

Вихревая структура магнитных солитонов

А.С. Ковалев

*Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины
пр. Науки, 47, г. Харьков, 61103, Украина*

*Харьковский национальный университет им В.Н. Каразина МОНУ
пл. Свободы, 4, г. Харьков, 61022, Украина
E-mail: kovalev@ilt.kharkov.ua*

Статья поступила в редакцию 17 ноября 2016 г., опубликована онлайн 26 декабря 2016 г.

В рамках классической модели рассмотрены солитонные возбуждения общего вида в двумерном легкоплоскостном ферромагнетике. Получены уравнения и найдены их решения для малоамплитудных двухпараметрических динамических солитонов. Продемонстрировано, что они имеют вихревую структуру и с ростом амплитуды возбуждения превращаются в связанные квадрупольные вихревые состояния, характеризующиеся двумя динамическими параметрами: скоростью солитона и частотой его внутренней прецессии. Проанализированы предельные переходы вихревых солитонов общего вида в вихревые диполи, магнитные лампы и магнетонные капли. Проведено сравнение полученных результатов с данными о солитонах в соответствующих одномерных магнитных системах.

В межах класичної моделі розглянуто солітонні збудження у двовимірному легкоплоскітному ферромагнетіку. Отримано рівняння і знайдено розв'язки для малоамплітудних двопараметричних динамічних солітонів. Продемонстровано, що вони мають вихорову структуру і зі зростанням амплітуди збудження перетворюються у зв'язані квадрупольні вихорові стани, які характеризуються двома динамічними параметрами: швидкістю солітону та частотою його внутрішньої прецесії. Проаналізовано граничні переходи вихрових солітонів загального типу в вихорові диполі, магнітні лампи та магнетонні краплини. Проведено порівняння отриманих результатів з даними щодо солітонів у відповідних одновимірних магнітних системах.

PACS: **75.10 – b** Общая теория и модели магнитного упорядочения;
75.30.Gw Магнитная анизотропия;
75.60.Ej Кривые намагниченности, гистерезис, эффект Баркгаузена и связанные с ним.

Ключевые слова: слабодиспергирующие среды, легкоплоскостной ферромагнетик, динамические солитоны, волны поворота намагниченности, либовские состояния, магнитный вихрь, вихревой диполь, вихревой квадруполь.

1. Введение

Нелинейная динамика магнетиков активно исследуется в последнее время как теоретически, так и экспериментально. В теоретическом плане она является частью более общей области исследования нелинейных явлений в физике и математике. В современной физике магнетизма одним из наиболее интересных объектов изучения являются магнитные солитоны разного типа, т.е. пространственно локализованные возбуждения нелинейных сред, в частности, динамические и топологические [1–5]. Последние представлены, например, доменными границами, вихрями в легкоплоскостных [6,7] и скирмионами

[1,2,8–10] в легкоосных ферромагнетиках. Динамические солитоны достаточно хорошо изучены в одномерных системах, поскольку некоторые из этих систем являются полностью интегрируемыми. Такие солитоны могут рассматриваться как связанные состояния большого числа элементарных возбуждений (в случае магнетиков — «магнетонные капли»). В некоторых случаях существует связь между ними (солитонами огибающей с двумя динамическими параметрами — скоростью перемещения и частотой внутренней прецессии) и однопараметрическими солитонами (как топологическими — «кинками», так и нетопологическими «либовскими состояниями»). Интересно рассмотреть трансформацию солитонных

возбуждений при переходе к многомерным системам, поскольку, как будет показано ниже, в некоторых случаях такой переход нетривиален. В случае ферромагнетиков с анизотропией типа «ось легкого намагничивания» многомерные динамические солитоны рассматривались ранее в [8,11,12]. В настоящей статье теоретически исследованы динамические солитоны в двумерных ферромагнетиках с анизотропией типа «плоскость легкого намагничивания». Эти два случая существенно различаются, поскольку из-за непрерывного вырождения основного состояния в легкоплоскостном ферромагнетике он представляет собой слабодиспергирующую среду со звуковым спектром и либовскими состояниями. В статье проведено сопоставление нелинейных возбуждений двумерной среды с соответствующими аналогами в одномерных магнетиках и прослежена возможность связи солитонной динамики с вихрединамикой в магнетиках и других конденсированных средах.

2. Модель и основные уравнения

Рассмотрим ферромагнетик с магнитной одноионной анизотропией типа изотропная плоскость легкого намагничивания в рамках классического подхода. Плотность энергии в этом случае имеет вид [1,2]

$$\varepsilon = \frac{\alpha}{2}(\nabla\mathbf{M})^2 + \frac{\beta}{2}(\mathbf{Mn}_z)^2, \quad (1)$$

где \mathbf{M} — магнитный момент, α — константа обменного взаимодействия и β — одноионной анизотропии ($\beta > 0$), а единичный вектор \mathbf{n}_z направлен перпендикулярно «легкой» плоскости (XY) вдоль оси Z . (Ниже мы ограничимся двумерным случаем). В качестве уравнений динамики вектора намагничивания \mathbf{M} воспользуемся уравнением Ландау–Лифшица (УЛЛ) без затухания [13]:

$$\frac{\partial\mathbf{M}}{\partial\tau} = \frac{2\mu_0}{\hbar} \left[\mathbf{M}, \frac{\delta\varepsilon}{\delta\mathbf{M}} \right], \quad (2)$$

где μ_0 — магнетон Бора. Поскольку длина вектора намагниченности \mathbf{M} сохраняется и равна $|\mathbf{M}| = M_0$, то в качестве переменных удобно выбрать нормированную Z -компоненту вектора намагничивания $m = M_z/M_0$ и азимутальный угол его поворота в плоскости (XY): $\varphi = \arctg(M_y/M_x)$. В легкоплоскостном ферромагнетике основному состоянию отвечает значение $m = 0$. При этом азимутальный угол произволен, и основное состояние непрерывно вырождено в плоскости (XY). Переменные (φ, m) играют роль канонически сопряженных величин для гамильтониана (1). Действительно, если ввести плотность гамильтониана $h = \varepsilon/\beta M_0^2$, безразмерные координаты $x = X/l_0$, $y = Y/l_0$ и время $t = \omega_0\tau$ с характерными параметрами $l_0 = \sqrt{\alpha/\beta}$ (магнитная длина) и $\omega_0 = 2\beta\mu_0 M_0/\hbar$, то УЛЛ сводится к гамильтоновым уравнениям $\dot{\varphi} = \partial h/\partial m$ и $\dot{m} = -\partial h/\partial\varphi$ вида

$$\dot{m} = \Delta\varphi - \nabla(m^2\nabla\varphi), \quad (3)$$

$$\dot{\varphi} = m - \frac{\Delta m}{(1-m^2)} - \frac{m(\nabla m)^2}{(1-m^2)^2} - m(\nabla\varphi)^2 \quad (4)$$

для плотности гамильтониана h :

$$h = \frac{1}{2} \frac{(\nabla m)^2}{(1-m^2)} + \frac{1}{2}(1-m^2)(\nabla\varphi)^2 + \frac{1}{2}m^2. \quad (5)$$

Уравнения (3), (4) имеют вид гидродинамических уравнений для потенциала скорости φ и плотности жидкости, связанной со скалярным полем m . Этим объясняется близость некоторых полученных ниже результатов с известными из гидродинамики. Легко проверить, что уравнения (3), (4) являются эйлеровыми для плотности лагранжиана $l = m\dot{\varphi} - h$. Поэтому легко находятся интегралы движения системы. Из уравнения (3) видно, что кроме сохраняющейся полной энергии

$$E = \int h \, dx \, dy \quad (6)$$

в системе сохраняется также полная z -компонента намагниченности

$$N = \int m \, dx \, dy, \quad (7)$$

играющая роль числа спиновых отклонений или магнонов. Из однородности и изотропии пространства в плоскости (XY) следует также сохранение X - и Y -компонент полного полевого импульса, а также Z -компоненты углового момента:

$$\mathbf{P} = -\int (\partial l/\partial\dot{\varphi}) \nabla\varphi \, dx \, dy = -\int m \nabla\varphi \, dx \, dy, \quad (8)$$

$$K = K_z = -\int (\partial l/\partial\dot{\varphi}) [\mathbf{r}, \nabla\varphi]_z = -\int m(x\partial\varphi/\partial y - y\partial\varphi/\partial x) \, dx \, dy. \quad (9)$$

В одномерном случае система уравнений (1), (2) является полностью интегрируемой, и, кроме величин N , P и E , она обладает бесконечным числом дополнительных интегралов движения. В двумерном случае остаются лишь пять интегральных инварианта: N , P_x , P_y , K_z и E , но их наличие позволяет продвинуться в исследовании частных решений двумерных уравнений динамики.

3. Одномерная динамика легкоплоскостного ферромагнетика

Простейшими возбуждениями легкоплоскостного ферромагнетика являются линейные спиновые волны (магноны). Линеаризация уравнений (3), (4) по малым отклонениям $m = m_0 \cos(kx - \omega t) \ll 1$ и $\varphi = \varphi_0 \sin(kx - \omega t) \ll 1$ от основного состояния с произ-

вольным направлением намагниченности в легкой плоскости дает боголюбровский закон дисперсии магнонов:

$$\omega_{SW} = k\sqrt{1+k^2}. \quad (10)$$

Выражение (10) соответствует одной из четырех ветвей спиновых волн с $k > 0$ и $\omega_{SW} > 0$. Поскольку в спиновой волне $m_0/\varphi_0 = k/\sqrt{1+k^2}$, то в длинноволновом пределе малых значений волнового вектора ($k \ll 1$) вращение магнитного момента происходит практически в легкой плоскости. Спектр имеет звуковой характер, и при малых волновых векторах скорость звука $S = \omega_0/l_0$ в использованной нормировке координат и времени равна единице. Для сравнения параметров линейных волн с параметрами солитонов удобно переписать закон дисперсии (10) в виде зависимости частоты волны $\tilde{\omega}_{SW} = \omega_{SW} - kV_{SW}$ в системе координат, движущейся с групповой скоростью $V_{SW} = d\omega_{SW}/dk$, от этой скорости, которую можно записать в неявном виде:

$$\tilde{\omega}_{SW} = -k^3/\sqrt{1+k^2}, \quad V_{SW} = (1+2k^2)/\sqrt{1+k^2}. \quad (11)$$

На рис. 1 эта зависимость изображена в виде линии *A*. В длинноволновом пределе $\tilde{\omega}_{SW} \approx -(2/3)^{3/2}(V_{SW}-1)^{3/2}$, а при больших волновых векторах $\tilde{\omega}_{SW} \approx -V_{SW}^2/4$.

В одномерном случае система уравнений (3), (4) является полностью интегрируемой и допускает частные решения в виде динамических двухпараметрических

солитонов (далее — солитонов), характеризуемых его скоростью перемещения V и частотой внутренней прецессии намагниченности в нем $\tilde{\omega}$ в движущейся с солитоном системе координат [1,2,14–16]. На плоскости параметров $(V, \tilde{\omega})$ солитонам отвечает заштрихованная область на рис. 1. Она ограничена линией *A*, соответствующей спиновым волнам, и отрезком *C* оси скоростей $V < S = 1$. Последний отвечает частным солитонным решениям, так называемым «волнам поворота намагниченности» (ВПН) [17], представляющим собой в данном случае аналог «либовских состояний» [18] в слабонеидеальном бозе-газе с отталкиванием бозонов. (Заметим, что в малоамплитудном пределе легкоплоскостной ферромагнетик можно трактовать как систему магнонов со слабым межчастичным отталкиванием.) Решения для ВПН (двух) выглядят особо просто:

$$m = \frac{\pm\sqrt{1-V^2}}{\text{ch}\left[\sqrt{1-V^2}(x-Vt)\right]},$$

$$\varphi = \mp \text{arctg}\left[\text{sh}\frac{\sqrt{1-V^2}(x-Vt)}{V}\right]. \quad (12)$$

Компоненты намагниченности в легкой плоскости равны

$$m_x = V \text{sech}\left[\sqrt{1-V^2}(x-Vt)\right],$$

$$m_y = \mp \text{th}\left[\sqrt{1-V^2}(x-Vt)\right].$$

Полная *Z*-компонента (7) намагниченности в двух солитонах равна соответственно $N = \pm\pi$. Знак этого интеграла движения характеризует «поляризацию» ВПН $p = N/\pi = \pm 1$. Она не является топологической характеристикой, поскольку решение для ВПН «соединяет» топологически эквивалентные состояния при $x = \pm\infty$. Разворот намагниченности в ВПН происходит на величину $\delta\varphi = \mp\pi$ в плоскостях, образующих углы $\pm\arccos V$ с легкой плоскостью. В пределе $V \rightarrow 1$ решение переходит в однородное основное состояние (но с $N = \pm\pi$ и $p = 0$), а при $V = 0$ (точка $V = \tilde{\omega} = 0$ на рис. 1) солитонные решения принимают вид $m = \pm\text{sech } x$, $m_y = \mp\text{th } x$. Основные характеристики ВПН

$$E = 2\sqrt{1-V^2}, \quad P = 2\arccos V, \quad E = 2\sin(P/2) \quad (13)$$

связаны соотношением $dE/dP = V$, что позволяет трактовать ВПН в качестве квазичастицы с ньютоновской динамикой.

ВПН, как частный вид солитона, играет важную роль в динамике легкоплоскостного ферромагнетика. Солитон общего вида представляет собой связанное состояние двух ВПН разного знака. К сожалению, даже при самом «удобном» выборе полевых перемен-

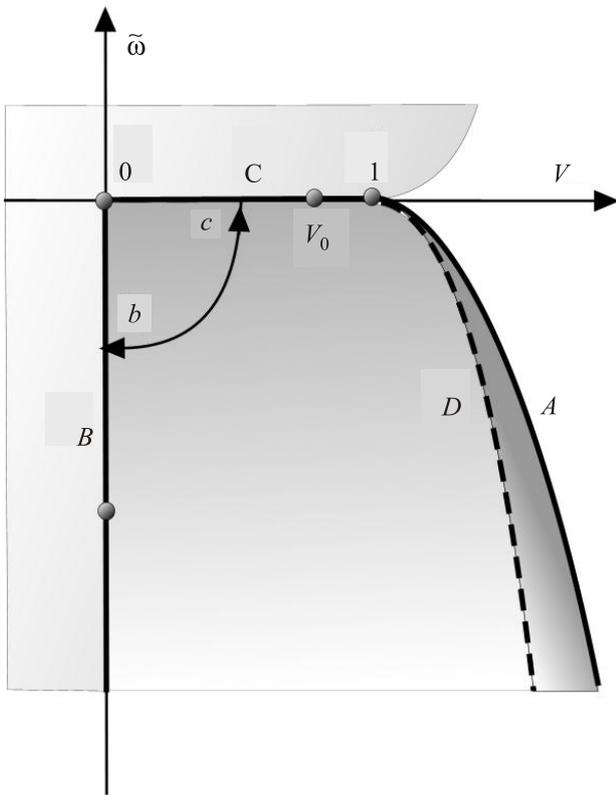


Рис. 1. Область параметров существования динамических солитонов различного типа в легкоплоскостном ферромагнетике.

ных $\psi = \arcsin u$, $\chi = m/u$, $u = \sqrt{\sin^2 \varphi + m^2 \cos^2 \varphi}$ и динамических параметров $V = \text{ch} 2\alpha \cos \lambda / \text{ch} \alpha$, $\omega = \text{sh} 2\alpha \cos 2\lambda / 2$, решение для него выглядит достаточно громоздко [2]:

$$\text{tg} \frac{\Psi}{2} e^{i\chi} = -\frac{\sin \lambda \cos(kx - \omega t - i\alpha)}{\text{sh} \alpha \text{ch}(\kappa(x - Vt) - i\lambda)}, \quad (14)$$

где $k = \text{sh} \alpha \cos \lambda$ и $\kappa = \text{ch} \alpha \sin \lambda$. В наиболее простом случае неподвижного солитона с $V = 0$ (линия B на рис. 1) решение для него имеет следующий вид:

$$m = \frac{2\omega \cos \omega t \text{sh} \kappa x}{(\kappa^2 - 1) \text{ch}^2 \kappa x + \cos^2 \omega t}, \quad (15)$$

где $\omega = -\kappa \sqrt{\kappa^2 - 1}$. При низких частотах ($\kappa \approx 1$) решение представляет собой связанное состояние двух ВПН разной «поляризации» с $m_2 = -m_1$ и $\varphi_2 = -\varphi_1$, колеблющихся с частотой ω и большой амплитудой $x_0 = \text{Arsh}(\kappa/\omega)/\kappa$:

$$m \approx \text{sech}(x - x_0 \cos \omega t) - \text{sech}(x + x_0 \cos \omega t). \quad (16)$$

В пределе больших частот солитон сильно локализован и имеет профиль $m \approx 2 \cos \omega t \int (\text{sech} \kappa x / \kappa) dx$, т.е. он превращается в особенность, в которой в противофазе колеблются два магнитных момента. При этом длинноволновое рассмотрение теряет смысл.

Важен также малоамплитудный предел солитонного решения с параметрами (ω, V) , близкими к точке $\tilde{\omega} = 0$, $V = 1$ на рис. 1. Здесь важен характер предельного перехода: при $V < 1$ и $\omega \rightarrow 0$ две малоамплитудные связанные ВПН колеблются с нарастающим размахом и превращаются в изолированные ВПН. При фиксированной частоте, но $1 < V < V_{SW}$ и $V \rightarrow V_{SW}$ (линия A на рисунке), к нулю стремится не только Z -компонента намагниченности, но и азимутальный угол стремится к постоянной величине:

$$m \approx 2\kappa \text{sech}[\kappa(x - Vt)] \sin(kx - \omega t),$$

$$\varphi \approx 2\kappa \text{sech}[\kappa(x - Vt)] \cos(kx - \omega t) / \omega \gg m, \quad (17)$$

где $\kappa \approx \sqrt{\omega_{SW}^2 - \omega^2} / \sqrt{3} k$ и $V = V_{SW}$. Видно, что и в этом случае при малых частотах $\varphi \gg m$, и колебания намагниченности происходят вблизи легкой плоскости. В малоамплитудном солитоне видно разделение временных масштабов. Во-первых, имеются «быстрые» колебания с частотой ω и соответствующей пространственной характеристикой k . Хотя для выполнения длинноволнового приближения и использования дифференциальных уравнений мы предполагаем, что $\omega \approx k \ll 1$, но это характеристики «быстрых» переменных. Кроме них в выражениях (17) имеется динамика с «медленными» переменными κt и κx , и параметрами $\kappa V \ll \omega$ и $\kappa \ll k$. Медленные переменные определя-

ются амплитудой решения. (Решение (17) будет получено ниже приближенно в рамках упрощенных уравнений.) С произвольной точностью это решение может быть построено и асимптотическими методами [19,20].

4. Динамика двумерного легкоплоскостного ферромагнетика

4.1. Однопараметрические динамические солитоны.

Перейдем к рассмотрению динамических солитонов в двумерном ферромагнетике. В этом случае в формулах (3)–(5) вместо дифференцирования по одной пространственной координате фигурируют двумерные операторы $\nabla \equiv \nabla_2$ и $\Delta \equiv \Delta_2$. При этом система не является точно интегрируемой, и для изучения солитонных решений необходимо использовать различные приближенные методы. Конечно, двумерные уравнения допускают одномерные решения типа нелинейных плоских волн, локализованных в одном направлении, но нас интересуют возбуждения, пространственно локализованные во всех направлениях с однородным основным состоянием на бесконечности ($m = 0$, $\varphi = \text{const} = 0$). Поскольку в линейном пределе эти решения должны переходить в линейные спиновые волны, то область существования двумерных динамических солитонов также ограничена линией A на рис. 1, и ей соответствует та же заштрихованная часть плоскости $(\tilde{\omega}, V)$, что и рассмотренным выше одномерным солитонам. Начнем с рассмотрения малоамплитудных солитонов, в которых $m \ll 1$, и вектор намагниченности слабо отклоняется от легкой плоскости. На рис. 1 им соответствует область, прилегающая к кривой A , линейных спиновых волн. При этом в уравнениях (3), (4) можно оставить только основные нелинейные слагаемые $\sim m^3$ и упростить систему, приведя ее к виду

$$m \approx \dot{\varphi} + \Delta \dot{\varphi}, \quad (18)$$

$$\ddot{\varphi} - \Delta \dot{\varphi} + \Delta \Delta \varphi + (\nabla \varphi)^2 \Delta \varphi + \dot{\varphi}^2 \Delta \varphi + 4\dot{\varphi} \nabla \varphi \nabla \dot{\varphi} = 0. \quad (19)$$

Рассмотрим вначале солитоны типа волн стационарного профиля, распространяющихся в направлении оси X со скоростями $V < 1$ (линия C на рисунке), являющиеся аналогами одномерных ВПН. Решения являются малоамплитудными при скоростях, близких к звуковой скорости, и в нелинейных слагаемых временные производные можно заменить $\dot{\varphi} \rightarrow -V \varphi_x$. В этом случае $m \approx -V \varphi_x$, и получается замкнутое уравнение для одной полевой переменной φ :

$$(1 - V^2) \varphi_{xx} + \varphi_{yy} - \varphi_{xxx} - 2\varphi_{xxy} - \varphi_{yyy} - 6\varphi_x^2 \varphi_{xx} - \varphi_y^2 \varphi_{xx} - 2\varphi_x^2 \varphi_{yy} - 4\varphi_x \varphi_y \varphi_{xy} = 0. \quad (20)$$

В случае плоской волны $\varphi = \varphi(x - Vt)$, не зависящей от второй координаты y , уравнение (19) сводится к

стационарной редукции модифицированного уравнения Буссинеска [21]:

$$\Phi_{tt} - \Phi_{xx} + \Phi_{xxxx} + 6\Phi_x^2 \Phi_{xx} = 0. \quad (21)$$

Его солитонные решения хорошо известны:

$$m = -V\phi_x = \pm V\sqrt{1-V^2} \operatorname{sech} \left[\sqrt{1-V^2} (1-Vt) \right] \quad (22)$$

и совпадают в малоамплитудном пределе с точными решениями УЛЛ (12) для ВПН.

Вернемся к двумерным солитонным возмущениям. Начнем с солитонов стационарного профиля, являющихся решениями уравнения (20). Для их нахождения следует учесть, что локализация в направлении оси Y , перпендикулярной направлению распространения солитона, существенно слабее, чем в направлении его движения. Если ввести новые координаты $x = X/\sqrt{1-V^2}$ и $y = Y/(1-V^2)$, то в основном по малому параметру $(1-V^2) \ll 1$ приближении уравнение (20) сведется к стационарной редукции модифицированного уравнения Кадамцева–Петвиашвили (мКП) [21,22]:

$$\Phi_{XX} + \Phi_{YY} - \Phi_{XXX} - 6\Phi_X^2 \Phi_{XX} = 0, \quad (23)$$

$$m \approx -\sqrt{1-V^2} \Phi_X, \quad (24)$$

или для величины $\Phi_X = u$ к уравнению

$$u_{XX} + u_{YY} - u_{XXX} - 2(u^3)_{XX} = 0, \quad (25)$$

решение которого, фактически, задает распределение Z -компоненты намагниченности в солитоне.

Как и уравнение Кадамцева–Петвиашвили (КП), оно допускает решение для двумерного алгебраического солитона («лампа»). Но, в то время, как в лампе КП поле монотонно убывает в направлении, перпендикулярном его распространению, и немонотонно — в на-

правлении движения [23], в решении уравнения (25), наоборот, намагниченность монотонно убывает в направлении распространения (X) и немонотонно — в перпендикулярном ему направлении (Y). Соответствующее решение было получено численно С. Коминеасом [24,25], и его решение в сечениях $X = 0$ и $Y = 0$ для $u(X, Y)$ приведено на рис. 2(а).

В переменных (X, Y) размер солитона одного порядка в обоих направлениях. В исходных переменных масштаб в направлении распространения $\delta x \sim 1/\sqrt{1-V^2}$ существенно меньше, чем в перпендикулярном направлении $\delta y \sim 1/(1-V^2)$: солитон «сжат» в направлении распространения, и $\delta x/\delta y \sim \sqrt{1-V^2}$. Поскольку уравнение (25) содержит слагаемые одинаковой четности, то кроме приведенного на рис. 2 решения, существует второе решение, отличающееся от первого знаком, подобно тому, как в одномерном случае возникало два решения для ВПН разного знака. Численное исследование решений типа «лампа» исходных уравнений Ландау–Лифшица проводилось в работе [25]. Асимптотики лампы на больших расстояниях легко найти, пользуясь соображениями (см. ниже), приведенными в [26,27]: $m \sim (X^2 - Y^2)/(X^2 + Y^2)^2$ и $\phi \sim X/(X^2 + Y^2)$. На рис. 2(б) изображено распределение намагниченности $m = m(x-V, y)$ при $V = 0,95$. Видно существенное отличие этого двумерного солитона от одномерной ВПН. Это различие проявляется и в интегральных характеристиках лампы. Из выражений (5)–(8) следует, что $N \approx Va/(1-V^2)$, $P \approx Vb/\sqrt{1-V^2}$ и $E \approx b/\sqrt{1-V^2} + c\sqrt{1-V^2}$, где $a = \int uXdY$, $b = \int u^2dXdY$ и $c = \int (u_X^2 - u^2 - u^4 + \phi_Y^2)dXdY$. Как показано в [25], зависимость энергии от импульса имеет вид $E \approx P + 11/P$. Поскольку при этом выполняется неравенство $d^2E/dP^2 > 0$, то в этом пределе солитон, по-видимому, неустойчив (см. [28]).

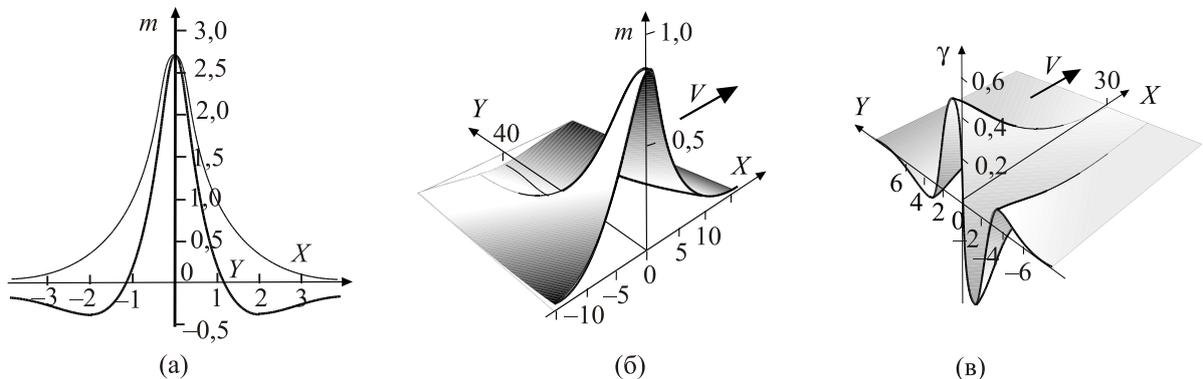


Рис. 2. Вид малоамплитудных магнитных солитонов стационарного профиля. Распределение внеплоскостной компоненты намагниченности в направлении распространения солитона и в перпендикулярном направлении (а), распределение Z -компоненты намагниченности солитона $m = m(X, Y)$ (б) и пространственное распределение плотности завихренности $\gamma = \gamma(x, y)$ в этом солитоне при его скорости $V = 0,95$ (в).

В отличие от одномерных моделей, в двумерных векторных полевых системах можно ввести важную характеристику поля, его так называемую локальную завихренность. В магнитоупорядоченной среде для поля вектора намагниченности завихренность γ и соответствующий полный топологический заряд Γ (индекс Понтрягина) вводятся следующим образом [30,31]:

$$\gamma = (\partial m/\partial x)(\partial \varphi/\partial y) - (\partial m/\partial y)(\partial \varphi/\partial x),$$

$$\Gamma = (1/2\pi) \int \gamma(x, y) dx dy. \quad (26)$$

Поскольку в солитоне поле $m(x, y) \sim \partial \varphi/\partial x$ симметрично по x и по y , и поле $\varphi(x, y)$ симметрично по y и антисимметрично по x , то локальная завихренность симметрична по x , антисимметрична по y и пространственно локализована. Поэтому ее можно рассматривать как диполь завихренности, перпендикулярный направлению распространения лампа. Распределение локальной завихренности в магнитном лампе при $V = 0,95$ изображено на рис. 2(б). (Для изображения распределения намагниченности и завихренности в магнитном лампе, мы в качестве пробной функции выбрали решение в таком же функциональном виде, что и в уравнении КП, но с замененными координатами $x \leftrightarrow y$ и таким подбором численных коэффициентов, при котором основные параметры лампа совпадали с полученными ранее численно [20,24]).

Решение, полученное в рамках мКП, описывает лишь малоамплитудные солитоны УЛЛ. Легко найти границу применимости такого подхода. Поскольку максимум лампа мКП на рис. 2(а) равен $u_{\max} \approx 2,7$, то соответствующий максимум z -компоненты намагниченности $m_{\max} = u_{\max} \sqrt{1-V^2}$ достигает максимально возможного значения $m_{\max} = 1$ при $V = V_0 \approx 0,79$. Это значение не случайно. Как показали численные расчеты солитона УЛЛ [25], зависимости с асимптотиками $E \approx b/\sqrt{1-V^2}$ и $P \approx b\sqrt{1-V^2}$ для малоамплитудных солитонов при скорости $V = 0,78 \approx V_0$ имеют минимумы, и с дальнейшим понижением скорости энергия и импульс солитона начинают нарастать и в интервале скоростей $0 < V < V_0$ выполняются неравенства $dE/dV, dP/dV < 0$. При скоростях $V < V_0$ максимум распределения $m(x, y)$ раздваивается в направлении оси y и формируются два магнитных вихря с положительными значениями намагниченности и противоположными знаками «топологических зарядов» q . Солитон превращается в «квазитопологическое возмущение» с нулевым суммарным топологическим зарядом, но сформировавшимися вихрями.

Возбуждения типа магнитных вихрей в легкоплоскостном ферромагнетике впервые были рассмотрены в работах [6,7]. В цилиндрической системе координат $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\chi = \arctg(y/x)$ они описываются реше-

ниями УЛЛ вида $m = m(r)$, $\varphi = q(\chi - \chi_0)$, где q — топологический заряд вихря. В простейшем случае $q = \pm 1$, что соответствует «вихрю» (V) и «антивихрю» (AV). В бесконечной среде угол χ_0 может быть произвольным, хотя при ограниченной геометрии он может оказаться существенным. (Например, в магнитном нанодоте из-за граничных условий возможно существование двух разных вихревых состояний с $\chi_0 = \pi/2$ и $\chi_0 = -\pi/2$, отвечающих противоположным знакам его «киральности».) При одном и том же знаке топологического заряда q возможны вихревые решения с противоположными значениями намагниченности в центре вихря $p = m(r=0) = \pm 1$. Эта характеристика вихря называется его «поляризацией». Наличие поляризации отличает магнитные вихри от вихрей в гидродинамике, сверхтекучей жидкости или сверхпроводниках. Легко показать, что полная завихренность магнитного вихря равна $\Gamma = pq$. Намагниченность в вихре локализована в области порядка магнитной длины l_0 и в неподвижном вихре экспоненциально спадает вне ее [6,7]:

$$m \approx p(1 - a(r/l_0)^2) \text{ при } r \rightarrow 0 \text{ и } m \approx pb\sqrt{r/l_0} \exp(-r/l_0)$$

при $r \rightarrow \infty$. В бесконечной системе вихрь неподвижен, как «вмороженный» в поток гидродинамический вихрь. Поэтому изолированным вихрям соответствует точка $\omega = V = 0$ на рис. 1. Из (7)–(9) следует, что его импульс равен нулю, а Z -компонента углового момента $K = \Gamma N$ совпадает с суммарным магнитным моментом в этом направлении. Возможны четыре типа вихрей с разными знаками топологических зарядов $q_i = \pm 1$ и поляризаций $p_i = \pm 1$: V_{\pm} и AV_{\pm} . В отличие от изолированных вихрей вихревые пары могут стационарно двигаться с постоянной скоростью V и сохраняющимся расстоянием между ними $L = 1/V$ (решения Кельвина в гидродинамике [32]). Распределение поля φ пары параллельно движущихся вихря и антивихря при учете соотношения (18) дает асимптотику поля компоненты $m \approx L(x^2 - y^2)/r^4$, использованную выше при анализе малоамплитудных солитонов. Для несжимаемой жидкости уравнения движения систем точечных вихрей хорошо известны [34]. В ферромагнетике ситуация несколько сложнее. Как показано в [7], скорость отдельного вихря в паре зависит не только от градиента угла разворота намагниченности $\nabla \varphi$ в точке расположения вихря, но и от его поляризации: $\mathbf{V} = p \nabla \varphi$. Система уравнений динамики магнитных вихрей, обобщающая гидродинамические уравнения, была получена в работах [35,36]. Если учесть, что градиент $\nabla \varphi$ в центре данного вихря обусловлен полем другого вихря, то $V = 1/L$, и возможны 8 конфигураций вихревых пар. Две из них соответствуют интересующим нас состояниям с положительной скоростью ($V > 0$), нулевой суммарной завихренностью системы (V, AV) и с однородным состоянием на бесконечности ($\varphi = \varphi_0$): (V_+, AV_+) и (AV_-, V_-) изображены на рис. 3(а) и 3(б).

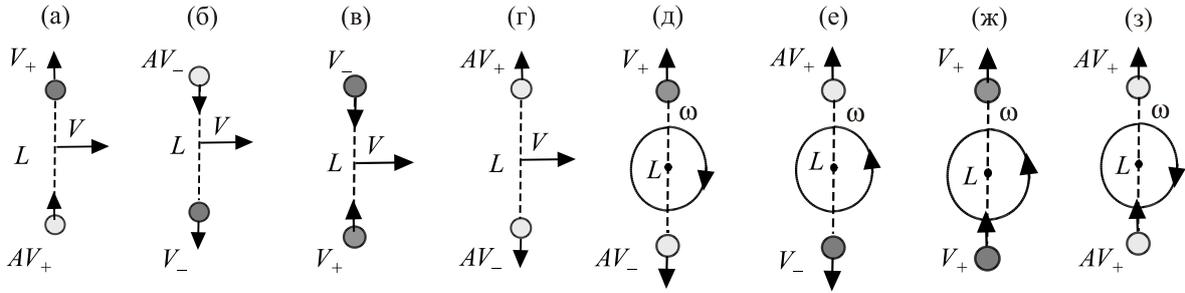


Рис. 3. Возможные конфигурации вихревых пар в однопараметрических солитонах: солитонах стационарного профиля (а)–(г), вращающихся неподвижных солитонах (д)–(з).

В отличие от гидродинамики в ферромагнетике возможны еще две стационарно движущиеся вихревые конфигурации с нулевой суммарной поляризацией и удвоенным топологическим зарядом (рис. 3(в) и 3(г)).

Как показано в [32,33], энергия и импульс вихревых пар равны $E \approx 2\pi q_1 q_2 \ln(L/l_0)$ и $P = 2\pi L$. Таким образом, выполняется условие $dE/dP = 1/L$, и из зависимости $V = 1/L$ следует гамильтоново соотношение $dE/dP = V$. Энергия и импульс пары растут с уменьшением скорости: $E \sim -\ln V$ и $P = 2\pi/V$. При этом выполняется неравенство $d^2 E/dP^2 = -1/2\pi L^2 < 0$, и вихревые пары устойчивы. Полный угловой момент поступательного движения таких вихревых пар равен нулю: $K = 0$. При $V \rightarrow 0$ расстояние между вихрями бесконечно возрастает, и в точке $V = \omega = 0$ на рис. 1 существуют лишь изолированные вихри.

Рассмотрим другой предельный случай однопараметрических нелинейных возбуждений солитонного типа двумерного легкоплоскостного ферромагнетика с нулевой скоростью и нулевым полным импульсом $P = 0$, но с конечной частотой внутреннего движения ω и ненулевым угловым моментом K , которые соответствуют линии B на рис. 1. В пределе $V = 0$, $|\omega| \ll 1$ решение для таких возбуждений также может быть «составлено» из вихревых состояний. Поскольку на большом расстоянии между вихрями $L \gg l_0$ их взаимодействие определяется распределением азимутального поля $\phi(x, y)$, то при низких частотах вращения вихревых пар можно воспользоваться (см. ниже) известными уравнениями двумерной гидродинамики вихрей (или уравнениями Тиле в случае УЛЛ). Для энергии сохраняется выражение $E \approx -2\pi q_1 q_2 \ln(L/l_0)$, а формула для углового момента с учетом поляризации вихрей модернизируется таким образом: $K = \pi \sum q_i p_i R_i^2$, где R_i — координата вихря с номером i . В гидродинамике, где отсутствует поляризация вихрей, возможно вращение двух вихрей или двух антивихрей. В ферромагнетике ситуация более «богатая»: возможно вращение вихревых пар с нулевым полным топологическим зарядом: для пары «вихрь–антивихрь» с противоположной поляризацией ($V_+ AV_-$) (см. рис. 3(д)) возможно вращающееся состояние с $K = \pi L^2/2$ и, как и выше, с $V_r = 1/L$. Из этих формул

следует, что частота вращения вихревого диполя $\omega = 2/L^2$ и, как в обычной механике вращающегося тела, выполняется соотношение $dE/dK = \omega$. Динамика вращающейся пары ($V_+ AV_-$) в случае легкоплоскостного ферромагнетика проанализирована численно во всей области возможных частот [26,38]. Особенностью такого вращающегося возбуждения в ферромагнетике является конечность частотной области существования таких локальных возбуждений: в пределе $\omega \rightarrow 1/2$ решение превращается в точечную особенность с конечной энергией $E = 4\pi$. (Близкие результаты для скирмионов в легкоплоскостном ферромагнетике были получены в [8].) На рис. 3(е)–(з) приведены еще несколько возможных вращающихся парных вихревых конфигураций.

4.2. Двухпараметрические динамические солитоны

До сих пор мы рассматривали однопараметрические возбуждения легкоплоскостного ферромагнетика (линейные спиновые волны и частные солитонные состояния, характеризуемые одним параметром: скоростью или частотой). Нахождение солитонных состояний более общего, двухпараметрического вида представляет более сложную проблему в неинтегрируемой системе. Поэтому начнем с рассмотрения малоамплитудных двухпараметрических солитонов общего вида. В одномерных системах с активационным спектром линейных волн они достаточно просто исследуются асимптотическими методами, например, предложенным в [38]. В случае звукового закона дисперсии линейных возбуждений эта процедура становится более громоздкой (см. [19,20]), но часто это единственная возможность последовательного исследования проблемы. Рассмотрим в рамках такого подхода малоамплитудные динамические солитоны легкоплоскостного ферромагнетика. Им соответствуют параметры (частота и скорость), лежащие на плоскости $(\tilde{\omega}, V)$, рис. 1, в области, прилегающей к линии A спиновых волн.

В малоамплитудном пределе можно воспользоваться уравнением (19). Основным мотивом динамики является быстрое одномерное (например, вдоль оси X) движение магнонов с волновыми числами k и частотами ω . Дополнительные медленные пространственные

и временные изменения определяются амплитудой $\phi \sim \epsilon \ll 1$, где малый параметр ϵ связан с отклонениями параметров солитона от параметров линейных спиновых волн. Поэтому в нелинейных слагаемых, пропорциональных ϕ^3 , можно оставить только производные по быстрым переменным: $\dot{\phi} \sim \omega\phi$ и $\nabla\phi \sim \mathbf{i}_x k\phi$. Первый шаг асимптотической процедуры (резонансное приближение) нахождения решения заключается в представлении его в виде

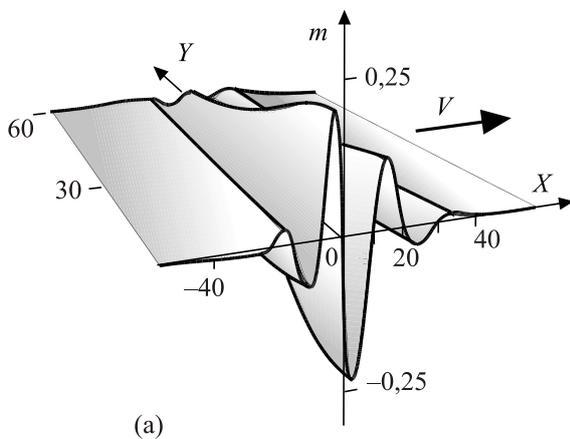
$$\phi = \Phi(x, y, t) \sin(kx - \omega t) + F(x, y, t) \cos(kx - \omega t), \quad (27)$$

где $\Phi \sim \epsilon$, $F \sim \epsilon^2$ и зависимости амплитуд огибающей Φ и F от аргументов малы в меру ϵ : $\partial/\partial x \sim \partial/\partial y \sim \partial/\partial t \sim \epsilon$. После подстановки (27) в (19) для получения замкнутого уравнения необходимо потребовать, чтобы при определении малого параметра, как $\epsilon^2 = k^2 + k^4 - \omega^2 = \omega_{SW}^2 - \omega^2$, выполнялось соотношение $[\omega \partial/\partial t - (k + 2k^2) \partial/\partial x](\Phi, F) = 0$, т.е. чтобы медленная зависимость амплитуд от координаты и времени сводилась к комбинации $\epsilon[x - (1 - 3k^2/2)t] = \epsilon[x - V_{SW}(k)t]$. В этом приближении при малом отклонении частоты солитона от частоты линейной спиновой волны скорость совпадает с групповой скоростью магнонов. Допускается и дополнительная зависимость амплитуд от медленного времени, но мы ее не будем учитывать. Уже без этой зависимости солитонное решение является двухпараметрическим. Для него получается следующее двумерное нелинейное уравнение:

$$3k^2\Phi_{xx} + \Phi_{yy} - \epsilon^2\Phi + 3k^4\Phi^3/2 = 0. \quad (28)$$

Вводя перенормированные координаты $X = \epsilon x/\sqrt{3}k$, $Y = \epsilon y$ и полевую переменную $\Psi = \sqrt{3}k^2\Phi/\sqrt{2}\epsilon$, приводим уравнение (28) к стандартному безразмерному виду:

$$\Psi_{XX} + \Psi_{YY} - \Psi + \Psi^3 = 0. \quad (29)$$



Основное, монотонно убывающее радиально симметричное решение этого уравнения $\Psi_0(\rho)$, где $\rho = \sqrt{X^2 + Y^2} = \epsilon\sqrt{y^2 + (x - Vt)^2/3k^2}$, было найдено численно в работе [40]. В ней же были представлены его основные характеристики: $\Psi(0) \approx 2,4$ и $\int \Psi^2 dx dy \approx 11,3$. Таким образом, решение для малоамплитудного двухпараметрического магнитного солитона в основном приближении имеет вид

$$\phi \approx \sqrt{2/3}(\epsilon/k^2)\Psi_0(\rho)\sin(kx - \omega t + \delta), \quad (30)$$

$$m \approx -\sqrt{2/3}(\epsilon/k)\Psi_0(\rho)\cos(kx - \omega t + \delta). \quad (31)$$

Прежде всего, обратим внимание на то, что размер солитона вдоль направления распространения (оси X) существенно меньше поперечного размера: $\delta x/\delta y \sim k \ll 1$. Но в отличие от автомоделного лампа, рассмотренного выше, в данном случае сжатие солитона определяется его частотой, а не скоростью. Но это отношение может быть переписано в аналогичном виде: $\delta x/\delta y \sim \sqrt{V^2 - 1}$. Кроме того, колебания в легкой плоскости происходят с бóльшим размахом, чем в перпендикулярном направлении: $m_{\max}/\phi_{\max} \sim k \ll 1$. Профиль солитонного решения в момент времени $t = 0$ изображен на рис. 4(а) для значений динамических параметров $V = 1,135$ и $\omega = 0,311$. При этом $\tilde{\omega} = -0,03$. Кроме этого, выбрано значение фазы $\delta = 2$, чтобы продемонстрировать, что высокочастотное «заполнение» солитона движется с фазовой скоростью $v = \omega/k = 1 + k^2/2$, отличной от скорости «огибающей» солитона $V = 1 + 3k^2/2$.

Рассмотрим распределение плотности завихренности в солитоне. Несмотря на изрезанный его профиль, в основном приближении распределение завихренности имеет плавный характер, описываемый формулой

$$\gamma = (\epsilon^4/3k^2)(y/\rho)d\Psi_0^2/d\rho, \quad (32)$$

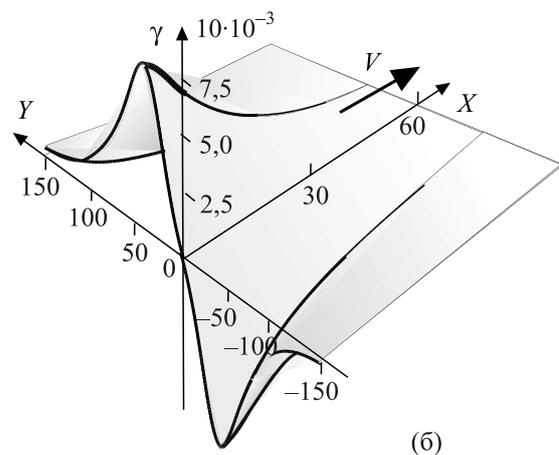


Рис. 4. Распределение Z-компоненты намагниченности $m(x,y)$ в малоамплитудном динамическом двухпараметрическом солитоне (а) и распределение завихренности $\gamma(x,y)$ в таком солитоне при $V = 1,135$, $\omega = 0,311$ ($k = 0,3$, $\epsilon = 0,037$) (б).

и изображенный на рис. 4(б). Таким образом, и в данном случае двумерное солитонное решение имеет вид локализованного вихревого диполя, движущегося со скоростью V . Однако в основном приближении по амплитуде солитона движение распределения завихренности стационарное. Колебание плотности завихренности с частотой ω появляется только в следующем порядке по малому параметру ε , и рассмотрение такой динамики выходит за рамки статьи.

Однако, принимая во внимание сказанное о вихревой природе двумерных солитонов, можно качественно их исследовать в пределе большой амплитуды с динамическими параметрами, далекими от линии A на рис. 1. (Подставляя в выражение (31) максимальное значение $\Psi_0^{\max} \approx 0,22$, легко найти границу применимости результатов малоамплитудного подхода: значению $m_{\max} = 1$ соответствует зависимость $\tilde{\omega}_{SW} - \tilde{\omega} \approx 0,5\sqrt{V-1}$, изображенная линией D на рис. 1.) Учитывая, что при нулевой частоте решение представляет собой движение пары вихрь/антивихрь с одинаковой поляризацией, а при нулевой скорости — вращение пары вихрей, можно представить, что в общем случае двухпараметрический магнитный солитон представляет собой связанное квадрупольное состояние двух вихрей и двух антивихрей с нулевым топологическим зарядом и нулевой полной поляризацией. В этом возбуждении вихревые и антивихревые пары должны быть разнесены в направлении, перпендикулярном направлению движения солитона, что соответствует диполью завихренности в малоамплитудном солитоне. При этом равны нулю также полный угловой момент и Y -компонента полевого импульса (предполагая, что солитон движется вдоль оси X в положительном направлении). Уравнения дву-

мерного движения системы точечных вихрей в гидродинамике хорошо известны [33,35]. (Применительно к сверхтекучей жидкости они были выведены в работе [45].) В теории магнетизма аналогичные уравнения для динамики магнитных вихрей были получены в [7,35,36] в приближении малых скоростей вихрей ($V \ll 1$) и больших расстояний между ними ($|\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j| \gg l_0$). В этом приближении (фактически, приближении «обобщенных координат») обобщенными координатами являются двумерные координаты центров вихрей $\mathbf{R}_i = (X_i(t), Y_i(t))$. Уравнения для них имеют вид

$$[\dot{\mathbf{R}}_i, \mathbf{G}_i] = -dE/d\mathbf{R}_i, \quad (33)$$

где $\mathbf{G}_i = 2\pi\Gamma_i\mathbf{n}_z$ — гировектор i -вихря и E — энергия системы вихрей. В этом приближении коллективных переменных энергия (6), компоненты импульса (8) и Z -проекция углового момента (9) принимают вид

$$E = -2\pi \sum_{ij} q_i q_j \ln |\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j|, \quad (34)$$

$$P_x = 2\pi \sum_i \Gamma_i Y_i, \quad P_y = -2\pi \sum_i \Gamma_i X_i,$$

$$K_z = 2\pi \sum_i \Gamma_i R_i^2. \quad (35)$$

(В гидродинамике вместо завихренностей Γ_i фигурируют топологические заряды вихрей $\Gamma_i \rightarrow q_i$.) В случае четырех взаимодействующих магнитных вихрей мы имеем динамическую систему с четырьмя степенями свободы. Она обладает четырьмя интегралами движения

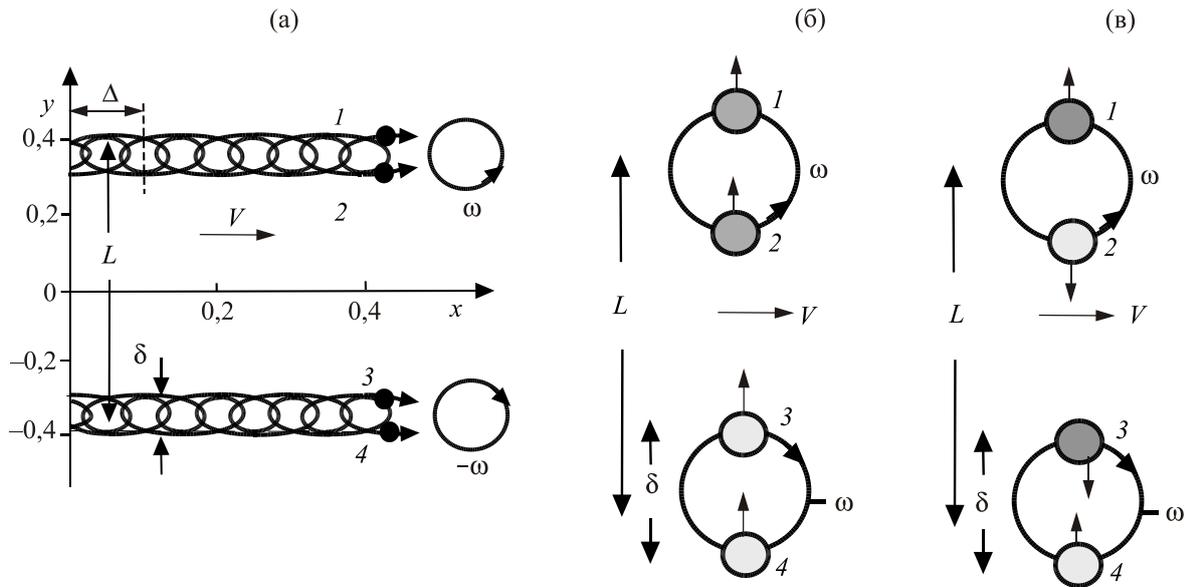


Рис. 5. Динамика магнитного A -солитона типа $V_{1+}V_{2+}, AV_{3+}AV_{4+}$ (а), и его внутренняя структура (б), внутренняя структура магнитного B -солитона $V_{1+}AV_{2-}, V_{3-}AV_{4+}$ (в).

(34), (35) и в случае нулевого суммарного топологического заряда интегрируется в квадратурах, хотя в каждом конкретном случае получение аналитического выражения для траекторий вихрей представляет достаточно сложную математическую задачу. Исследованию динамики такой системы посвящено большое число работ [27,40,41]. В работе Лава [42] (см. также [27,43,45]) впервые было показано, что гидродинамическая система с двумя парами «вихрь–антивихрь» может обладать связанными пространственно локализованными состояниями, характеризующимися скоростью движения как целое и частотой внутреннего вращения. На «магнитном языке» в рамках уравнений Ландау–Лифшица это состояние, получившее название «вихревая чехарда» («leapfrogging»), впервые исследовалось в работе [27]. Магнитные задачи сводятся к гидродинамическим в частном случае, когда поляризации всех вихрей считаются одинаковыми. Поэтому применительно к магнетикам ситуация более разнообразна и интересна. При переходе от гидродинамики к магнетикам при одновременном изменении топологических зарядов и поляризаций вихрей их динамика может сохранять качественное сходство с вихревой чехардой в гидродинамике и описывать магнитные солитоны (ниже — солитоны A -типа). В работе [27] был рассмотрен частный случай движущегося магнитного вихревого квадруполь, изображенного на рис. 5(а), и состоящего из диполя вихрей и диполя антивихрей с одинаковыми поляризациями (рис. 5(б)). На рис. 5 для примера приведен A -солитон с импульсом $P_x \approx 8,8$ и энергией $E \approx 19,8$. Такие значения интегралов движения отвечают начальным условиям $y_1(0) = -y_4(0) = 0,4$, $y_2(0) = -y_3(0) = 0,3$ и $x_i(0) = 0$. При этом пространственный период (длина прыжка) составляет $\Delta \approx 0,1$, временной период вращения $T \approx 0,032$, размер каждой пары $\delta \approx 0,1$ и расстояние между парами $L = 0,7$. Легко проверить, что выполняются соотношения $\omega \approx 2/\delta^2 = 200$ и $V \approx 2/L \approx 3,86$, характерные для вращающихся и равномерно движущихся пар. В последнем случае в отличие от пары из двух вихрей, для которой $V = 1/L$ (см. выше), скорость в два раза больше, поскольку вихрь из каждой пары находится в поле градиента разворота намагниченности от двух вихрей из второй пары.

Из-за симметрии задачи относительно линии $y = 0$, в данной задаче достаточно рассмотреть динамику только вихрей с номерами 1 и 2 и взять в качестве начального условия конфигурацию $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = x_4(0) = 0$, $y_1(0) = -y_4(0)$, $y_2(0) = -y_3(0)$. Из-за сохранения полного импульса и полной энергии системы удобно ввести связанные с ними сохраняющиеся параметры $p = y_1 + y_2 = P_x/4\pi$ и $u = 4y_1y_2(z^2 + p^2)/(z^2 + w^2) = \exp(E/2\pi)$. В выражениях ниже использованы функции $w = y_1 - y_2$ и $z = x_1 - x_2$, которые характеризуют зависящие от времени размеры одной из вихревых пар. Для зависящего от времени размера пары $w(t)$ вдоль оси Y получается замкнутое уравнение:

$$\dot{w}^2 = \frac{4(p^4 - (u + p^2)w^2)(w^2 + (u - p^2))^3}{u^2(p^2 - w^2)^4}, \quad (36)$$

которое решается в квадратурах. По его решению с помощью соотношения

$$z(t) = \sqrt{\frac{p^4 - (u + p^2)w^2(t)}{w^2(t) + (u - p^2)}} \quad (37)$$

находится временная эволюция размера пары вдоль оси X и, наконец, выражение

$$\dot{x} = V = \frac{p}{p^2 + z^2(t)} + \frac{p}{p^2 - w^2(t)} \quad (38)$$

определяет среднюю скорость перемещения пары $\bar{x} = (x_1 + x_2)/2$ вдоль направления движения солитона.

Из уравнения (36) видно, что оно имеет решение для периодических во времени возбуждений солитонного типа только при выполнении неравенства $u > p^2$, или в терминах начальных условий с $x_1(0) = x_2(0) = 0$ — в интервале $1 < y_1(0)/y_2(0) < 3 + 2\sqrt{2}$. Это условие впервые было получено в работе [42] и на «солитонном языке» данной статьи обозначает следующее. Решения уравнения (36) описывают A -солитоны с параметрами в заштрихованной области $(\tilde{\omega}, V)$ на рис. 1.

Меняя начальные условия (значения $y_1(0)$ и $y_2(0)$) или значения интегралов движения E и P , мы изменяем динамические характеристики солитона (его частоту и скорость), т.е. положение соответствующей точки на заштрихованной части рис. 1. При изменении параметров в указанном интервале точка на плоскости $(\tilde{\omega}, V)$ движется вдоль некоторой линии (например, линии bc на рис. 1) между осями $\tilde{\omega} = 0$ и $V = 0$. Точке b соответствует предел $y_1(0)/y_2(0) \rightarrow 1$ при конечной величине $y_1(0) - y_2(0)$ (или предел $u \rightarrow \infty$ при конечной величине p). При этом солитон превращается в разнесенные на большое расстояние по оси Y две вихревые пары (V_{1+}, V_{2+}) и (AV_{3+}, AV_{4+}) с топологическими зарядами $q_1 + q_2 = 2$ и $q_3 + q_4 = -2$, изображенные на рис. 3(ж) и 3(з). (Заметим, что это состояние отличается от рассмотренного в работах [25,37], в которых исследовались вращающиеся вихревые пары с нулевым топологическим зарядом, изображенные на рис. 3(д) и 3(е).) В пределе $u \rightarrow \infty$, $p \rightarrow \infty$, $u \sim p^4$ мы имеем $E = \infty$, $P = 0$, $V = 0$, $\omega = 2u/p^4$ и $w = \sqrt{2/\omega} \sin \omega t$, т.е. выполняется полученное ранее соотношение $\omega = 2/\delta^2$, где δ — диаметр вихревой пары. Более интересен противоположный предел $\tilde{\omega} \rightarrow 0$, в котором точка c на рис. 1 приближается к оси скоростей. В этом

пределе $u = p^2 + \varepsilon$ с $\varepsilon \ll 1$, а фазовый портрет системы (36) $\dot{w} \sim \sqrt{(p^2 - 2w^2)(\varepsilon + w^2)^3}/p^5$ и соотношение размеров $\delta x = z$ и $\delta y = w$ вихревой пары (37) при движении $z^2 \approx p^2(p^2 - 2w^2)/(\varepsilon + w^2)$ упрощаются, они приведены на рис. 6(а) и 6(б).

По этим зависимостям легко восстановить всю динамику солитона за период его движения. Она приведена на рис. 6(в) и заключается в следующем. В момент времени $t_1 = 0$ вихревая пара $V_{1+}V_{2+}$ и антивихревая пара $AV_{3+}AV_{4+}$ имеют размеры $\delta = y_1 - y_2 \approx p/\sqrt{2}$ вдоль оси Y , а их центры расположены в этом направлении на расстоянии $L = p$. На коротком временном интервале $\tau \sim p^2$, на котором $\delta y = w \approx (p/\sqrt{2})(1 - t^2/8p^4)$, происходит «перезамыкание» вихрей: пары V_1V_2 и AV_3AV_4 разрываются и образуются пары V_1AV_4 и V_2AV_3 . Скорость этих пар в направлении оси X приблизительно равна $V = 1/p = 1/L$, как у изолированных вихревых пар, а расстояние между ними равно $\delta x \approx p^2/\sqrt{\varepsilon}$ (38). При $t = t_2 = T/4$, где $T \sim (p^4/\varepsilon) \ln(p^2/\varepsilon)$ — период колебательного движения, происходит изменение знака величины w , и за вторую четверть периода от $t = t_2$ до $t = t_3$ происходит восстановление пар V_1V_2 и AV_3AV_4 . При стремлении частоты A -солитона к нулю он распадается на две бесконечно удаленные пары «вихрь/антивихрь».

Рассмотренное выше решение описывает не только солитоны в легкоплоскостном ферромагнетике, но и вихревые квадруполь в сверхтекучей жидкости и других бозе-системах с отталкиванием квазичастиц. Но в магнитной системе ситуация более разнообразна из-за возникновения дополнительного различия вихрей, связанного с их поляризацией. В частности, можно поставить вопрос о магнитных солитонах, которые в статическом пределе нулевой скорости трансформируются в вихревые пары с нулевым топологическим индексом, рассмотренные в [25,37]. Они интересны тем, что во всех предельных случаях превращаются в возбуждения с нулевым топологическим зарядом, эквивалентные основному состоянию легкоосного ферромагнетика. Внутренняя конфигурация таких солитонов (B -солитонов) изображена на рис. 5(в): он состоит их двух пар

«вихрь/антивихрь» с нулевой суммарной поляризацией каждой: $V_{1+}AV_{2-}$ и $V_{3-}AV_{4+}$. Как и в предыдущем случае, в системе сохраняется полный импульс $p = y_1 + y_2 = P_x/4\pi$ и энергия, которая теперь при заданных начальных значениях координат определяется другим выражением: $U = (p^2 - w^2)(z^2 + w^2)/(z^2 + p^2) = \exp(E/2\pi)$. Поэтому для тех же начальных условий, которые были выбраны на рис. 5(а) для A -солитонов рассмотренного выше типа ($y_1(0) = -y_4(0) = 0,4$, $y_2(0) = -y_3(0) = 0,3$ и $x_i(0) = 0$), полный импульс сохраняется тем же: $P_x \approx 8,8$, но энергия существенно меняется: $E \approx -29$. При этом частота внутренних колебаний не меняется, но средняя скорость пространственного перемещения гораздо меньше: $V \approx 0,03$. Тем не менее характер внутренней динамики B -солитона качественно сохраняется. Для рассматриваемого солитона соотношения (36)–(38) меняются следующим образом:

$$\dot{w}^2 = \frac{4(p^2(U - w^2) + w^4)((p^2 - U) - w^2)^3}{U^2(p^2 - w^2)^4}, \quad (39)$$

$$z(t) = \sqrt{\frac{w^4 + (U - w^2)p^2}{(p^2 - U) - w^2}}, \quad (40)$$

$$\dot{x} = V = -\frac{p}{p^2 + z^2(t)} + \frac{p}{p^2 - w^2(t)}. \quad (41)$$

Из уравнения (39) видно, что в данном случае B -солитоны с внутренней прецессией существуют только при условии $p^2 > 4U$, т.е. при начальных условиях $x_1(0) = x_2(0) = 0$ в интервале $3 + 2\sqrt{2} < y_1(0)/y_2(0) < \infty$, комплиментарном интервалу параметров существования A -солитонов. Проще всего решение выглядит в пределе $p^2 \gg U$, когда B -солитон представляет собой две далеко разнесенные на расстояние $L = p$ вращающиеся пары «вихрь/антивихрь» с противоположной поляризацией составляющих вихрей типа изображенных на рис. 3(д) и 3(е). Вращение пар описывается выражением $w = \sqrt{U} \sin \omega t$ с частотой $\omega = 2/U = 2/\delta^2$, как и в [26,38].

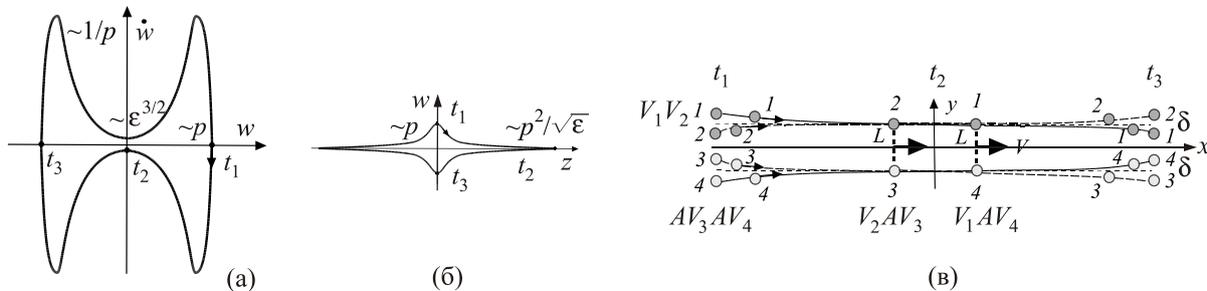


Рис. 6. Динамика двухпараметрического магнитного A -солитона: фазовый портрет соответствующей динамической системы (а), временное изменение размеров вихревой пары (б), образующей магнитный солитон, движение вихрей в двухпараметрическом динамическом A -солитоне вида $V_{1+}V_{2+}$, $AV_{3+}AV_{4+}$ (в).

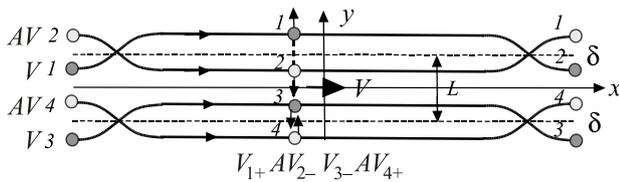


Рис. 7. Динамика двухпараметрического магнитного B -солитона: движение вихрей в динамическом солитоне вида $V_{1+}V_{2-}, AV_{3-}AV_{4+}$.

Скорость солитонов существенно меньше, чем в предыдущем случае: $V \approx (w^2 + z^2)/p^3 = \delta^2/L^3$, что также согласуется с результатом, приведенным выше. Этому пределу соответствует приближение к линии B на рис. 1. В противоположном предельном случае малых частот решение имеет приближенный вид $w \approx (p/\sqrt{2})\text{sn}(2\sqrt{2}t/p^2, k)$ с $k \approx 1 - \sqrt{1 - 4U/p^2} \approx 1$.

Таким образом, как и в случае A -солитона, за короткие времена $\tau \sim p^2$ периодически происходит обмен позиций вихрей в парах, а между этими «перезаключениями» на больших временах периода $T \sim p^2 \ln(p^2 - U)$ (вблизи точек c на рис. 1) B -солитон приобретает форму стационарной конфигурации $V_{1+}AV_{2-}V_{3-}AV_{4+}$, распространяющейся с постоянной скоростью $V \approx 1/2y_2 = 1/L$ и обладающей вполне определенным отношением размера пар и расстояния между ними: $y_1/y_2 = 3 + 2\sqrt{2}$ (рис. 7). Эта конфигурация изображена на рис. 5(в), но с $\omega = 0$. При уменьшении скорости такого солитона он распадается на 4 бесконечно удаленных вихря. Повидимому, это возбуждение неустойчиво.

Поэтому вкратце остановимся на устойчивости найденных солитонных решений. Стационарно движущиеся вихревые пары устойчивы, но вопрос об их устойчивости в области скоростей, близких к скорости звука, где выполняется неравенство $d^2E/dp^2 > 0$, остается открытым. При скоростях, превышающих значение V_0 , в некоторой области такие пары демонстрируют устойчивость при численном моделировании их столкновения с «медленными», хорошо сформированными парами. Однако при больших скоростях при таком взаимодействии «быстрая» пара трансформируется в спиновые волны. Двухпараметрические солитоны типа вихревых квадруполь также становятся менее устойчивыми при приближении к критическим значениям параметров с уменьшением частоты внутренней прецессии. Как было показано численно в [43,45], в этой области при возбуждении вихревого комплекса он разваливается на вихревые пары или временно превращается в систему пространственно разделенных вихря и комплекса из трех вихрей.

5. Заключение

В работе показано, что в двумерном легкоплоскостном ферромагнетике малоамплитудные автомодельные

солитоны либовского типа представляют собой решения типа «лампов», превращающиеся с уменьшением скорости в связанные вихревые пары типа «вихрь/антивихрь». Малоамплитудные двухпараметрические солитоны имеют структуру, содержащую диполь завихренности поля намагниченности, превращаясь с уменьшением скорости поступательного движения в вихревой квадруполь с внутренним вращением образующего его вихрей. В пределах нулевой скорости и нулевой частоты эти динамические двухпараметрические солитоны трансформируются в изолированные вращающиеся вихревые пары и поступательно движущиеся пары. Указано на возможность существования двух различных типов магнитных солитонов.

Работа выполнена в рамках Научной программы Ф-26-3 и Целевой программы 4/16-Н.

1. А.М. Косевич, Б.А. Иванов, А.С. Ковалев, *Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны*, Наукова думка, Киев (1988).
2. А.М. Kosevich, B.A. Ivanov, and A.S. Kovalev, *Phys. Rep.* **194**, 117 (1990).
3. А.Б. Борисов, В.В. Киселев, *Нелинейные волны, солитоны и локализованные структуры в магнетиках*, УрО РАН, Екатеринбург (2009), т. 1.
4. А.Б. Борисов, В.В. Киселев, *Нелинейные волны, солитоны и локализованные структуры в магнетиках*, УрО РАН, Екатеринбург (2011), т. 2.
5. А.Б. Борисов, В.В. Киселев, *Квазидномерные магнитные солитоны*, Физматлит, Москва (2014).
6. А.М. Косевич, В.П. Воронов, И.В. Манжос, *ЖЭТФ* **84**, 148 (1983).
7. А.В. Никифоров, Э.Б. Сонин, *ЖЭТФ* **58**, 373 (1983).
8. А.С. Ковалев, А.М. Косевич, К.В. Маслов, *Письма в ЖЭТФ* **30**, 321 (1979).
9. А.Н. Богданов, Д.А. Яблонский, *ЖЭТФ* **68**, 101 (1989).
10. A. Bogdanov and A. Hubert, *J. Magn. Magn. Mater.* **138**, 255 (1994).
11. Б.А. Иванов, А.М. Косевич, *Письма в ЖЭТФ* **24**, 495 (1976).
12. Б.А. Иванов, А.М. Косевич, *ЖЭТФ* **72**, 2000 (1977).
13. D. Landau and E.M. Lifshitz, *Phys. Z. Sowjet.* **8**, 153 (1935); см. также Л.Д. Ландау, *Собрание трудов*, Наука, Москва (1969) т. 1, 128.
14. Б.А. Иванов, А.М. Косевич, И.М. Бабич, *Письма в ЖЭТФ* **29**, 777 (1979).
15. И.М. Бабич, А.М. Косевич, *Письма в ЖЭТФ* **31**, 224 (1980).
16. И.М. Бабич, А.М. Косевич, *ЖЭТФ* **82**, 1277 (1982).
17. И.А. Ахизер, А.Е. Боровик, *ЖЭТФ* **52**, 508 (1967).
18. E.H. Lieb, *Phys. Rev.* **130**, 1616 (1963).
19. А.С. Ковалев, *Дисс. докт. физ.-мат. наук*, Харьков (1989).
20. А.С. Ковалев, Е.С. Сыркин, Ж.А. Можен, *ФНТ* **28**, 635 (2002) [*Low Temp. Phys.* **28**, 452 (2002)].

21. М. Абловиц, Х. Сегур, *Солитоны и метод обратной задачи*, Мир, Москва (1987).
22. N. Papanicolaou and P.N. Spathis, *Nonlinearity* **12**, 285 (1999).
23. S.V. Manakov, V.E. Zakharov, L.A. Bordag, and A.B. Matveev, *Phys. Lett. A* **63**, 205 (1977).
24. С. Коминеас, *Частное сообщение* (2001).
25. S. Komineas and N. Papanicolaou, *arXiv: 0712.3684v1.cond-mat,mes-hall*, 2008.
26. A.S. Kovalev, F.G. Mertens, and H.J. Schnitzer, *Eur. Phys. J. B* **33**, 133 (2003).
27. A.S. Kovalev, S. Komineas, and G.F. Mertens, *Eur. Phys. J. B* **25**, 89 (2002).
28. М.М. Богдан, А.С. Ковалев, А.М. Косевич, *ФНТ* **15**, 511 (1989) [*Sov. J. Low Temp. Phys.* **15**, 288 (1989)].
29. N. Papanicolaou and T.N. Tamaros, *Nucl. Phys. B* **360**, 425 (1991).
30. N. Papanicolaou and T.N. Tamaros, *Phys. Lett. A* **179**, 33 (1993).
31. M.E. Gouvea, G.M. Wysin, A.R. Bishop, and F.G. Mertens, *Phys. Rev. B* **39**, 11840 (1989).
32. H.J. Lagt, *Introduction to Vortex Theory*, Vortex Flow Press, Potomac, Meryland (1961).
33. J.M. Kosterlitz and D.J. Thouless, *J. Phys. C* **6**, 1181 (1973).
34. Г. Кирхгоф, *Механика. Лекции по математической физике*, АН СССР, Москва (1962).
35. A.A. Tiele, *Phys. Rev. Lett.* **30**, 230 (1973).
36. D.L. Huber, *Phys. Rev. B* **26**, 3758 (1982).
37. S. Komineas, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 117202 (2007).
38. А.М. Косевич, А.С. Ковалев, *ЖЭТФ* **67**, 1795 (1974).
39. R.Y. Chiao, E. Garmire, and G.H. Townes, *Phys. Rev. Lett.* **13**, 479 (1964).
40. B. Eckhardt, *Phys. Fluids* **31**, 2796 (1988).
41. H. Aref and M.A. Stemler, *Phys. Fluids* **11**, 3704 (1999).
42. A.E.H. Love, *Proc. Lond. Math. Soc.* **25**, 185 (1894).
43. E. Acton, *J. Fluid. Mech.* **76**, 561 (1976).
44. Т.Н. Зуева, *ФНТ* **26**, 119 (2000) [*Low Temp. Phys.* **26**, 85 (2000)].
45. D.E. Acheson, *Eur. J. Phys.* **21**, 269 (2000).

Vortex structure of the magnetic solitons

A.S. Kovalev

The soliton-like excitations of general form in 2D easy-plane ferromagnets are researched in the framework of classical model. The corresponding evolution equations and their soliton solutions are obtained. We demonstrate that these excitations have a vortex structure and transform into quadrupole vortex states with the growth of excitation amplitude. These states are characterized with the two dynamical parameters: the soliton velocity and its internal precession frequency. The passage of the vortex soliton to the limit of the vortex dipole, magnetic lamp and magnon droplet is analyzed. The obtained results are compared with the information about the solitons in the corresponding 1D magnetic systems.

PACS: **75.10 – b** General theory and models of magnetic ordering;
 75.30.Gw Magnetic anisotropy;
 75.60.Ej Magnetization curves, hysteresis, Barkhausen and related effects.

Keywords: weakly dispersive media, easy-plane ferromagnets, dynamical solitons, rotary waves, Lieb states, magnetic vortex, vortex dipole, vortex quadrupole.