

## Резонансная прозрачность фотонного кристалла с дефектом в виде слоистого сверхпроводника

С.С. Апостолов<sup>1,2</sup>, Н.М. Макаров<sup>1,3</sup>, В.А. Ямпольский<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Институт радиофизики и электроники им. А.Я. Ускова НАН Украины, г. Харьков, 61085, Украина

E-mail: yam@ire.kharkov.ua

<sup>2</sup>Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, г. Харьков, 61022, Украина

<sup>3</sup>Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, Pue. 72000, México

Статья поступила в редакцию 31 января 2017 г., опубликована онлайн 25 мая 2017 г.

Теоретически изучено прохождение терагерцевой электромагнитной волны поперечно-магнитной поляризации через одномерный фотонный кристалл конечной толщины, содержащий дефект в виде пластины слоистого сверхпроводника, сверхпроводящие слои которого ортогональны слоям фотонного кристалла. Получено аналитическое выражение для коэффициента прохождения и показано, что прозрачность в запрещенной зоне фотонного кристалла может быть существенно усилена за счет резонансного возбуждения локализованных на дефекте мод.

Теоретично вивчено проходження терагерцевої електромагнітної хвилі поперечно-магнітної поляризації через одновимірний фотонний кристал кінцевої товщини, що містить дефект у вигляді пластини шаруватого надпровідника, надпровідні шари якого ортогональні шарам фотонного кристалу. Отримано аналітичний вираз для коефіцієнта проходження та показано, що прозорість в забороненій зоні фотонного кристала може бути істотно посилена за рахунок резонансного збудження локалізованих на дефекті мод.

PACS: **74.72.-h** Купратные сверхпроводники;

78.67.Pt Мультислои, сверхрешетки, фотонные структуры, метаматериалы;

42.70.Qf Фотонные материалы с запрещенной зоной;

**78.67.-n** Оптические свойства низкоразмерных, мезоскопических и наноматериалов и структур.

Ключевые слова: фотонный кристалл, слоистый сверхпроводник, многослойные метаматериалы, оптические свойства.

Наука и техника терагерцевых волн начала активно развиваться начиная с 1960-х годов, когда стали доступны первые источники и приемники такого излучения. В последнее время это бурно развивающееся направление имеет большие перспективы использования в физике, химии, астрономии, системах безопасности, медицинской диагностике, контроле окружающей среды. Одним из перспективных материалов для фотоники терагерцевого диапазона могут выступать высокотемпературные сверхпроводники (см., например, [1,2]), имеющие слоистую структуру с сильной одноосной анизотропией, например, кристаллы  $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_{8+\delta}$  или  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$ . Такие структуры состоят из тонких слоев сверхпроводника (с толщиной  $\sim 0,2$  нм для  $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_{8+\delta}$ ), разделенных более толстыми слоями диэлектрика с толщиной  $\sim 1,5$  нм. Экспериментальные исследования проводимости поперек слоев, т.е. вдоль кристаллографической оси  $c$  (см., например, [3,4]), показали, что

сверхпроводящие слои в таких структурах электродинамически связаны между собой за счет внутреннего эффекта Джозефсона, что привело к возникновению названия для сильно анизотропной плазмы в слоистых сверхпроводниках — джозефсоновская плазма, а возбуждения в такой плазме стали называть джозефсоновскими плазменными волнами [1,5–11].

Как и волны в обычной плазме, джозефсоновские плазменные волны распространяются при частотах, превышающих пороговую частоту — джозефсоновскую плазменную частоту  $\omega_J$ . В работах [12–14] было показано, что вдоль границы слоистого сверхпроводника могут распространяться поверхностные колебания — джозефсоновские поверхностные плазменные волны, подобно тому, как вдоль границы обычной плазмы могут распространяться поверхностные плазмоны. Однако, в отличие от обычной плазмы, поверхностные волны в слоистых сверхпроводниках могут

распространяться с частотами не только ниже, но и выше джозефсоновской плазменной частоты [12].

Аналогично поверхностным волнам в полубесконечном слоистом сверхпроводнике, в пластинах слоистого сверхпроводника также могут распространяться волны, которые локализованы на пластине и затухают вне ее при удалении от поверхности. В работе [15] теоретически изучены такие волны для случая, когда сверхпроводящие слои параллельны, а в работе [16] — перпендикулярны граням пластины. Поскольку продольная  $\epsilon_{ab}$  и поперечная  $\epsilon_c$  компоненты тензора эффективной диэлектрической проницаемости, см. уравнение (1), могут иметь разные знаки в широком диапазоне частот, дисперсия таких волн оказывается аномальной [16]. Более того, сильная анизотропия может приводить к отрицательному преломлению объемных электромагнитных волн [12,17].

В настоящей работе мы теоретически исследуем прохождение терагерцевых волн через одномерный бинарный фотонный кристалл с дефектом в виде пластины слоистого сверхпроводника. Показано, что в бесконечном кристалле с таким дефектом могут существовать волны, локализованные на дефекте и распространяющиеся вдоль него. Нами получены общие дисперсионные соотношения для этих волн. За счет резонансного возбуждения локализованных на дефекте волн прозрачность фотонного кристалла конечной толщины в запрещенной зоне может быть существенно усилена. В работе получены аналитические выражения для коэффициента прохождения поперечно-магнитной (ТМ) поляризованной волны, а для случая резонансного усиления получен упрощенный результат, показывающий влияние локализованных мод на прохождение электромагнитной волны.

Статья построена следующим образом. Во втором разделе обсуждается постановка задачи и геометрия системы. В третьем разделе определяется распределение электромагнитного поля в фотонном кристалле и дефектном слое, и на его основе вычисляются трансфер-матрицы элементарной ячейки кристалла и ячейки с дефектом. Четвертый раздел посвящен выводу дисперсионного соотношения для локализованных на дефекте мод. И, наконец, в пятом разделе получены аналитические выражения для коэффициента прохождения волн в резонансном и нерезонансном случаях, а также проведена численная симуляция для проверки полученных результатов.

### 1. Постановка задачи

Мы исследуем прохождение электромагнитной волны сквозь фотонный кристалл, который содержит дефект в виде пластины слоистого сверхпроводника, см. рис. 1. Фотонный кристалл состоит из двух чередующихся,  $a$  и  $b$ , немагнитных диэлектрических слоев с толщинами  $d_a$  и  $d_b$  и диэлектрическими проницае-

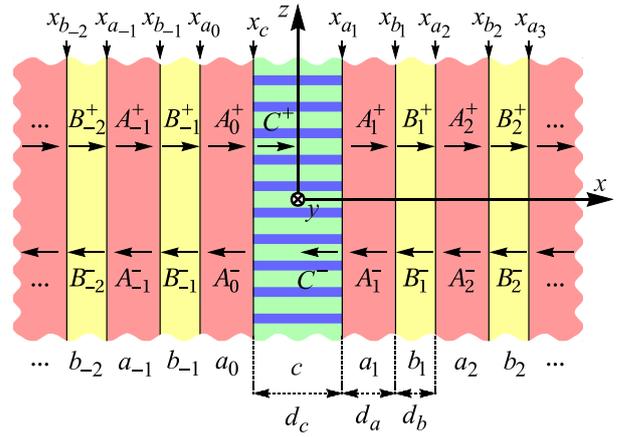


Рис. 1. Геометрия задачи. Фотонный кристалл, состоящий из чередующихся диэлектрических слоев  $a$  и  $b$ , содержит дефект  $c$  в виде пластины слоистого сверхпроводника, слои которого перпендикулярны слоям фотонного кристалла. Стрелки схематически показывают направление распространения волн с амплитудами  $A_n^\pm, B_n^\pm$  и  $C^\pm$  внутри слоев типа  $a, b$  и  $c$ .

мостями  $\epsilon_a$  и  $\epsilon_b$  соответственно. Дефект  $c$  представляет собой пластину толщиной  $d_c$ , которая заменяет один из  $b$ -слоев фотонного кристалла, и, в свою очередь, состоит из чередующихся слоев изолятора и сверхпроводника, расположенных под прямым углом к слоям фотонного кристалла.

Система координат выбрана следующим образом: ось  $x$  направлена перпендикулярно слоям фотонного кристалла, ось  $z$  сонаправлена с кристаллографической осью  $c$  и перпендикулярна слоям в слоистом сверхпроводнике, а ось  $y$  параллельна всем указанным слоям.

При описании взаимодействия электромагнитной волны частоты  $\omega$  с дефектом мы будем считать пространственный масштаб изменения поля вдоль оси  $z$  существенно большим периода структуры слоистого сверхпроводника. Это позволяет перейти к континуальному пределу и описывать электродинамику слоистого сверхпроводника в терминах эффективного тензора диэлектрической проницаемости [17], который имеет следующий вид:

$$\epsilon_{xx}(\Omega) = \epsilon_{yy}(\Omega) = \epsilon_c \left( 1 - \frac{\gamma^2}{\Omega^2} \right),$$

$$\epsilon_{zz}(\Omega) = \epsilon_c \left( 1 - \frac{1}{\Omega^2} \right). \quad (1)$$

Здесь  $\Omega$  — частота волны, нормированная на джозефсоновскую плазменную частоту  $\omega_J$ ,

$$\Omega = \omega / \omega_J, \quad (2)$$

$\omega_J = (8\pi e J_c D / \hbar \epsilon_c)^{1/2}$ ,  $J_c$  — максимальная плотность джозефсоновского тока,  $\epsilon_c$  и  $D$  — диэлектрическая проницаемость и толщина слоев изолятора в слоистом

сверхпроводнике;  $e$  — элементарный заряд. Кроме того, электродинамика слоистого сверхпроводника характеризуется лондоновскими глубинами проникновения вдоль,  $\lambda_c = c/\omega_J \varepsilon_c^{1/2}$ , и поперек,  $\lambda_{ab}$ , сверхпроводящих слоев. В дальнейшем мы предполагаем, что  $\lambda_{ab} \ll \lambda_c$ , т.е. параметр анизотропии велик,  $\gamma = \lambda_c/\lambda_{ab} \gg 1$ .

В настоящей работе мы исследуем электромагнитные волны ТМ-поляризации, электрическая  $\mathbf{E}$  и магнитная  $\mathbf{H}$ , компоненты которых определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x, z, t) &= \{E_x(x), 0, E_z(x)\} \exp[i(k_z z - \omega t)], \\ \mathbf{H}(x, z, t) &= \{0, H_y(x), 0\} \exp[i(k_z z - \omega t)], \end{aligned} \quad (3)$$

где  $k_z$  обозначает  $z$ -проекцию волнового вектора  $\mathbf{k}$ , характеризующую угол распространения волны относительно слоев фотонного кристалла.

## 2. Трансфер-матрицы фотонного кристалла с дефектом

### 2.1. Трансфер-матрица элементарной ячейки фотонного кристалла

Мы начнем с вычисления трансфер-матрицы элементарной ячейки фотонного кристалла. Уравнения Максвелла дают простое дифференциальное уравнение для магнитного поля  $H_y(x)$  ТМ-поляризованной волны (3) в каждом из диэлектрических слоев,  $a$  и  $b$ ,

$$\frac{d^2 H_y^{a,b}}{dx^2} + k_{a,b}^2 H_y^{a,b} = 0, \quad k_{a,b} = \sqrt{\varepsilon_{a,b} k_0^2 - k_z^2}, \quad (4)$$

а также связь компонент  $E_x^{a,b}$  и  $E_z^{a,b}$  электрического поля с полем  $H_y^{a,b}$ :

$$E_x^{a,b} = \frac{k_z}{\varepsilon_{a,b} k_0} H_y^{a,b}, \quad E_z^{a,b} = i \frac{1}{\varepsilon_{a,b} k_0} \frac{dH_y^{a,b}}{dx}. \quad (5)$$

Здесь  $k_0 = \omega/c$ , а верхний индекс  $a$  или  $b$  у компонент электромагнитного поля обозначает тип диэлектрического слоя. В дальнейшем мы полагаем, что  $x$ -проекции волнового вектора  $k_a$  и  $k_b$  в слоях  $a$  и  $b$ , соответственно, являются вещественными,  $k_z < k_0 \varepsilon_{a,b}^{1/2}$ .

Общее решение уравнения (4) для магнитного поля и выражения для компонент электрического поля внутри  $n$ -й элементарной ( $a, b$ )-ячейки представляются в виде суперпозиции бегущих вперед и назад плоских волн:

$$\begin{aligned} H_y^{a_n} &= A_n^+ \exp[ik_a(x - x_{a_n})] + \\ &+ A_n^- \exp[-ik_a(x - x_{a_n})], \end{aligned} \quad (6a)$$

$$\begin{aligned} E_z^{a_n} &= -\frac{k_a}{k_0 \varepsilon_a} \{A_n^+ \exp[ik_a(x - x_{a_n})] - \\ &- A_n^- \exp[-ik_a(x - x_{a_n})]\}, \end{aligned} \quad (6b)$$

внутри слоя  $a_n$ , при  $x_{a_n} \leq x \leq x_{b_n}$ , и

$$\begin{aligned} H_y^{b_n} &= B_n^+ \exp[ik_b(x - x_{b_n})] + \\ &+ B_n^- \exp[-ik_b(x - x_{b_n})], \end{aligned} \quad (6c)$$

$$\begin{aligned} E_z^{b_n} &= -\frac{k_b}{k_0 \varepsilon_b} \{B_n^+ \exp[ik_b(x - x_{b_n})] - \\ &- B_n^- \exp[-ik_b(x - x_{b_n})]\}, \end{aligned} \quad (6d)$$

внутри слоя  $b_n$ , при  $x_{b_n} \leq x \leq x_{a_{n+1}}$ . Здесь  $A_n^\pm$  и  $B_n^\pm$  — комплексные амплитуды бегущих вперед (+) и назад (−) волн. Координаты  $x_{a_n}$  и  $x_{b_n}$  обозначают левые границы слоев  $a_n$  и  $b_n$ , соответственно, и  $n$  нумерует ячейки, см. рис. 1. При этом

$$x_{b_n} - x_{a_n} = d_a, \quad x_{a_{n+1}} - x_{b_n} = d_b. \quad (7)$$

На границах соседних слоев  $x = x_{b_n}$  и  $x = x_{a_{n+1}}$  тангенциальные компоненты электрического и магнитного полей должны быть непрерывны,

$$\begin{aligned} H_y^{b_n}(x_{b_n}) &= H_y^{a_n}(x_{b_n}), \quad H_y^{b_n}(x_{a_{n+1}}) = H_y^{a_{n+1}}(x_{a_{n+1}}), \\ E_z^{b_n}(x_{b_n}) &= E_z^{a_n}(x_{b_n}), \quad E_z^{b_n}(x_{a_{n+1}}) = E_z^{a_{n+1}}(x_{a_{n+1}}). \end{aligned} \quad (8)$$

Применяя эти граничные условия к решению (6), мы можем записать связь между амплитудами в  $a$  и  $b$  слоях с использованием трансфер-матриц:

$$\begin{pmatrix} B_n^+ \\ B_n^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{++}^{(ab)} & Q_{+-}^{(ab)} \\ Q_{-+}^{(ab)} & Q_{--}^{(ab)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n^+ \\ A_n^- \end{pmatrix}, \quad (9a)$$

$$\begin{pmatrix} A_{n+1}^+ \\ A_{n+1}^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{++}^{(ba)} & Q_{+-}^{(ba)} \\ Q_{-+}^{(ba)} & Q_{--}^{(ba)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_n^+ \\ B_n^- \end{pmatrix}. \quad (9b)$$

Трансфер-матрица  $\hat{Q}^{(ab)}$  определяет прохождение волны от левой границы  $x_{a_n}$  слоя  $a_n$  до левой границы  $x_{b_n}$  слоя  $b_n$ , а трансфер-матрица  $\hat{Q}^{(ba)}$  — от левой границы  $x_{b_n}$  слоя  $b_n$  до левой границы  $x_{a_{n+1}}$  слоя  $a_{n+1}$ . Их элементы могут быть записаны в виде

$$Q_{++}^{(ab)} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{k_a \varepsilon_b}{k_b \varepsilon_a} \right) \exp(i\varphi_a), \quad (10a)$$

$$Q_{+-}^{(ab)} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{k_a \varepsilon_b}{k_b \varepsilon_a} \right) \exp(-i\varphi_a), \quad (10b)$$

$$Q_{-+}^{(ba)} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{k_b \varepsilon_a}{k_a \varepsilon_b} \right) \exp(i\varphi_b), \quad (10c)$$

$$Q_{--}^{(ba)} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{k_b \varepsilon_a}{k_a \varepsilon_b} \right) \exp(-i\varphi_b). \quad (10d)$$

Здесь  $\varphi_a$  и  $\varphi_b$  — сдвиги фазы волны, прошедшей слою  $a$  и  $b$  соответственно,

$$\varphi_{a,b} = k_{a,b}d_{a,b}. \quad (11)$$

Недостающие в (10) элементы трансфер-матриц легко получаются из приведенных перестановкой индексов,  $a \leftrightarrow b$ .

Уравнения (9) определяют взаимосвязь амплитуд  $A_n^\pm$  и  $A_{n+1}^\pm$  в двух последовательных,  $n$ -й и  $(n+1)$ -й, элементарных  $(a,b)$  ячейках,

$$\begin{pmatrix} A_{n+1}^+ \\ A_{n+1}^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{++} & Q_{+-} \\ Q_{-+} & Q_{--} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n^+ \\ A_n^- \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Матрица  $\hat{Q} = \hat{Q}^{(ba)}\hat{Q}^{(ab)}$  описывает прохождение волны сквозь  $n$ -ю элементарную  $(a,b)$  ячейку, т.е., от левой границы  $x_{a_n}$  слоя  $a_n$  до левой границы  $x_{a_{n+1}}$  слоя  $a_{n+1}$ . Ее элементы могут быть записаны в виде

$$Q_{++} = (\cos \varphi_b + i\alpha_+ \sin \varphi_b) \exp(i\varphi_a), \quad (13a)$$

$$Q_{+-} = i\alpha_- \sin \varphi_b \exp(-i\varphi_a), \quad (13b)$$

$$Q_{-+} = -i\alpha_- \sin \varphi_b \exp(i\varphi_a), \quad (13c)$$

$$Q_{--} = (\cos \varphi_b - i\alpha_+ \sin \varphi_b) \exp(-i\varphi_a), \quad (13d)$$

где

$$\alpha_\pm = \frac{1}{2} \left( \frac{k_b \varepsilon_a}{k_a \varepsilon_b} \pm \frac{k_a \varepsilon_b}{k_b \varepsilon_a} \right). \quad (14)$$

Обратим внимание на то, что определитель матрицы  $\hat{Q}$  равен 1,

$$\det \hat{Q} = Q_{++}Q_{--} - Q_{+-}Q_{-+} = 1. \quad (15)$$

Собственные числа трансфер-матрицы  $\hat{Q}$  могут быть записаны в виде  $\exp(\pm i\mu)$ , где  $\mu$  — так называемая фаза Блоха. Она связана с элементами матрицы следующим образом:

$$\begin{aligned} \cos \mu &= \frac{1}{2}(Q_{++} + Q_{--}) = \\ &= \cos \varphi_a \cos \varphi_b - \alpha_+ \sin \varphi_a \sin \varphi_b. \end{aligned} \quad (16)$$

Следует отметить, что правая часть уравнения (16) всегда вещественна. В зависимости от ее значения фаза Блоха  $\mu$  может быть чисто вещественной, если  $|\cos \mu| < 1$ , чисто мнимой, если  $\cos \mu > 1$ , или комплексной с вещественной частью равной  $\pm\pi$ , если  $\cos \mu < -1$ . Таким образом, возникает зонная структура спектра  $\mu(\omega)$ : интервалы частот, где величина  $\mu(\omega)$  вещественна, называются зонами прохождения волны, а интервалы  $\omega$ , где  $\mu(\omega)$  становится комплексной, — спектральными щелями или зонами отражения.

## 2.2. Трансфер-матрица дефекта из слоистого сверхпроводника

Как видно на рис. 1, мы рассматриваем бинарную систему, в которой один из  $b$ -слоев, а именно слой  $b_0$ , заменен на пластину  $c$  слоистого сверхпроводника толщины  $d_c$ , чья электродинамика определяется сильно анизотропным тензором диэлектрической проницаемости с компонентами (1). При этом мы будем предполагать, что частота волны не слишком велика,  $\omega \ll \gamma\omega_J$  ( $\Omega \ll \gamma$ ).

Решая в пределе  $\gamma \gg 1$  уравнения Максвелла для ТМ-поляризованной волны,

$$\begin{aligned} -\frac{dH_y^c}{dx} &= ik_0 \varepsilon_{zz} E_z^c, \\ H_y^c &= \frac{k_0 \varepsilon_{xx}}{k_z} E_x^c, \\ k_z E_x^c + i \frac{dE_z^c}{dx} &= k_0 H_y^c, \end{aligned} \quad (17)$$

где  $\varepsilon_{xx}$  и  $\varepsilon_{zz}$  определены уравнением (1), мы получаем выражения для тангенциальных компонент электромагнитного поля в следующем виде:

$$H_y^c = C^+ \exp[ik_c(x-x_c)] + C^- \exp[-ik_c(x-x_c)],$$

$$E_z^c = -\frac{\Omega}{\tilde{\Omega}\sqrt{\varepsilon}} \{C^+ \exp[ik_c(x-x_c)] - C^- \exp[-ik_c(x-x_c)]\}, \quad (18)$$

где

$$k_c = \lambda_c^{-1} \tilde{\Omega}, \quad \tilde{\Omega} = \sqrt{\Omega^2 - 1}. \quad (19)$$

На границах дефекта  $c$  с соседними  $a$ -слоями тангенциальные компоненты электромагнитного поля должны быть непрерывны,

$$H_y^c(x_c) = H_y^{a_0}(x_c), \quad H_y^c(x_{a_1}) = H_y^{a_1}(x_{a_1}), \quad (20a)$$

$$E_z^c(x_c) = E_z^{a_0}(x_c), \quad E_z^c(x_{a_1}) = E_z^{a_1}(x_{a_1}), \quad (20b)$$

где  $x_c = x_{b_0}$  и  $x_{a_1}$  обозначают левые границы последовательных слоев  $c$  и  $a_1$  соответственно, см. рис. 1. При этом

$$x_c - x_{a_0} = d_a, \quad x_{a_1} - x_c = d_c. \quad (21)$$

Применяя граничные условия (20) к решениям (6) и (18), получаем следующие матричные соотношения:

$$\begin{pmatrix} C^+ \\ C^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{++}^{(ac)} & Q_{+-}^{(ac)} \\ Q_{-+}^{(ac)} & Q_{--}^{(ac)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0^+ \\ A_0^- \end{pmatrix}, \quad (22a)$$

$$\begin{pmatrix} A_1^+ \\ A_1^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{++}^{(ca)} & Q_{+-}^{(ca)} \\ Q_{-+}^{(ca)} & Q_{--}^{(ca)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C^+ \\ C^- \end{pmatrix}. \quad (22b)$$

Элементы трансфер-матриц  $\hat{Q}^{(ac)}$  и  $\hat{Q}^{(ca)}$  могут быть записаны в виде

$$Q_{++}^{(ac)} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{k_a \lambda_c \tilde{\Omega} \varepsilon_c}{\Omega^2 \varepsilon_a} \right) \exp(i\varphi_a), \quad (23a)$$

$$Q_{+-}^{(ac)} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{k_a \lambda_c \tilde{\Omega} \varepsilon_c}{\Omega^2 \varepsilon_a} \right) \exp(-i\varphi_a), \quad (23b)$$

$$Q_{-+}^{(ac)} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{k_a \lambda_c \tilde{\Omega} \varepsilon_c}{\Omega^2 \varepsilon_a} \right) \exp(i\varphi_a), \quad (23c)$$

$$Q_{--}^{(ac)} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{k_a \lambda_c \tilde{\Omega} \varepsilon_c}{\Omega^2 \varepsilon_a} \right) \exp(-i\varphi_a), \quad (23d)$$

$$Q_{++}^{(ca)} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\Omega^2 \varepsilon_a}{k_a \lambda_c \tilde{\Omega} \varepsilon_c} \right) \exp(i\varphi_c), \quad (23e)$$

$$Q_{+-}^{(ca)} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\Omega^2 \varepsilon_a}{k_a \lambda_c \tilde{\Omega} \varepsilon_c} \right) \exp(-i\varphi_c), \quad (23f)$$

$$Q_{-+}^{(ca)} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\Omega^2 \varepsilon_a}{k_a \lambda_c \tilde{\Omega} \varepsilon_c} \right) \exp(i\varphi_c), \quad (23g)$$

$$Q_{--}^{(ca)} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\Omega^2 \varepsilon_a}{k_a \lambda_c \tilde{\Omega} \varepsilon_c} \right) \exp(-i\varphi_c), \quad (23h)$$

где  $\varphi_c = k_c d_c = d_c \lambda_c^{-1} \tilde{\Omega}$ .

Трансфер-матрица  $\hat{Q}^{(c)} = \hat{Q}^{(ca)} \hat{Q}^{(ac)}$  описывает прохождение волны сквозь ячейку, содержащую дефект, т.е. от левой границы  $x_{a_0}$  слоя  $a_0$  до левой границы  $x_{a_1}$  слоя  $a_1$ ,

$$\begin{pmatrix} A_1^+ \\ A_1^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{++}^{(c)} & Q_{+-}^{(c)} \\ Q_{-+}^{(c)} & Q_{--}^{(c)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0^+ \\ A_0^- \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Она имеет следующие компоненты:

$$Q_{++}^{(c)} = (\cos \varphi_c + i\beta_+ \sin \varphi_c) \exp(i\varphi_a), \quad (25a)$$

$$Q_{+-}^{(c)} = i\beta_- \sin \varphi_c \exp(-i\varphi_a), \quad (25b)$$

$$Q_{-+}^{(c)} = -i\beta_- \sin \varphi_c \exp(i\varphi_a), \quad (25c)$$

$$Q_{--}^{(c)} = (\cos \varphi_c - i\beta_+ \sin \varphi_c) \exp(-i\varphi_a), \quad (25d)$$

где

$$\beta_{\pm} = \frac{1}{2} \left( \frac{\Omega^2 \varepsilon_a}{k_a \lambda_c \tilde{\Omega} \varepsilon_c} \pm \frac{k_a \lambda_c \tilde{\Omega} \varepsilon_c}{\Omega^2 \varepsilon_a} \right). \quad (26)$$

Для этой трансфер-матрицы так же, как и для матрицы  $\hat{Q}$ , выполняется условие унимодулярности,

$$\det \hat{Q}^{(c)} = Q_{++}^{(c)} Q_{--}^{(c)} - Q_{+-}^{(c)} Q_{-+}^{(c)} = 1. \quad (27)$$

### 3. Собственные локализованные моды в фотонном кристалле с дефектом

Прежде чем изучать прохождение волн сквозь фотонный кристалл конечного размера, обратим внимание на спектр локализованных мод в бесконечном фотонном кристалле с дефектом. В дальнейшем будет показано, что существенное усиление прозрачности в запрещенной зоне фотонного кристалла будет наблюдаться именно в тех условиях, когда происходит резонансное возбуждение локализованных мод.

Для того чтобы вывести дисперсионное соотношение для локализованных мод на дефекте, предположим, что частота  $\Omega$  соответствует запрещенной зоне фотонного кристалла, т.е. фаза Блоха  $\mu$  (см. уравнение (16) и комментарий к нему) содержит мнимую часть, а ее реальная часть равна  $m\pi$ , где  $m$  — целое число,

$$\mu = m\pi + i\psi, \quad \psi > 0. \quad (28)$$

В этом случае собственные значения трансфер-матрицы  $\hat{Q}$  становятся вещественными:  $\exp(\pm i\mu) = (-1)^m \exp(\mp \psi)$ , а их абсолютные значения не равны 1. В этом случае электромагнитное поле локализованных мод экспоненциально убывает при удалении от дефекта, т.е. можно считать, что амплитуды полей в слоях, отстоящих на  $n \gg 1$  элементарных ячеек от дефекта, в  $\exp(n\psi)$  меньше амплитуд полей вблизи дефекта,

$$|A_{n+1}^{\pm}| \sim |A_n^{\pm}| \sim |A_0^{\pm}| \exp(-n\psi). \quad (29)$$

Амплитуды  $A_n^{\pm}$  и  $A_{n+1}^{\pm}$  связаны между собой с помощью трансфер-матриц элементарной ячейки и дефекта:

$$\begin{pmatrix} A_{n+1}^+ \\ A_{n+1}^- \end{pmatrix} = \hat{Q}^n \hat{Q}^{(c)} \hat{Q}^n \begin{pmatrix} A_n^+ \\ A_n^- \end{pmatrix}. \quad (30)$$

Применим к этому соотношению жорданово разложение трансфер-матрицы  $\hat{Q}$ ,

$$\hat{Q} = \hat{S}^{-1} \hat{\Lambda} \hat{S}, \quad (31)$$

где  $\hat{\Lambda}$  — матрица собственных значений и  $\hat{S}$  — матрица трансформации,

$$\hat{\Lambda} = \begin{pmatrix} e^{i\mu} & 0 \\ 0 & e^{-i\mu} \end{pmatrix}, \quad \hat{S} = \begin{pmatrix} Q_{++} - e^{-i\mu} & Q_{+-} \\ Q_{--} - e^{-i\mu} & -Q_{-+} \end{pmatrix} \quad (32)$$

Введя вектора

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}_n^+ \\ \mathcal{A}_n^- \end{pmatrix} = \hat{S} \begin{pmatrix} A_n^+ \\ A_n^- \end{pmatrix}, \quad (33)$$

мы можем переписать для них соотношение переноса (30) в виде

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}_{n+1}^+ \\ \mathcal{A}_{n+1}^- \end{pmatrix} = \hat{\Lambda}^n \hat{\mathcal{D}} \hat{\Lambda}^n \begin{pmatrix} \mathcal{A}_n^+ \\ \mathcal{A}_n^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{D}_{++} e^{2i\mu n} & \mathcal{D}_{+-} \\ \mathcal{D}_{-+} & \mathcal{D}_{--} e^{-2i\mu n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{A}_n^+ \\ \mathcal{A}_n^- \end{pmatrix}, \quad (34)$$

где

$$\hat{\mathcal{D}} = \hat{S} \hat{Q}^{(c)} \hat{S}^{-1}. \quad (35)$$

Обратим внимание на то, что для амплитуд  $\mathcal{A}^\pm$  должно выполняться соотношение, аналогичное условию (29),

$$|\mathcal{A}_{n+1}^\pm| \sim |\mathcal{A}_n^\pm| \sim |\mathcal{A}_0^\pm| \exp(-n\psi). \quad (36)$$

Соотношения (28) и (34) показывают, что затухание амплитуды по закону (36) возможно только в случае, когда элемент  $\mathcal{D}_{--} \exp(2n\psi)$  равен нулю, т.е. при

$$\mathcal{D}_{--} = 0. \quad (37a)$$

Последнее равенство представляет собой дисперсионное соотношение для собственных локализованных мод. Элемент  $\mathcal{D}_{--}$  может быть записан в явном виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{--} = & \frac{i}{\sin \mu} \{ e^{-i\mu} (\cos \varphi_a \cos \varphi_c - \beta_+ \sin \varphi_a \sin \varphi_c) - \\ & - [\cos \varphi_b \cos \varphi_c + (\alpha_+ \beta_+ - \alpha_- \beta_-) \sin \varphi_b \sin \varphi_c] \}. \end{aligned} \quad (37b)$$

Обратим внимание на то, что в запрещенной зоне фотонного кристалла, когда  $\mu = \pi m + i\psi$ , элемент  $\mathcal{D}_{--}$  является вещественным числом.

#### 4. Резонансная прозрачность

В этом разделе мы изучим прохождение электромагнитной волны через фотонный кристалл конечной толщины с дефектом. Будем предполагать, что он состоит из  $2N+1$  элементарных  $(a_n, b_n)$  ячеек, пронумерованных  $n = -N, 1-N, \dots, N$ , а в центральной ячейке слой  $b_0$  заменен на дефект  $c$  в виде слоистого сверхпроводника, см. рис. 1. Предположим также, что остальное пространство, вне фотонного кристалла, заполнено диэлектриком типа  $a$ . Как уже было сказано ранее, мы будем предполагать, что волна в диэлектрике типа  $a$  является распространяющейся, т.е.  $x$ -проекция волнового вектора  $k_a$  — вещественна, и  $k_z < \sqrt{\varepsilon_a} k_0$ .

##### 4.1. Коэффициент прохождения

Пусть на фотонный кристалл падает волна единичной амплитуды, т.е.  $\mathcal{A}_N^+ = 1$ . Тогда коэффициент  $\mathcal{A}_{N+1}^- = r$  определяет комплексную амплитуду отраженной от фотонного кристалла волны. Аналогично, величина  $\mathcal{A}_{N+1}^+ = t$  представляет собой комплексную амплитуду волны, прошедшей сквозь фотонный кристалл. Условие  $\mathcal{A}_{N+1}^- = 0$  указывает на отсутствие источников волн справа от фотонного кристалла.

Амплитуды  $\mathcal{A}_{-N}^\pm$  и  $\mathcal{A}_{N+1}^\pm$  связаны между собой посредством трансфер-матриц элементарной ячейки  $\hat{Q}$  и ячейки с дефектом  $\hat{Q}^{(c)}$  согласно уравнению (30) с заменой  $n$  на  $N$ . Таким образом, комплексные амплитуды  $t$  и  $r$  удовлетворяют соотношению

$$\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} = \hat{M} \begin{pmatrix} 1 \\ r \end{pmatrix}, \quad \hat{M} = \hat{Q}^N \hat{Q}^{(c)} \hat{Q}^N, \quad (38)$$

из которого можно выразить величины  $t$  и  $r$  через элементы трансфер-матрицы  $\hat{M}$  всего фотонного кристалла:

$$t = \frac{1}{M_{--}}, \quad r = -\frac{M_{-+}}{M_{--}}. \quad (39)$$

При выводе этих выражений мы воспользовались тем, что  $\det \hat{M} = 1$ . Следовательно, коэффициент прохождения волны (transmittance) через кристалл равен:

$$T = |t|^2 = \frac{1}{|M_{--}|^2}. \quad (40)$$

Поскольку все трансфер-матрицы в рассматриваемой здесь задаче, включая матрицу  $\hat{M}$ , удовлетворяют условию обратимости времени ( $M_{--} = M_{++}^*$  и  $M_{-+} = M_{+-}^*$ ), коэффициент прохождения  $T$  никогда не превышает 1. Действительно, с помощью равенства  $\det \hat{M} = 1$  нетрудно убедиться, что  $|M_{--}|^2 = 1 + |M_{-+}|^2 > 1$ .

Теперь мы выведем явное выражение для  $M_{--}$ . Для этой цели мы снова применим жорданово разложение, см. уравнения (32) и (33),

$$\hat{M} = \hat{S}^{-1} \hat{\Lambda}^N \hat{\mathcal{D}} \hat{\Lambda}^N \hat{S}. \quad (41)$$

Тогда  $M_{--}$  можно представить в виде

$$\begin{aligned} M_{--} = & \frac{1 - e^{2iN\mu}}{2i \sin \mu} [(S_{-+} + S_{++} e^{-2iN\mu}) \mathcal{D}_{--} + \\ & + S_{++} Q_{--}^{(c)} - S_{-+} Q_{++}^{(c)}] + Q_{--}^{(c)} e^{2iN\mu}. \end{aligned} \quad (42)$$

Обратим внимание на то, что в выражении (42) выделено слагаемое, содержащее  $\mathcal{D}_{--}$ , которое определяет спектр локализованных мод. Как мы увидим в следующем подразделе, это слагаемое оказывается очень важным в эффекте усиления прозрачности фотонного кристалла в запрещенной зоне.

##### 4.2. Возбуждение локализованных мод

В этом подразделе мы изучим усиление коэффициента прохождения в запрещенной зоне фотонного кристалла за счет возбуждения локализованных на дефекте мод. Ограничимся диапазоном частот, соответствующих запрещенным зонам кристалла, где фаза Блоха имеет вид (28). В этом случае в отсутствие дефекта коэффициент прохождения  $T$  экспоненциально мал,  $T(N) \propto \exp(-4N\psi) \ll 1$ . Тем не менее, как будет показано ниже, благодаря наличию дефектного слоя коэффициент прохождения испытывает резонансное усиление за

счет возбуждения собственной локализованной моды и может достигать значений порядка 1.

Пусть параметры падающей волны близки к резонансным значениям, т.е.  $|\mathcal{D}_{--}| \ll 1$ . Тогда мы можем упростить уравнение (42), подразумевая, что  $\mathcal{D}_{--} \exp(-2iN\psi)$  может быть порядка 1,

$$M_{--} \approx -\frac{S_{++}\mathcal{D}_{--}e^{2N\psi}}{2(-1)^m \text{sh}\psi} - \frac{i\text{Im}[S_{++}Q^{(c)}]}{(-1)^m \text{sh}\psi}. \quad (43)$$

Второе слагаемое в этом выражении является чисто мнимым, тогда как первое слагаемое содержит комплексность только в  $S_{++}$ ,

$$S_{++} = -(-1)^m \text{sh}\psi + i(\sin\varphi_a \cos\varphi_b + \alpha_+ \cos\varphi_a \sin\varphi_b), \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \text{Im}[S_{++}Q^{(c)}] &= (\alpha_+ \sin\varphi_b \cos\varphi_c - \beta_+ \cos\varphi_b \sin\varphi_c) + \\ &+ (-1)^m e^\psi (\sin\varphi_a \cos\varphi_c + \beta_+ \cos\varphi_a \sin\varphi_c). \end{aligned}$$

Принимая во внимание это соображение, получаем для коэффициента прохождения следующий результат:

$$\begin{aligned} T^{-1} &\approx \frac{1}{4}[\mathcal{D}_{--}e^{2N\psi}]^2 + \\ &+ \frac{\{2\text{Im}[S_{++}Q^{(c)}] + [\mathcal{D}_{--}e^{2N\psi}]\text{Im}S_{++}\}^2}{4\text{sh}^2\psi}. \end{aligned} \quad (45a)$$

Вдали от резонанса, когда  $|\mathcal{D}_{--}| \exp(2N\psi) \gg 1$ , коэффициент прохождения экспоненциально мал,

$$T \approx \frac{4\text{sh}^2\psi}{|S_{++}\mathcal{D}_{--}|^2} e^{-4N\psi}, \quad (45b)$$

а в непосредственной близости от резонанса, при

$$\mathcal{D}_{--} \approx -\frac{2\text{Im}[S_{++}Q^{(c)}]\text{Im}S_{++}}{|S_{++}|^2} e^{-2N\psi}, \quad (45c)$$

коэффициент прохождения значительно возрастает и в максимуме может достигать значений порядка 1:

$$T_{\max} \approx \frac{|S_{++}|^2}{\text{Im}^2[S_{++}Q^{(c)}]}. \quad (45d)$$

### 4.3. Численная симуляция

На рис. 2 представлены результаты численной симуляции прохождения волны через фотонный кристалл конечной толщины с дефектом в виде слоистого сверхпроводника. Фотонный кристалл состоит из  $2N+1=15$  элементарных ячеек, из которых все, кроме центральной, состоят из вакуумного ( $\varepsilon_a=1$ ) слоя толщиной  $d_a=7\lambda_c$  и слоя стекла толщиной  $d_b=6\lambda_c$  с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_b=3,8$ . Центральная ячейка содержит дефект — состоит из вакуумной про-

слойки толщиной  $d_a=7\lambda_c$  и пластины слоистого сверхпроводника толщиной  $d_c=6\lambda_c$  с диэлектрической проницаемостью слоев изолятора  $\varepsilon_c=16$ . Волна в вакууме распространяется под углом  $\theta$  к оси  $x$ , т.е.  $k_x=k_a=(\sqrt{\varepsilon_a}\omega/c)\cos\theta$  и  $k_z=(\sqrt{\varepsilon_a}\omega/c)\sin\theta$ . Цветом на рис. 2 обозначена величина коэффициента прохождения  $T$  (чем темнее область — тем больше величина  $T$ ) в функции угла падения  $\theta$  и частоты  $\Omega=\omega/\omega_J$  в областях, соответствующих запрещенным зонам фотонного кристалла, т.е. когда  $|\cos\mu|>1$ . Разрешенные зоны фотонного кристалла, соответствующие  $|\cos\mu|<1$ , обозначены серой заливкой. Черные линии в запрещенных зонах — дисперсионные кривые (37). Красная штриховая прямая показывает интервал изменения частоты, для которого построен рис. 3.

На рис. 3 представлена зависимость коэффициента прохождения от  $\Omega$  для фотонного кристалла с дефектом (сплошная синяя линия) и для фотонного кристалла без дефекта (штриховая красная линия), содержащих одинаковое количество ячеек  $2N+1=15$ . Угол падения  $\theta=1,4$ , и диапазон по частотам соответствует красной штриховой линии на рис. 2. В запрещенной зоне имеются два пика, соответствующие двум дисперсионным кривым, пересекаемым красной штриховой линией на рис. 2, возникающие за счет возбуждения локализованных мод.

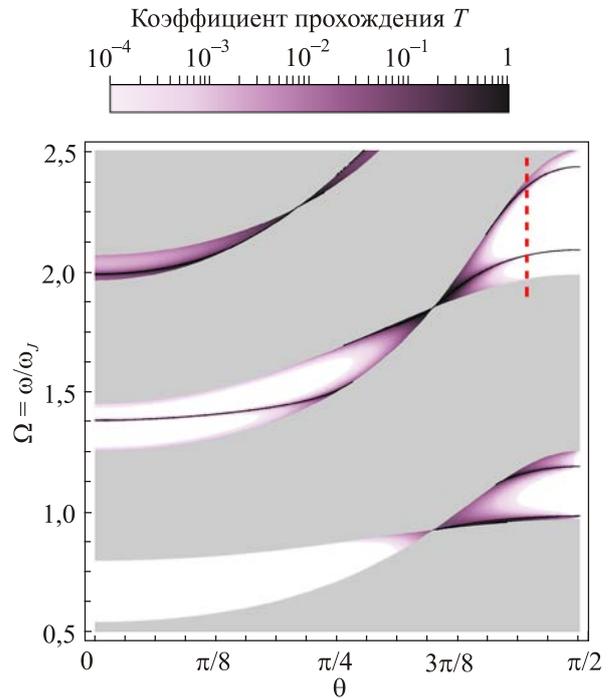


Рис. 2. (Онлайн в цвете) Зависимость коэффициента прохождения  $T$  от угла падения  $\theta$  и частоты  $\Omega=\omega/\omega_J$  в областях, соответствующих запрещенным зонам фотонного кристалла. Разрешенные зоны фотонного кристалла обозначены серой заливкой. Черные линии в запрещенных зонах соответствуют дисперсионным кривым (37). Параметры:  $d_a=7\lambda_c$ ,  $d_b=6\lambda_c$ ,  $d_c=6\lambda_c$ ,  $\varepsilon_a=1$ ,  $\varepsilon_b=3,8$ ,  $\varepsilon_c=16$ .

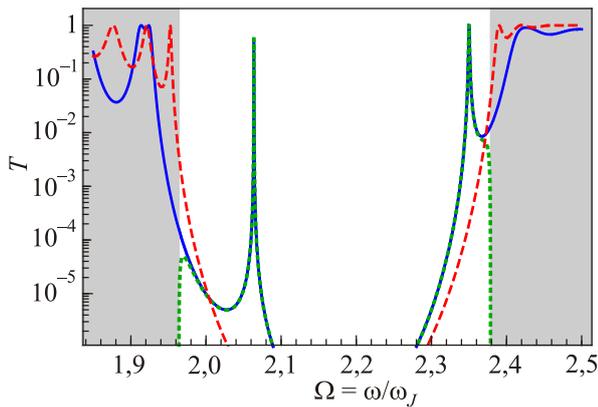


Рис. 3. (Онлайн в цвете) Зависимость коэффициента прохождения  $T$  от частоты  $\Omega = \omega / \omega_J$  для фотонного кристалла с дефектом (сплошная синяя линия (1)) и для фотонного кристалла без дефекта (штриховая красная линия (2)). Зеленой пунктирной линией (3) изображена эта зависимость согласно уравнению (45а). Серой заливкой обозначены разрешенные зоны фотонного кристалла. Угол падения  $\theta = 1,4$ , остальные параметры те же, что и на рис. 2.

## 5. ВЫВОДЫ

В настоящей работе изучено прохождение терагерцевой электромагнитной волны ТМ-поляризации через фотонный кристалл конечной толщины, содержащий дефект в виде пластины слоистого сверхпроводника, сверхпроводящие слои которого ортогональны слоям фотонного кристалла. С помощью метода трансфер-матриц получены дисперсионные соотношения для локализованных на дефекте собственных мод, а также найдены аналитические выражения для коэффициента прохождения волны. Показано, что в случае, когда частота и угол падения волны отвечают дисперсионным соотношениям для собственных волн, падающая волна возбуждает локализованные на дефекте моды, что приводит к резонансному усилению коэффициента прохождения. Для параметров, близких к резонансным, получено упрощенное аналитическое выражение для коэффициента прохождения и проведено численное моделирование.

1. S. Savel'ev, V.A. Yampol'skii, A.L. Rakhmanov, and F. Nori, *Rep. Prog. Phys.* **73**, 026501 (2010).
2. X. Hu and S.-Z. Lin, *Supercond. Sci. Technol.* **23**, 053001 (2010).
3. R. Kleiner, F. Steinmeyer, G. Kunkel, and P. Müller, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 2394 (1992).
4. R. Kleiner and P. Müller, *Phys. Rev.* **49**, 1327 (1994).
5. L.N. Bulaevskii, M.P. Maley, and M. Tachiki, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 801 (1995).
6. C.C. Homes, T. Timusk, R. Liang, D.A. Bonn, and W.N. Hardy, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 1645 (1993).

7. Y. Matsuda, M.B. Gaifullin, K. Kumagai, K. Kadowaki, T. Mochiku, and K. Hirata, *Phys. Rev. B* **55**, R8685 (1997).
8. K. Kadowaki, I. Kakea, M.B. Gaifullin, T. Mochiku, S. Takahashi, T. Koyama, and M. Tachiki, *Phys. Rev. B* **56**, 5617 (1997).
9. I. Iguchi, K. Lee, and E. Kume, *Phys. Rev. B* **61**, 689 (2000).
10. H.B. Wang, P.H. Wu, and T. Yamashita, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 17002 (2001).
11. N. Kameda, M. Tokunaga, T. Tamegai, M. Konczykowski, and S. Okayasu, *Phys. Rev. B* **69**, 180502(R) (2004).
12. V.A. Golick, D.V. Kadygrob, V.A. Yampol'skii, A.L. Rakhmanov, B.A. Ivanov, and F. Nori, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 187003 (2010).
13. S. Savel'ev, V. Yampol'skii, and F. Nori, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 187002 (2005).
14. V.A. Yampol'skii, D.R. Gulevich, S. Savel'ev, and F. Nori, *Phys. Rev. B* **78**, 054502 (2008).
15. T.M. Slipchenko, D.V. Kadygrob, D. Bogdanis, V.A. Yampol'skii, and A.A. Krokhin, *Phys. Rev. B* **84**, 224512 (2011).
16. С.С. Апостолов, В.И. Гавриленко, З.А. Майзелис, В.А. Ямпольский, *ФНТ* **43**, 360 (2017) [*Low Temp. Phys.* **43**, 296 (2017)].
17. A.L. Rakhmanov, V.A. Yampol'skii, J.A. Fan, F. Capasso, and F. Nori, *Phys. Rev. B* **81**, 075101 (2010).

## Resonant transparency of a photonic crystal with a defect of layered superconductor

S.S. Apostolov, N.M. Makarov, and V.A. Yampolskii

The transmission of a terahertz electromagnetic wave of the transverse magnetic polarization through a 1D photonic crystal of finite thickness containing a defect is theoretically studied. The defect is a plate of the layered superconductor with the superconducting layers orthogonal to the layers of the photonic crystal. An analytical expression for the transmission coefficient is derived. We show that the transparency in the band gap of the photonic crystal can be significantly enhanced due to the resonant excitation of the eigenmodes localized near the defect.

PACS: **74.72.-h** Cuprate superconductors;  
**78.67.Pt** Multilayers; superlattices; photonic structures; metamaterials;  
**42.70.Qs** Photonic bandgap materials;  
**78.67.-n** Optical properties of low-dimensional, mesoscopic, and nanoscale materials and structures.

Keywords: photonic crystal, layered superconductor, metamaterials, optical properties.