \; v_k(x) = \frac{v_k}{\sqrt{V}} e^{-ikx}, \; \chi = \text{const}. \qquad (70)$$

В этом случае одночастичные матрицы плотности принимают вид

$$\tilde{\rho}(x,x') = = |\chi|^2 + \frac{1}{V}\sum_k \left[|u_k|^2 f_k + |v_k|^2 (1+f_k)\right] e^{-ik(x-x')}, \qquad (71)$$

$$\tilde{\tau}(x,x') = \chi^2 + \frac{1}{V}\sum_k u_k v_k^* (1+2f_k)\, e^{-ik(x-x')}, \qquad (72)$$

а коэффициенты, согласно (16), (17), удовлетворяют системе алгебраических уравнений

$$(\xi_k - \varepsilon_k) u_k + \Delta v_k = 0, \qquad (73)$$

$$\Delta^* u_k + (\xi_k + \varepsilon_k) v_k = 0, \qquad (74)$$

где $\xi_k = \hbar^2 k^2/2m - \mu + 2U_0 n$; $\Delta = U_0 \tilde{\tau}(x,x)$, а $n = \tilde{\rho}(x,x)$ — полная плотность числа частиц. С учетом условия нормировки (18) $|u_k|^2 - |v_k|^2 = 1$ получаем

$$|u_k|^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\xi_k}{\varepsilon_k}+1\right), |v_k|^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\xi_k}{\varepsilon_k}-1\right), u_k v_k^* = -\frac{\Delta}{2\varepsilon_k}. \qquad (75)$$

Из (73), (74) следует закон дисперсии квазичастиц:

$$\varepsilon_k = \sqrt{\xi_k^2 - |\Delta|^2}, \qquad (76)$$

а из (35) — соотношение, устанавливающее связь химического потенциала с волновой функцией бозе-конденсатных частиц:

$$[-\mu + 2U_0 n_Q]\,\chi + \Delta\chi^* = 0. \qquad (77)$$

Полную плотность числа частиц можно представить в виде

$$n = |\chi|^2 + n_q + n_p, \qquad (78)$$

где первое слагаемое — плотность числа частиц в бозе-конденсате, второе, равное

$$n_q = \frac{1}{V}\sum_k f_k \qquad (79)$$

— плотность числа частиц, формирующих квазичастичные возбуждения, а последнее

$$n_p = \frac{1}{2V}\sum_k \left(\frac{\xi_k}{\varepsilon_k}-1\right)(1+2f_k) \qquad (80)$$

— плотность числа частиц, скоррелированных в куперовские пары. Таким образом, плотность числа частиц, не входящих в одночастичный конденсат,

$$n_Q = n_q + n_p. \qquad (81)$$

Уравнение, определяющее $\Delta$, имеет вид

$$\Delta = \frac{U_0\chi^2}{1+U_0J} = \Theta\chi^2, \tag{82}$$

где

$$J = \frac{1}{2V}\sum_k \frac{1+2f_k}{\varepsilon_k},\ \Theta = \frac{U_0}{1+U_0J}. \tag{83}$$

Обратим внимание, что при переходе в $J$ от суммирования к интегрированию интеграл оказывается расходящимся. Это обусловлено выбором точечного взаимодействия. При использовании потенциала с конечным радиусом взаимодействия $a_0$ интеграл был бы сходящимся. Поэтому при вычислении $J$ в (83) интеграл следует обрезать на волновом числе $k_0 = 1/a_0$. В состоянии с бозе-конденсатом химический потенциал, согласно (77), определяется формулой

$$\mu = 2U_0 n_Q + \Theta|\chi|^2. \tag{84}$$

С учетом (82), (84) получаем из (76) окончательное выражение для квазичастичного спектра

$$\varepsilon_k = \sqrt{\left(\frac{\hbar^2k^2}{2m} + 2\big(U_0 - \Theta\big)|\chi|^2\right)\left(\frac{\hbar^2k^2}{2m} + 2U_0|\chi|^2\right)}. \tag{85}$$

Как видно, энергия квазичастицы при $\mathbf{k} = 0$ не обращается в нуль, а принимает конечное значение

$$\varepsilon_0 = 2|\chi|^2\sqrt{U_0\big(U_0 - \Theta\big)} = 2U_0|\chi|^2\sqrt{\frac{U_0J}{1+U_0J}}, \tag{86}$$

т.е. спектр имеет энергетическую щель. Очевидно, что энергетический спектр устойчив при отталкивании между частицами ($U_0 > 0$). Энергия $\varepsilon_0$ имеет ясный физический смысл, а именно, это та минимальная энергия, которую необходимо затратить, чтобы вырвать частицу из конденсата и тем самым создать новую квазичастицу. Вполне естественно, что в случае бозе-конденсата взаимодействующих частиц эта энергия имеет конечную величину. Для более детального анализа смысла выражения (86), определяющего энергетическую щель, выразим, используя соотношения (5), (11) и (14), операторы реальных частиц через амплитуду бозе-конденсата и квазичастичные операторы. Поскольку в данном случае $\varphi_j(x) = e^{-ikx}/\sqrt{V}$, имеем

$$\begin{aligned} a_k &= \chi\sqrt{V}\delta_{k,0} + u_k\gamma_k + v^*_{-k}\gamma^+_{-k}, \\ a^+_k &= \chi^*\sqrt{V}\delta_{k,0} + v_{-k}\gamma_{-k} + u^*_k\gamma^+_k. \end{aligned} \tag{87}$$

Эти соотношения позволяют найти распределение реальных частиц по импульсам $f_k^{(p)} = \langle a_k^+ a_k\rangle$ и аномальное среднее $g_k = \langle a_k a_{-k}\rangle$:

$$f_k^{(p)} = V|\chi|^2\delta_{k,0} + f_k + \frac{1}{2}\left(\frac{\xi_k}{\varepsilon_k} - 1\right)(1+2f_k), \tag{88}$$

$$g_k = -\chi^2\Theta\frac{(1+2f_k)}{2\varepsilon_k}\quad (\mathbf{k} \neq 0). \tag{89}$$

Из этих формул следует соотношение

$$\frac{1}{V}\left|\sum_{k\neq 0}\langle a_k a_{-k}\rangle\right| = |\chi|^2\frac{JU_0}{1+JU_0}. \tag{90}$$

В итоге формулу (86) можно представить в виде

$$\varepsilon_0 = \frac{2U_0|\chi|}{\sqrt{V}}\left|\sum_{k\neq 0}\langle a_k a_{-k}\rangle\right|^{1/2}. \tag{91}$$

Как видим, щель в квазичастичном спектре определяется постоянной межчастичного взаимодействия, плотностью частиц в одночастичном бозе-конденсате и аномальными средними, описывающими парные корреляции в системе взаимодействующих бозе-частиц с нарушенной фазовой симметрией.

Обратим внимание, что если величину $U_0 - \Theta = U_0^2J/(1+U_0J)$ в (86) формально положить равной нулю, то получим спектр возбуждений, найденный Боголюбовым [20],

$$\varepsilon_k = \sqrt{\frac{\hbar^2k^2}{2m}\left(\frac{\hbar^2k^2}{2m} + 2U_0|\chi|^2\right)}. \tag{92}$$

При конечном значении волнового числа отличие спектра (85) от боголюбовского (92) при достаточно слабом взаимодействии может быть сделано как угодно малым. Для этого должно быть выполнено условие

$$U_0^2J|\chi|^2 << \hbar^2k^2/2m.$$

Однако в самой точке $k=0$, являющейся для спектра особой точкой в теории возмущений по интенсивности взаимодействия, нет оснований пренебрегать членом $2(U_0 - \Theta)|\chi|^2$, приводящим к существованию щели в спектре (85). Возможность существования возбуждений с отличной от нуля энергией активации обсуждалась давно, возбуждения со щелью рассмотрены в работах многих авторов [16, 21–24]. В упомянутой во введении книге [9] отмечено, что поскольку в бозе-газе с взаимодействием имеются пары с противоположными импульсами, они должны иметь энергию диссоциации, связанную с каждой парой.

«Это означает, что в дополнение к фононной ветви спектра мы имеем другую ветвь в спектре возбуждений, соответствующую возбуждению пар» [9, с. 322]. Кроме того, заметим, что одночастичный и парный конденсаты образуют единую когерентную систему, а потому щель в спектре возбуждений определяется не только парным аномальным средним, но и плотностью числа частиц в одночастичном конденсате (91). Обсуждение решений, имеющих щель в квазичастичном спектре, содержится в работе [6].

Гугенгольц и Пайнс [25] на основании квантовополевой теории возмущений для бозе-систем с конденсатом, сформулированной Беляевым [26] , показали, что спектр квазичастиц при малых импульсах подчиняется линейному закону, за исключением возможных паталогических случаев. Следует однако иметь в виду, что справедливость этого результата, как подчеркивалось самим Пайнсом [27], зависит от обоснованности разложений в ряд теории возмущений. Эффективность использования теории возмущений существенно зависит от того, насколько удачно выбрано исходное приближение, т.е. насколько структура состояния в нулевом приближении близка к состоянию реальной системы. Многочастичная волновая функция идеального газа, все частицы которого находятся в бозе-конденсате

$$\left|\Phi_0\right\rangle = \frac{(a_0)^N}{\sqrt{N!}}\left|0\right\rangle , \qquad (93)$$

крайне проста и далека от вида волновой функции системы взаимодействующих бозе-частиц, что можно видеть, например, из сравнения (93) с полученной ниже многочастичной волновой функцией для системы взаимодействующих бозе-частиц в модели СП (109). Как представляется, именно с выбором в качестве нулевого приближения модели идеального бозе-газа, не учитывающей всегда существующие наряду с одночастичным конденсатом парные корреляции частиц с противоположными импульсами, связаны трудности, возникающие при квантовополевом рассмотрении многочастичных бозе-систем (обращение в нуль при нулевом импульсе аномальной собственно-энергетической части), на которые обращено внимание в работах [28,29]. Кроме того, результат Гугенгольца и Пайнса [25] существенно связан с предположением о возможности замены операторов частиц с нулевым импульсом на $C$-числа [23]. При построении теории многочастичных бозе-систем на основе модели СП необходимости в таком допущении не возникает.

Следствием существования щели в спектре является то, что функция распределения таких квазичастиц $f_k$, как выше, так и ниже температуры бозе-перехода, имеет в точке $\mathbf{k}=0$ конечное значение, за исключением самой температуры $T_0$, где функция распределения расходится при $\mathbf{k}\to 0$ как $f_k \to k^{-2}$.

Для квадратичного гамильтониана, каким является гамильтониан модели СП (8), могут быть найдены собственные векторы состояний. В случае, когда состояния частиц описываются плоскими волнами (70), самосогласованный гамильтониан имеет вид

$$H_0 = \sum_k \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu\right) a_k^+ a_k + $$

$$+\sum_k \left[ W_k a_k^+ a_k + \frac{1}{2}\Delta_k a_k^+ a_{-k}^+ + \frac{1}{2}\Delta_k^* a_{-k} a_k \right] +$$

$$+F a_0^+ + F^* a_0 + E_0' , \qquad (94)$$

а соответствующее ему уравнение Шредингера

$$H_0\left|I\right\rangle = E_I \left|I\right\rangle, \qquad (95)$$

где $\left|I\right\rangle$ — собственный вектор состояния с энергией $E_I$. Для дельтаобразного взаимодействия в (94) $\Delta_k = \Delta$ (см. (82)), $W_k = W = 2U_0 n$, $F = -2\sqrt{V}U_0|\chi|^2\chi$. При выводе уравнений СП осуществлен переход к новым квазичастичным операторам при неизменном гамильтониане. При нахождении вектора состояния удобно перейти к новому гамильтониану, выраженному через те же операторы частиц. Новый гамильтониан $\tilde{H}_0$, связанный с $H_0$ унитарным преобразованием $U$

$$\tilde{H}_0 = U^+ H_0 U, \qquad (96)$$

имеет те же собственные значения, что и $H_0$, но этим значениям отвечают новые собственные векторы

$$\left|\tilde{I}\right\rangle = U^+ \left|I\right\rangle . \qquad (97)$$

С помощью двух последовательных унитарных преобразований $U_1$ и $U_2$ перейдем от гамильтониана $H_0$ к гамильтониану

$$\tilde{H}_0 = U_2^+ U_1^+ H_0 U_1 U_2 = E_0 + \sum_k \varepsilon_k a_k^+ a_k . \qquad (98)$$

Унитарное преобразование

$$U_1 = \exp\ \left(\sqrt{V}(\chi a_0^+ - \chi^* a_0)\right) \qquad (99)$$

устраняет в (94) линейные по операторам частиц члены, а унитарное преобразование

$$U_2 = \exp\left(\frac{1}{2}\sum_k(\psi_k a_k^+ a_{-k}^+ - \psi_k^* a_k a_{-k})\right),\ \psi_k = \psi_{-k} \tag{100}$$

устраняет квадратичные члены, неинвариантные относительно фазовых преобразований. Параметр $\psi_k$ в (100) определяется соотношениями

$$u_k = \mathrm{ch}\,|\psi_k|,\ v_k^* = \frac{\psi_k}{|\psi_k|}\mathrm{sh}\,|\psi_k|. \tag{101}$$

Заметим, что гамильтониан (98), в отличие от (94), инвариантен относительно фазовых преобразований и коммутирует с оператором числа частиц. Собственные векторы $\tilde{H}_0$ для состояний с полным числом частиц $N$ имеют известный вид

$$\begin{gathered}|N,\lambda\rangle = (n_1!n_2!\ldots n_j!\ldots)^{-1/2}\times\\ \times(a_1^+)^{n_1}(a_2^+)^{n_2}\ldots(a_j^+)^{n_j}\ldots|0\rangle,\\ N=\sum_j n_j,\end{gathered} \tag{102}$$

где $|0\rangle$ — вектор вакуумного состояния частиц, индекс $\lambda$ обозначает состояния с различным распределением $N$ частиц по одночастичным состояниям. Каждому вектору состояния (102) соответствует собственный вектор уравнения (95):

$$|\tilde{I}\rangle = U_1 U_2 |N,\lambda\rangle. \tag{103}$$

Оператор (99) может быть записан в виде

$$U_1 = U_1(\chi) = \exp\left(-V\frac{|\chi|^2}{2} + \sqrt{V}\chi a_0^+ - \sqrt{V}\chi^* a_0\right). \tag{104}$$

Действие этого оператора на вакуумный вектор порождает, как известно [28], когерентное состояние

$$|\chi\rangle = U_1(\chi)|0\rangle = \mathrm{e}^{-V\frac{|\chi|^2}{2}}\,\mathrm{e}^{\sqrt{V}\chi a_0^+}|0\rangle, \tag{105}$$

являющееся собственным вектором оператора уничтожения: $a_0|\chi\rangle = \sqrt{V}\chi|\chi\rangle$. Оператор (100) содержит в экспоненте сумму по импульсам. Среди слагаемых здесь имеются пары одинаковых с противоположными импульсами $\mathbf{k}$ и $-\mathbf{k}$, а также слагаемое с $\mathbf{k}=0$. Принимая это во внимание, запишем оператор (100) в виде

$$U_2 = U_2(\psi_0)\prod_{k\neq -k\neq 0} U_2(\psi_k), \tag{106}$$

где

$$U_2(\psi_0) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}(\psi_0 a_0^{+2} - \psi_0^* a_0^2)} = \\ = \mathrm{e}^{-\frac{\Gamma_0}{2}}\,\mathrm{e}^{\Lambda_0 a_0^{+2}}\,\mathrm{e}^{-\Gamma_0 a_0^+ a_0}\,\mathrm{e}^{-\Lambda_0^* a_0^2},$$

$$U_2(\psi_k) = \mathrm{e}^{(\psi_k a_k^+ a_{-k}^+ - \psi_k^* a_k a_{-k})} = \\ = \mathrm{e}^{-\Gamma_k}\,\mathrm{e}^{\Lambda_k a_k^+ a_{-k}^+}\,\mathrm{e}^{-\Gamma_k a_k^+ a_k}\,\mathrm{e}^{-\Gamma_k a_{-k}^+ a_{-k}}\,\mathrm{e}^{-\Lambda_k^* a_k a_{-k}},$$

причем

$$\Lambda_0 = \frac{\psi_0}{2|\psi_0|}\mathrm{th}\,|\psi_0|,\ \Gamma_0 = \ln\mathrm{ch}\,|\psi_0|;$$

$$\Lambda_k = \frac{\psi_k}{|\psi_k|}\mathrm{th}\,|\psi_k|,\ \Gamma_k = \ln\mathrm{ch}\,|\psi_k|.$$

Действие оператора на вакуумный вектор порождает состояние

$$|\psi_k\rangle = U_2(\psi_k)|0\rangle = \mathrm{e}^{-\Gamma_k}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Lambda_k^n(a_k^+ a_{-k}^+)^n}{n!}|0\rangle, \tag{107}$$

которое естественно рассматривать как парное когерентное состояние, являющееся собственным вектором оператора $u_k^2 a_k a_{-k} - v_k^{*2} a_k^+ a_{-k}^+$, так что

$$(u_k^2 a_k a_{-k} - v_k^{*2} a_k^+ a_{-k}^+)|\psi_k\rangle = u_k v_k^*|\psi_k\rangle. \tag{108}$$

Операторы $U_2(\psi_k)$ коммутируют между собой и при $\mathbf{k}\neq 0$ с $U_1(\chi)$, и только операторы $U_2(\psi_0)$ и $U_1(\chi)$ некоммутативны. Вакуумный вектор самосогласованного гамильтониана $H_0$ (вакуумный вектор квазичастиц) получаем в результате действия оператора $U_1U_2$ на вакуумный вектор частиц:

$$|0_q\rangle = \mathrm{e}^{V\Lambda_0\chi^{*2} - \frac{1}{2}(V|\chi|^2 + \Gamma_0)}\,\mathrm{e}^{\sqrt{V}(\chi - 2\Lambda_0\chi^*)a_0^+}\,\mathrm{e}^{\Lambda_0 a_0^{+2}}\times \\ \times\prod_{k\neq -k\neq 0}\mathrm{e}^{-\Gamma_k}\,\mathrm{e}^{\Lambda_k a_k^+ a_{-k}^+}|0\rangle. \tag{109}$$

С учетом связи операторов частиц с квазичастичными операторами

$$\gamma = U_1 U_2 a U_2^+ U_1^+ \tag{110}$$

нетрудно найти произвольный собственный вектор гамильтониана $H_0$. Эти векторы имеют вид (102), если заменить операторы частиц на операторы квазичастиц, а также $|0\rangle$ на $|0_q\rangle$, что, впрочем, очевидно из (15). Вектор состояния с $N$ квазичастицами порождается вектором состояния с

$N$ частицами в результате действия на последний оператора $U_1U_2$ . Собственный вектор (109) и другие собственные векторы самосогласованного гамильтониана $H_0$ (94) не являются собственными векторами оператора числа частиц и представляют собой суперпозиции векторов, описывающих состояния с различным числом частиц, однако они являются собственными векторами оператора $N_q = \sum_i \gamma_i^+ \gamma_i$ и описывают состояния с фиксированным числом квазичастиц.

Из уравнений (87)–(89), а при $T = 0$ из вида многочастичной волновой функции (109), находим средние от операторов частиц с нулевыми импульсами

$$\begin{aligned} \left\langle a_0 \right\rangle_0 &= \sqrt{V}\chi , \\ \left\langle a_0^2 \right\rangle_0 &= V\chi^2 + u_0 v_0^* (1 + 2f_0) , \\ \left\langle a_0^+ a_0 \right\rangle_0 &= V|\chi|^2 + |v_0|^2 + \left(1 + 2|v_0|^2\right) f_0 . \end{aligned} \tag{111}$$

Отсюда следует, что в пределе $V \to \infty$ имеем

$$\left\langle a_0^+ a_0 \right\rangle_0 = \left\langle a_0^+ \right\rangle_0 \left\langle a_0 \right\rangle_0 = \sqrt{\left\langle a_0^{+2} \right\rangle_0 \left\langle a_0^2 \right\rangle_0} .$$

## 5. Одночастичные и коллективные возбуждения

Представление о квазичастицах возникает при приближенном решении многочастичной задачи в результате приведения гамильтониана системы взаимодействующих частиц к виду, аналогичному гамильтониану идеального газа. Проделать такую операцию можно по меньшей мере двумя способами, и в соответствии с этим имеется два типа возбуждений — одночастичные (или атомоподобные) и коллективные.

Способ построения одночастичных (атомоподобных) возбуждений исходя из многочастичного гамильтониана был развит Боголюбовым в теории слабонеидеального бозе-газа [20]. Суть его подхода состоит в аппроксимации микроскопического гамильтониана, содержащего оператор взаимодействия с по меньшей мере четырьмя (в случае парного взаимодействия) операторами рождения и уничтожения (3), квадратичным оператором с последующей его диагонализацией. Именно этот подход использован при построении модели СП в данной работе. На феноменологическом уровне представление об одночастичных возбуждениях было введено Ландау в теории ферми-жидкости [31]. Отметим, что модель ферми-жидкости может быть получена способом Боголюбова на основе микроскопического подхода [32]. Одночастичные возбуждения представляют собой, по существу, отдельные частицы, закон дисперсии которых изменен за счет взаимодействия с окружающими частицами и зависит от термодинамических параметров. В нормальных (несверхтекучих) состояниях, где фазовая симметрия не нарушена, число одночастичных возбуждений фиксировано и совпадает с числом частиц. Асимптотически, при больших импульсах, закон дисперсии таких квазичастиц совпадает с законом дисперсии свободных частиц. В многочастичных системах с нарушенной фазовой симметрией (сверхтекучие, сверхпроводящие) число одночастичных возбуждений зависит от термодинамических параметров (температуры, давления) и всегда меньше полного числа частиц системы. Это связано с тем, что только часть частиц участвует в формировании одночастичных возбуждений, а другая часть формирует конденсаты (одночастичный, парный), нарушающие фазовую симметрию. Именно так обстоит дело в феноменологических теориях бозе- и ферми-жидкостей, обобщенных на сверхтекучие системы [12,33], и в модели СП для ферми-систем с нарушенными симметриями [15]. В частности, в бозе-системе при нулевой температуре одночастичные возбуждения вовсе отсутствуют, а все частицы скоррелированы в конденсаты различного уровня, например в одночастичный и парный, если использовать приближение СП, и включающие большее число частиц, если использовать более высокие приближения.

Другой метод введения элементарных возбуждений в многочастичной системе восходит к Дебаю, который был им развит при построении теории теплоемкости твердых тел [34]. В этом подходе многочастичная система рассматривается как сплошная среда, движение которой описывается классическими уравнениями. В результате квантования приходим к возбуждениям, представляющим собой кванты колебаний среды. Именно такие возбуждения обычно и называются коллективными. В случае коллективных возбуждений частицы, образующие систему, движутся когерентно и как бы «вморожены» в сплошную среду. Число таких возбуждений, вообще говоря, никак не связано с числом частиц в системе. Квантами коллективных колебаний плотности являются фононы, имеющие при малых импульсах линейный закон дисперсии, чья энергия стремится к нулю с увеличением длины волны. Аналогично могут быть введены коллективные возбуждения, связанные с когерентными колебаниями других характеристик сплошной среды. При квантовании колебаний намагниченности коллективными возбуждениями являются магноны. В газе заряженных частиц, например электронном, коллективными возбуждениями являются кванты плазменных колебаний — плазмоны. Характерная особенность этих возбуждений — наличие энергетической щели (плазменная частота) в их законе дисперсии, что обусловлено дальнодействующим характером кулоновского взаимодействия.

Таким образом, рассмотренные в данной работе в рамках модели СП квазичастичные возбуждения являются одночастичными возбуждениями, аналогичными возбуждениям с энергетической щелью в ферми-системах с нарушенной фазовой симметрией (называемыми иногда «боголонами»). Отличительная черта таких возбуждений в бозе-системах с одночастичным конденсатом — возможность рождения одиночных возбуждений. Неравновесные одиночные возбуждения дают вклад в флуктуации плотности, а потому их закон дисперсии может быть непосредственно обнаружен в экспериментах по неупругому рассеянию нейтронов [11].

Статическая модель СП описывает одночастичные возбуждения, но не позволяет учесть вклад в термодинамику коллективных возбуждений. Следует подчеркнуть весьма существенную разницу между бозе- и нормальными ферми-системами. В нормальных ферми-системах вклад коллективных возбуждений в термодинамику уменьшается с понижением температуры. Например, теплоемкость, обусловленная одночастичными возбуждениями, пропорциональна температуре, а теплоемкость, обусловленная коллективными возбуждениями, пропорциональна кубу температуры. В силу этого модель СП, феноменологическим вариантом которой является теория ферми-жидкости, хорошо применима для описания ферми-систем при низких температурах. Для бозе-систем ситуация противоположная. При достаточно низких температурах, когда бозе-система находится в состоянии с нарушенной фазовой симметрией, число одночастичных возбуждений уменьшается и кроме того, в силу наличия щели в энергетическом спектре их вклад в термодинамические свойства многочастичной бозе-системы убывает. Наоборот, возрастает вклад коллективных возбуждений, которые, как отмечено, не могут быть описаны в статической модели СП. Эти же соображения применимы и к незаряженным ферми-системам с нарушенной фазовой симметрией. Хорошее совпадение современной теории сверхпроводимости, являющейся вариантом теории самосогласованного поля, с экспериментом обусловлено заряженностью электронной системы, в результате чего в спектре коллективных возбуждений возникает энергетическая щель — плазменная частота, что и позволяет с большой точностью пренебречь вкладом коллективных возбуждений в термодинамику сверхпроводников. Иная ситуация в нейтральной ферми-жидкости — сверхтекучем $^3$He. Здесь описание термодинамических свойств в приближении СП менее обоснованно и роль коллективных возбуждений должна быть значительной. В частности, именно учет коллективных спин-волновых возбуждений позволяет объяснить стабильность $A$-фазы сверхтекучего $^3$He [35].

Учет коллективных возбуждений может быть осуществлен двумя способами. Наиболее последовательным с точки зрения микроскопического описания является вычисление двухчастичной функции Грина или вершинной функции в приближении более высоком, чем приближение СП. Квантовополевой подход, теория возмущений и диаграммная техника для описания многочастичных ферми-систем с нарушенными симметриями на основе модели СП как исходного приближения развиты в работе [19]. Этот подход может быть распространен и на бозе-системы с нарушенными симметриями. Другой способ изучения коллективных возбуждений основан на использовании уравнений СП, обобщенных на нестационарный случай. Исследование малых колебаний позволяет установить закон дисперсии коллективных возбуждений. Такие колебания могут быть неравновесными и возбуждаться путем внешнего воздействия, но такие же колебания возбуждаются и тепловым способом за счет энергии термостата, в контакте с которым находится многочастичная система. Рассматривая газ коллективных возбуждений как идеальный, можно рассчитать вклад коллективных возбуждений в термодинамику многочастичной системы.

Разделение возбуждений многочастичной системы на одночастичные и коллективные, как и концепция квазичастиц вообще, носит приближенный характер. Наиболее детально проблема разделения возбуждений на коллективные и одночастичные разработана Бомом и Пайнсом для электронного газа [36]. Однако для произвольных многочастичных систем, к тому же находящихся в состояниях со спонтанно нарушенными симметриями, последовательной процедуры разделения одночастичных и коллективных движений до сих пор не существует.

Следует также обратить внимание на некоторую путаницу в терминологии, которая отражается и на понимании физической сути используемых приближений. Особенно это касается бозе-систем. Многочастичная задача может быть сведена к одночастичной только в единственном случае — в модели идеального газа при полном пренебрежении межчастичным взаимодействием. Любые состояния в системе взаимодействующих частиц являются коллективными, в том широком смысле, что они определяются состояниями всех частиц системы. Поэтому как одночастичные, так и коллективные возбуждения, о которых шла речь выше, в этом смысле являются коллективными. Это следует иметь в виду, пользуясь разделением возбуждений на одночастичные и собственно коллективные. Сам термин «коллективные» естественно сохранить за возбуждениями многочастичной системы, возникающими в результате квантования ее движения как сплошной среды. Эти же возбуждения проявляются как полюса вершинной функции.

Коллективные возбуждения могут быть исследованы в рамках модели нестационарного СП. Можно показать, что нестационарные уравнения для одночастичных матриц плотности и волновой функции конденсата получаются из стационарных уравнений (35), (60) и (61) при добавлении в правую часть этих уравнений производных по времени, соответственно $i\hbar\partial\chi / \partial t$, $i\hbar\partial\tilde{\rho}(x,x',t) / \partial t$ и $i\hbar\partial\tilde{\tau}(x,x',t) / \partial t$. Анализ малых колебаний показывает, что нестационарные уравнения имеют решение с линейным законом дисперсии при $k \to 0$. Скорость распространения таких колебаний $c_0 = \sqrt{U_0 n / m}$ ($n$ — полная плотность числа частиц) совпадает со скоростью квазичастиц в теории Боголюбова [20]. Эти коллективные колебания, с практически одинаковыми скоростями распространения, существуют и в нормальной, и в сверхтекучей фазах. Чтобы скорость длинноволновых возмущений не зависела от термодинамических величин, они должны иметь достаточно высокую частоту. Такие колебания являются аналогом нуль-звука, впервые изученного в ферми-системах. При более низких частотах, в гидродинамической области, скорость звука существенно зависит от термодинамических переменных. Именно эти возбуждения формируют линейную часть спектра, введенного Ландау [10]. Максон-ротонный участок этого спектра, по-видимому, определяется одночастичными возбуждениями. На качественном уровне проблема формирования единого спектра из ветвей возбуждений различной природы обсуждена в [11].

Как было показано в рамках релятивистской теории поля Голдстоуном [37], нарушение калибровочной симметрии приводит к возникновению частиц с нулевой массой. Целый ряд работ (например, [38,39]) посвящен обобщению результата Голдстоуна на нерелятивистские многочастичные системы. Как видно из результатов данной работы, в модели СП нарушение фазовой симметрии не приводит к появлению бесщелевых возбуждений (аналога частиц с нулевой массой). В связи с этим сделаем ряд замечаний. Отметим, что поля и многочастичные системы — это существенно различные объекты, и перенесение результатов, полученных в теории поля, на многочастичные нерелятивистские системы не может быть осуществлено автоматически. В теории поля квантуется по-существу сплошная среда, а возникающие при этом частицы — это кванты возбуждений такой среды. В многочастичной системе имеются первичные частицы, и в связи с этим появляются, как обсуждалось выше, два типа возбуждений — одночастичные и коллективные. Очевидно, что аналогом частиц теории поля в многочастичной системе являются именно коллективные, а не одночастичные возбуждения, наличие которых обусловлено дискретной структурой среды, отсутствующей в теории поля. Поэтому, как представляется, нет оснований, опираясь на результат Голдстоуна [37], ожидать появления одночастичных возбуждений со звуковым законом дисперсии. Заметим, что и в ферми-системах (также и в отсутствие кулоновского взаимодействия) нарушение фазовой симметрии не приводит к появлению бесщелевых возбуждений.

Существенной особенностью многочастичных систем, не имеющей аналогии в квантовой теории поля, является неинвариантность этой системы относительно группы Галилея в силу конечной плотности числа частиц. С нарушением галилеевой инвариантности связано появление голдстоуновских коллективных возбуждений — фононов. Возникают ли в системе с конечной плотностью числа частиц, при нарушении фазовой симметрии, новые голдстоуновские коллективные возбуждения? Известно, что в фермиевской системе они не возникают. По-видимому, аналогично обстоит дело и в многочастичных бозе-системах. На это же указывают и результаты экспериментов по исследованию спектра возбуждений в $^4$He методом неупругого рассеяния нейтронов. Линейный участок спектра оказывается практически не чувствительным к точке перехода жидкого $^4$He в сверхтекучее состояние (см. [11] и приведенную там литературу). Этот же результат, как отмечалось выше, следует из нестационарных уравнений СП. В заключение краткого обсуждения этого важного вопроса, заметим, что при обобщении результата Голдстоуна [37] на нерелятивистские системы используются, как правило модельные гамильтонианы, типа гамильтониана Гейзенберга для ферромагнетика. Актуальным является анализ связи между нарушением симметрии и возможными возбуждениями для реалистических многочастичных гамильтонианов типа (1).

## Заключение

Статическая модель СП описывает вклад в термодинамику многочастичной системы одночастичных надконденсатных возбуждений и конденсатных состояний. Для ферми-систем при низких температурах этот вклад является определяющим. Поэтому теория ферми-систем, основанная на одночастичном описании, может быть использована в этом случае для исследования реальных систем. Для бозе-систем это не так, поскольку здесь с понижением температуры вклад одночастичных возбуждений в термодинамику падает, а вклад коллективных возбуждений возрастает. Последовательная реалистическая теория многочастичных бозе-систем должна учитывать наряду с одночастичными и коллективные возбуждения. Хотя статическая модель СП не удовлетворяет этому требованию, ее теоретическое изучение важно по нескольким причинам. Во-первых, позволяет лучше понять структуру состояния бозе-системы с нарушенной фазовой инвариантностью, в частности продемонстрировать существенное отличие такого состояния от состояния идеального бозе-газа с конденсатом. Во-вторых, позволяет найти вклад одночастичных степеней свободы в наблюдаемые характеристики системы. В-третьих, предложенная модель служит естественным исходным приближением для построения квантовополевой теории возмущений и диаграммной техники для бозе-систем со спонтанно нарушенными симметриями, аналогичной той, что развита для ферми-систем в работе [19].

Автор благодарит И. В. Богоявленского и Л. В. Карнацевича за многократные полезные обсуждения экспериментов по исследованию бозе-конденсата и спектра возбуждений в жидком $^4$He методом неупругого рассеяния нейтронов, а также А. С. Бакая и С. В. Пелетминского за обсуждение работы.

1. Д. Хартри, *Расчеты атомных структур*, Изд-во иностр. лит., Москва (1960).
2. V. Fock, *Z. Phys.* **61**, 126 (1930).
3. Б. И. Барц, Ю. Л. Болотин, Е. В. Инопин, В. Ю. Гончар, *Метод Хартри–Фока в теории ядра*, Наукова думка, Киев (1982).
4. Дж. Слэтер, *Методы самосогласованного поля для молекул и твердых тел*, Мир, Москва (1978).
5. Н. Н. Боголюбов, *ДАН СССР* **119**, 224 (1958).
6. A. Griffin, *Phys. Rev.* **B53**, 9341 (1996).
7. C. C. Bradley, C. A. Sackett, J. J. Tollett, and R. G. Hulet, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 1687 (1995).
8. K. B. Davis, M. O. Mewes, M. R. Andews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn, and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3969 (1995).
9. Н. Н. Боголюбов, Н. Н. Боголюбов (мл.), *Введение в квантовую статистическую механику*, Наука, Москва (1984).
10. Л. Д. Ландау, *J. Phys. USSR* **11**, 91 (1947).
11. Ю. М. Полуэктов, Л. В. Карнацевич, *Энергетические возбуждения в жидком* $^4$He *и их проявление в спектре рассеяния нейтронов,* Препринт ХФТИ, Харьков, 2001-1 (2001).
12. В. В. Красильников, С. В. Пелетминский, *Физика ЭЧАЯ* **24**, 463 (1993).
13. A. L. Fetter, *Ann. Phys. (N. Y.)* **70**, 67 (1972).
14. С. И. Шевченко, *ФНТ* **18**, 328 (1992).
15. Ю. М. Полуэктов, *ФНТ* **22**, 402 (1996).
16. M. Girardeau and R. Arnowitt, *Phys. Rev.* **B113**, 755 (1959).
17. П. С. Кондратенко, *ТМФ* **22**, 278 (1975).
18. И. В. Богоявленский, Л. В. Карнацевич, Ж. А. Козлов, А. В. Пучков, *ФНТ* **16**, 139 (1990).
19. Ю. М. Полуэктов, *Вестник Харьковского университета, сер. физ.: "ядра, частицы, поля"* **522**, 3 (2001).
20. Н. Н. Боголюбов, *Изв. АН СССР, сер. физ.* **11**, 77 (1947).
21. A. Bijl, *Physica* **7**, 869 (1940).
22. G. Wentzel, *Phys. Rev.* **120**, 1572 (1960).
23. M. Luban, *Phys. Rev.* **128**, 965 (1962).
24. В. В. Толмачев, *ДАН СССР* **135**, 825 (1960).
25. N. M. Hugenholtz and D. Pines, *Phys. Rev.* **116**, 489 (1959).
26. С. Т. Беляев, *ЖЭТФ* **34**, 417 (1958).
27. Д. Пайнс, *Проблема многих тел,* Изд-во иностр. лит., Москва (1963).
28. Ю. А. Непомнящий, А. А. Непомнящий, *ЖЭТФ* **75**, 976 (1978).
29. В. Н. Попов, А. В. Середняков, *ЖЭТФ* **77**, 377 (1979).

30. И. А. Малкин, В. И. Манько, *Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем*, Наука, Москва (1979).
31. Л. Д. Ландау, *ЖЭТФ* **30**, 1056 (1956).
32. Ю. М. Полуэктов, *ФНТ* **21**, 300 (1995).
33. В. В. Красильников, С. В. Пелетминский, А. А. Рожков, А. А. Яценко, *Физика ЭЧАЯ* **19**, 1440 (1988).
34. Дж. Займан, *Электроны и фононы*, Изд-во иностр. лит., Москва (1962).
35. A. J. Leggett, *Rev. Mod. Phys.* **47**, 331 (1975).
36. D. Bohm and D. Pines, *Phys. Rev.* **92**, 609 (1953).
37. J. Goldstone, *Nuovo Cimento* **19**, 154 (1961).
38. H. Wagner, *Z. Phys.* **195**, 273 (1966).
39. R. V. Lange, *Phys. Rev.* **146**, 301 (1966).

## The model of self-consistent field for spatially-inhomogeneous bose-systems

Yu. M. Poluektov

A model of self-consistent field for spatially-inhomogeneous multiparticle bose-systems with broken symmetries is constructed. A set of self-consistent equations for wave functions of quasiparticles and wave function of particles of the condensate and a set of equations for normal and anomalous one-particle matrices of density are received. A multiparticle wave function is found. Based on the microscopic consideration, a thermodynamics of multiparticle bose-systems is constructed in the approximation of self-consistent field. It is pointed out that the bose-condensation in the model of ideal gas differs essentially from that in the system of interacting bose-particles. The difference is caused by the obligatory existence of a pair condensate alongside the one-particle one even for very weak interaction.