

---

doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.11.010>

УДК 531.36

**Р.В. Муллажонов, Ш.Н. Абдугаппарова, Ж.В. Мирзаахмедова**

Андижанский государственный университет им. З.М. Бабура, Узбекистан

E-mail: mat-fak@rambler.ru

## **Устойчивость некоторых стационарных нелинейных крупномасштабных систем**

*Представлено академиком НАН Украины А.А. Мартынюком*

*Для системы линейных уравнений и соответствующей параметрически возмущенной скалярной функцией нелинейной системы установлены условия одностороннего свойства нулевого решения.*

**Ключевые слова:** *система линейных уравнений, возмущение скалярной функцией, устойчивость, неустойчивость.*

Анализ устойчивости движения нелинейных крупномасштабных систем при структурных и сингулярных возмущениях приведен в монографии [1]. Стационарные системы с нелинейными структурными возмущениями исследованы не достаточно полно. Поэтому представляет интерес задача об устойчивости такого рода систем.

Целью этой работы является получение условий устойчивости стационарных систем с нелинейными структурными возмущениями с учетом ранее полученных результатов [2, 3].

Покажем, что имеет место, следующее утверждение.

**Теорема 1.** *Состояние равновесия  $x = 0$  системы*

$$x = Ax \tag{1}$$

*и системы*

$$x = A\varphi(x)x, \tag{2}$$

*где  $x \in R^n$ ,  $A$  —  $n \times n$  постоянная матрица, одновременно будет устойчивым (асимптотически устойчивым) или неустойчивым соответственно при любой скалярной строго положительной функции  $\varphi(x): R^n \rightarrow R$ .*

**Доказательство.** Пусть для системы (1) построена функция Ляпунова

$$v(x) = x^T Px, \tag{3}$$

где  $x \in R^n$ , и  $P$  —  $n \times n$  положительно определенная, симметрическая относительно главной диагонали матрица. Тогда имеем

© Р.В. Муллажонов, Ш.Н. Абдугаппарова, Ж.В. Мирзаахмедова, 2017

$$v(x(t))|_{(1)} = x^T (A^T P + PA)x,$$

$$v(x(t))|_{(2)} = x^T (A^T \varphi(x)P + P\varphi(x)A)x = x^T (A^T P + PA)x\varphi(x) = v(x(t))|_{(1)} \varphi(x).$$

Так как функция  $\varphi(x)$  — строго положительная, то функции  $v(x(t))|_{(1)}$  и  $v(x(t))|_{(2)}$  имеют одинаковый знак. Откуда следует справедливость утверждений теоремы 1.

Далее рассмотрим нелинейные системы уравнений возмущенного движения

$$x = f(x), \tag{4}$$

где  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in R^n$ ,  $f(x): R^n \rightarrow R^n$ ,  $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))^T$ ,  $f(0) = 0$ .

Предположим, что  $f_j(x) = \sum_{l=1}^n f_{jl}(x)x_l$ ,  $j = \overline{1, n}$ . При этом систему (4) можно представить в следующем виде:

$$x = A(x)x, \tag{5}$$

где  $A(x) = (f_{jl}(x))$ ,  $j, l = \overline{1, n}$ .

Для функции  $(f_{jl}(x))$ ,  $j, l = \overline{1, n}$ , существуют линейно независимые строго положительные скалярные функции [3]

$$\varphi_0(x) = c, \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)$$

с порядком строгости  $\varepsilon_i > 0$ ,  $i = \overline{1, m}$ , соответственно, такие, что

$$f_{jl}(x) = \sum_{i=1}^m \alpha_{jl}^i \varphi_i(x), \quad j, l = \overline{1, n},$$

где  $\alpha_{jl}^i$  — некоторые постоянные.

Учитывая это, систему (4) представим в виде

$$x = \left( \sum_{i=0}^m A_i \varphi_i(x) \right) x, \tag{6}$$

где  $A_i = (\alpha_{jl}^i)$ ,  $j, l = \overline{1, n}$ ,  $i = \overline{1, m}$ .

Для исследования устойчивости состояния равновесия  $x = 0$  системы (6) вместе с этой системой рассмотрим следующие системы

$$x = A_i x, \quad i = 1, 2, 3, \dots, m. \tag{7}$$

**Лемма 1.** Если матрицы  $A_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , невырожденные, симметричные относительно главной диагонали и для каждого  $i (i \leq 1 \leq m)$   $A_i$  и  $-A_i$  не имеют общих собственных значений, то для каждой матрицы  $A_i$  существует матрица  $G_{i0} = G_{i0}^T \in R^{n \times n}$  такая, что матрица

$$P = A_i^{-1} G_{i0} + G_{i0}^T A_i^{-1}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \tag{8}$$

удовлетворяет уравнениям

$$A_i^T P + PA_i = G_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \tag{9}$$

где

$$G_i = G_{i0} + G_{i0}^T + A_i^{-1} G_{i0} A_i + (A_i^{-1} G_{i0} A_i)^T, \quad i = 1, 2, \dots, m. \tag{10}$$

**Доказательство.** Если  $G_{i0} = G_{i0}^T$ , то соотношения (8) равносильны следующим матричным уравнениям относительно матриц  $G_{i0}$

$$A_i^{-1}G_{i0} + G_{i0}A_i^{-1} = P, \quad 1 \leq i \leq m. \quad (11)$$

Уравнения (11) имеют единственное решение, так как из-за невырожденности матриц  $A_i$  для каждого  $1 \leq i \leq m$  матрицы  $A_i^{-1}$  и  $-A_i^{-1}$  не имеют общих собственных значений.

Учитывая, что  $A_i = A_i^T$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , имеем

$$\begin{aligned} A_i^T P + P A_i &= A_i (A_i^{-1} G_{i0} + G_{i0}^T A_i^{-1}) + (A_i^{-1} G_{i0} + G_{i0}^T A_i^{-1}) A_i = G_{i0} + A_i G_{i0}^T A_i^{-1} + A_i^{-1} G_{i0} A_i + G_{i0}^T = \\ &= G_{i0} + G_{i0}^T + A_i^{-1} G_{i0} A_i + (A_i^{-1} G_{i0} A_i)^T = G_i. \end{aligned}$$

Если выполняются все условия леммы 1 и

$$G_{i0} = A_i H, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (12)$$

где  $H \in R^{n \times n}$  — положительно определенная матрица, то матрица  $P = H + H^T$  удовлетворяет уравнениям (9).

Действительно, учитывая, что  $A_i^T = A_i$ , из (8) получим

$$P = A_i^{-1} (A_i H) + (A_i H)^T A_i^{-1} = A_i^{-1} A_i H + H^T A_i A_i^{-1} = H + H^T.$$

**Теорема 2.** Пусть в системах (6) и (7) матрицы  $A_i$  и функции  $\varphi_i(x)$  удовлетворяют условиям:

а) матрицы  $A_i \in R^{n \times n}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , невырожденные, симметричные относительно главной диагонали и для каждого  $1 \leq i \leq m$   $A_i$  и  $-A_i$  не имеют общих собственных значений;

б)  $\varphi_i(x)$  — строго положительные скалярные функции с порядком строгости  $\varepsilon_i > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , соответственно.

Тогда из устойчивости (асимптотической устойчивости) или неустойчивости состояния равновесия  $x = 0$  всех систем (7) следует устойчивость (асимптотическая устойчивость) или неустойчивость состояния равновесия  $x = 0$  системы (6) соответственно.

**Доказательство.** На основе условия а теоремы 2 и леммы 1 для систем (7) существует функция Ляпунова

$$v(x) = x^T P x, \quad (13)$$

где матрица  $P$  положительно определенная, симметричная относительно главной диагонали и имеет вид (8).

Для полной производной функции (13) в силу  $i$ -й системы совокупности систем (7) имеем

$$\dot{v}(x(t))|_{(7)} = x^T A_i^T P + P A_i x = x^T G_i x, \quad 1 \leq i \leq m.$$

Отсюда следует, что

$$\lambda_m(G_i) \|x\|^2 \leq (v(x(t))|_{(7)}) \leq \lambda_M(G_i) \|x\|^2, \quad (14)$$

где  $\dot{v}(x(t))|_{(7)}$  означает, что производная вычисляется в силу  $i$ -й системы совокупности систем (7),  $G_i$  имеют вид (10),  $\lambda_m(G_i)$  и  $\lambda_M(G_i)$  — минимальные и максимальные собственные значения матриц  $G_i$  соответственно.

В качестве функции Ляпунова для системы (6) возьмем функцию (13). Ее полная производная в силу системы (6) имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{v}(x(t))|_{(6)} &= x^T \left[ \left( \sum_{i=1}^m A_i \phi_i(x) \right)^T P + P \left( \sum_{i=1}^m A_i \phi_i(x) \right) \right] x = x^T \left[ \sum_{i=1}^m \phi_i(x) (A_i^T P + P A_i) \right] x = \\ &= \sum_{i=1}^m \phi_i(x) [x^T (A_i^T P + P A_i) x] = \sum_{i=1}^m \phi_i(x) x^T G_i x = \sum_{i=1}^m \phi_i(x) \dot{v}(x(t))|_{(7)}. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить справедливость следующих неравенств:

$$\left[ \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \lambda_m(G_i) \right] \|x\|^2 \leq \dot{v}(x)|_{(6)} \leq \left[ \sum_{i=1}^n \max_{x \in R^n} \phi_i(x) \lambda_M(G_i) \right] \|x\|^2, \quad (15)$$

если  $\lambda_m(G_i) > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ;

$$\left[ \sum_{i=1}^n \max_{x \in R^n} \phi_i(x) \lambda_m(G_i) \right] \|x\|^2 \leq \dot{v}(x)|_{(6)} \leq \left[ \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \lambda_M(G_i) \right] \|x\|^2, \quad (16)$$

если  $\lambda_m(G_i) \leq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ .

Из неравенств (14)–(16) и условия  $\varepsilon_i > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , следует справедливость утверждений теоремы 2.

**Пример.** Рассмотрим систему четвертого порядка, которая описывается уравнениями

$$\begin{aligned} x_1 &= (2 - 6e^{x^2} - x^2 - 2\sin^2 \|x\|)x_1 + (x^2 + 2\sin^2 \|x\| + 1)x_2 + x_3 + (3e^{x^2} - 2)x_4, \\ x_2 &= (x^2 + 2\sin^2 \|x\| + 1)x_1 + (2 - 9e^{x^2} - 2x^2 - 4\sin^2 \|x\|)x_2 + (3e^{x^2} - 2)x_3 + x_4, \\ x_3 &= x_1 + (3e^{x^2} - 2)x_2 + (1 - 6e^{x^2} - x^2 - 2\sin^2 \|x\|)x_3 + (3e^{x^2} + x^2 + 2\sin^2 \|x\| - 1)x_4, \\ x_4 &= (3e^{x^2} - 2)x_1 + x_2 + (3e^{x^2} + x^2 + 2\sin^2 \|x\| - 1)x_3 + (1 - 6e^{x^2} - 2x^2 - 4\sin^2 \|x\|)x_4, \end{aligned} \quad (17)$$

где  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ ,  $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}$ .

В системе (17) выполняются условия  $f_i(x) = \sum_{j=1}^4 f_{ij}(x)x_j$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , поэтому ее можно представить в виде (5), т. е.

$$x = A(x)x \quad (18)$$

где

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T,$$

$$A = \begin{pmatrix} 2-6e^{x^2} - x^2 - 2\sin^2\|x\| & x^2 + 2\sin^2\|x\| + 1 & 1 & 3e^{x^2} - 2 \\ x^2 + 2\sin^2\|x\| + 1 & 2-9e^{x^2} - 2x^2 - 4\sin^2\|x\| & 3e^{x^2} - 2 & 1 \\ 1 & 3e^{x^2} - 2 & 1-6e^{x^2} - x^2 - 2\sin^2\|x\| & 3e^{x^2} + x^2 + 2\sin^2\|x\| - 1 \\ 3e^{x^2} - 2 & 1 & 3e^{x^2} + x^2 + 2\sin^2\|x\| - 1 & 1-6e^{x^2} - 2x^2 - 4\sin^2\|x\| \end{pmatrix}.$$

Обозначим,  $\varphi_1(x) = 3e^{x^2} - 2$  и  $\varphi_2(x) = x^2 + 2\sin^2\|x\| + 1$ . Нетрудно проверить, что функции  $\varphi_1(x)$  и  $\varphi_2(x)$  строго положительные. Тогда система (18) представляется в виде

$$x = A_0x + \varphi_1(x)A_1x + \varphi_2(x)A_2x, \tag{19}$$

где  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ ,

$$A_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Для исследования устойчивости состояния равновесия  $x = 0$  системы (19) вместе с этой системой рассмотрим следующие системы:

$$x = A_0x, \tag{20}$$

$$x = A_1x, \tag{21}$$

$$x = A_2x, \tag{22}$$

Характеристические уравнения матриц  $A_0$  и  $A_2$  имеют вид  $(\lambda^2 + 3\lambda + 1)^2 = 0$  и  $\lambda_1 = \lambda_2 = -1,5 + \frac{\sqrt{5}}{2} \approx -0,382 < 0$ ,  $\lambda_3 = \lambda_4 = -1,5 - \frac{\sqrt{5}}{2} \approx -2,618 < 0$ , а характеристическое уравнение матрицы  $A_1$  имеет вид  $\lambda^4 + 9\lambda^3 + 27\lambda^2 + 30\lambda + 9 = 0$  и  $\lambda_1 = -3 < 0$ ,  $\lambda_2 \approx -3,532 < 0$ ,  $\lambda_3 \approx -1,647 < 0$ ,  $\lambda_4 \approx -0,468 < 0$ .

Итак, состояние равновесия систем (20)–(22) асимптотически устойчиво, поэтому на основе теоремы 2 состояние равновесия  $x = 0$  системы (19), а также (17) асимптотически устойчиво.

**Следствие А.** Если состояние равновесия  $x = 0$  хотя бы одной системы из совокупности систем (7) асимптотически устойчиво, и состояние равновесия  $x = 0$  остальных систем устойчиво, то состояние равновесия системы (6) асимптотически устойчиво.

**Следствие В.** Пусть выполняются все условия теоремы 2. Тогда состояние равновесия  $x = 0$  системы (6)

$$a) \text{ устойчиво, если } \sum_{i=1}^m \varepsilon_i \lambda_M(G_i) \leq 0;$$

б) асимптотически устойчиво, если  $\sum_{i=1}^m \varepsilon_i \lambda_M(G_i) < 0$ ;

в) неустойчиво, если  $\sum_{i=1}^m \varepsilon_i \lambda_M(G_i) > 0$ .

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Martynytuk A.A., Miladzhanov V.G. Stability Analysis of Nonlinear Systems under Structural Perturbations. Cambridge: Cambridge Sci. Publ., 2014. 253 p.
2. Миладжанов В.Г., Муллажонов Р.В. Анализ устойчивости динамической системы на основе матриц – функций Ляпунова. Ош. Конф. 2005. 56 с.
3. Миладжанов В.Г., Муллажонов Р.В. Об одном методе анализа устойчивости линейных крупномасштабных систем. *Проблемы механики*. 2009. № 2–3. С.112–120.
4. Мартынюк А.А., Муллажонов Р.В. К теории устойчивости стационарных линейных крупномасштабных систем. *Прикл. механика*. 2012. 48, № 1. С. 121–132.
5. Мартынюк А.А., Муллажонов Р.В. Об одном методе исследования устойчивости нелинейных крупномасштабных систем. *Прикл. механика*. 2010. 46, № 5. С 125–134.

Поступило в редакцию 18.05.2017

#### REFERENCES

1. Martynytuk, A. A. & Miladzhanov, V. G. (2014). Stability Analysis of Nonlinear Systems under Structural Perturbations. Cambridge: Cambridge Sci. Publ.
2. Miladzhanov, V. G. & Mullajonov, R. V. (2005). Analysis of the stability of a dynamical system on the basis of Liapunov matrix-valued functions. Osh. Conference. P. 56 (in Russian).
3. Miladzhanov, V. G. & Mullajonov, R. V. (2009). On one method of analyzing the stability of linear large-scale systems. Problems Mechanics. No. 2-3, pp. 112-120 (in Russian).
4. Martynytuk, A. A. & Mullajonov, R. V. (2012). On the theory of stability of stationary linear large-scale systems. Appl. Mechanics. 48, No. 1, pp. 121-132 (in Russian).
5. Martynytuk, A. A. & Mullajonov, R. V. (2010). On a method for investigating the stability of nonlinear large-scale systems. Appl. Mechanics. 46, No. 5, pp. 125-134 (in Russian).

Received 18.05.2017

*Р.В. Муллажонов, Ш.Н. Абдугаппарова, Ж.В. Мирзаахмедова*

Андижанский державный университет им. З.М. Бабура, Узбекистан

E-mail: mat-fak@rambler.ru

#### СТІЙКІСТЬ ДЕЯКИХ СТАЦІОНАРНИХ НЕЛІНІЙНИХ ВЕЛИКОМАСШТАБНИХ СИСТЕМ

Для системи лінійних рівнянь і відповідної параметрично збуреної скалярною функцією нелінійної системи встановлено умови однотипної властивості нульового розв'язку.

**Ключові слова:** система лінійних рівнянь, збурення скалярною функцією, стійкість, нестійкість.

*R.V. Mullajonov, Sh.N. Abdugapparova, Zh.V. Mirzaakhmedova*

Z.M. Babur Andizhan State University, Uzbekistan

E-mail: mat-fak@rambler.ru

#### STABILITY OF SOME STATIONARY NONLINEAR LARGE-SCALE SYSTEMS

For a system of linear equations and the corresponding nonlinear system parametrically perturbed by a scalar function, the conditions of the single-type property of the zero solution are established.

**Keywords:** system of linear equations, perturbation by a scalar function, stability, instability.