

Энергетические спектры квантовой турбулентности при наличии противотока для различных температур

В.А. Андриященко, Л.П. Кондаурова

*Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН Сибирского отделения Российской академии наук
пр. Академика Лаврентьева, 1, г. Новосибирск, 630090, Россия*

E-mail: louisa@ngs.ru

Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова, 2, г. Новосибирск, 630090, Россия

Статья поступила в редакцию 1 августа 2016 г., опубликована онлайн 26 декабря 2016 г.

Найден спектр энергии, создаваемый вихревым клубком в противотоке нормальной и сверхтекучей компонент при различных температурах. Значения противотока изменялись в диапазоне от 0,3 см/с до 1,2 см/с, а значения температуры от 1,3 К до 1,9 К. Показано, что в зависимости от температуры на масштабах порядка межвихревых расстояний $E(k) \sim k^{-\alpha}$, где $1,3 < \alpha < 1,4$. На больших масштабах $E(k) \sim k^{-1}$. Показано, что при тепловых потоках, соответствующих режиму Гортера–Меллинка, плотность диссипации энергии пропорциональна кубу противотока нормальной и сверхтекучей компонент, т.е. диссипация энергии обусловлена трением между нормальной компонентой и вихревым клубком.

Знайден спектр енергії, що створюється вихровим клубком в протитечії нормальної та надплинної компонент при різних температурах. Значення протитечії змінювалися в діапазоні від 0,3 см/с до 1,2 см/с, а значення температури від 1,3 К до 1,9 К. Показано, що залежно від температури на масштабах порядку міжвихрових відстаней $E(k) \sim k^{-\alpha}$, де $1,3 < \alpha < 1,4$. На великих масштабах $E(k) \sim k^{-1}$. Показано, що при теплових потоках, які відповідають режиму Гортера–Меллінка, щільність дисипації енергії пропорційна кубу протитечії нормальної і надплинної компонент, тобто дисипація енергії обумовлена тертям між нормальною компонентою та вихровим клубком.

PACS: 67.25.dk Вихри и турбулентность;

47.37.+q Гидродинамические аспекты сверхтекучести; квантовые жидкости;

03.75.Kk Динамические свойства конденсатов; коллективные и гидродинамические возбуждения, сверхтекучий поток.

Ключевые слова: сверхтекучесть, вихревая структура, квантовая турбулентность.

1. Введение и мотивация

Сверхтекучая или квантовая турбулентность привлекает значительное внимание как экспериментаторов, так и теоретиков. Под сверхтекучей турбулентностью понимается клубок переплетенных квантованных вихревых нитей в сверхтекучей компоненте гелия, который поддерживается силой взаимного трения между вихревыми нитями и нормальной компонентой жидкого гелия. Эта турбулентность не имеет непосредственного классического аналога. Однако экспериментально установлено, что определенные режимы турбулентного течения в сверхтекучей компоненте жидкого гелия удивительно похожи на турбулентное течение в классической жидкости при высоких числах Рейнольдса.

Это сходство существует несмотря на то, что сверхтекучий гелий описывается двухжидкостной моделью. Причем, в сверхтекучей компоненте отсутствует вязкая диссипация, а вращающееся движение проявляется в виде набора дискретных квантованных вихревых нитей [1].

Существуют эксперименты по определению спектрального характера течения сверхтекучей жидкости. Так, в работах [2,3], сверхтекучую жидкость пропускают через жесткие сетки. В области, находящейся за сетками, наблюдают установившиеся турбулентные движения как в нормальной, так и сверхтекучей компонентах гелия. В работе [4] проводится теоретическое обсуждение этих экспериментов. В частности утверждается, что характер свободного распада вихревого

клубка является ключевым аргументом в пользу того, что хаотическая совокупность квантовых вихрей может имитировать классическую турбулентность, или, по крайней мере, воспроизвести некоторые основные свойства. Поскольку возможные механизмы диссипации вихревой энергии, обсуждаемые там и в других источниках, реализуются на малых масштабах, то естественно предположить, что распад турбулентности происходит вследствие стационарного потока энергии с масштабов порядка размера системы в малые масштабы и ее последующей диссипацией на этих малых масштабах. Таким образом, может возникать некоторое подобие каскада Колмогорова, характерного для классической турбулентности несжимаемой жидкости.

В то же время, в ряде экспериментальных [5–10] и численных работ [11–17] было показано, что вихревой клубок распадается при температурах, близких к абсолютному нулю. Однако при низких температурах нормальная компонента сверхтекучего гелия практически отсутствует, а следовательно, отсутствует и взаимное трение, являющееся наиболее очевидным механизмом диссипации энергии в жидкостях. Данный факт свидетельствует о наличии нескольких механизмов диссипации энергии. Естественным образом, стоит ожидать и возможное отличие в характере энергетического спектра для различных ситуаций, а также на различных масштабах.

Целью настоящей работы является исследование спектрального характера квантовой турбулентности в противотоке нормальной и сверхтекучей компонент гелия при различных температурах, а также определение возможных механизмов диссипации энергии. Спектры поля скорости для вихревого клубка вычислялись на основе конфигураций вихревых нитей, полученных в работе [18]. Кроме того, для анализа спектральных характеристик на масштабах межвихревых расстояний дополнительно была исследована динамика пар реконструирующих вихревых петель. Для определения характера спектра энергии исследуемых систем мы использовали метод структурных функций, с успехом применяемый при исследовании классической турбулентности. Описание данного метода приведено в следующем разделе.

2. Методы моделирования динамики вихревых нитей и определения энергетического спектра

В качестве метода получения энергетического спектра системы был выбран метод структурных функций. Этот метод позволяет определить интенсивность диссипации и спектр энергии по известному полю скоростей. Поэтому предварительным этапом изучения энергетических характеристик исследуемой системы было определение ее фазового портрета. Описанию алгоритма нахождения поля скоростей и его численной реализа-

ции посвящены следующие два подраздела. Далее будет описан метод структурных функций.

2.1. Алгоритм моделирования динамики вихревых нитей

Моделирование динамики вихревых нитей проведено на основе метода вихревой нити. Суть метода заключается в том, что незначительное изменение ядра квантованных вихрей игнорируется, вихри аппроксимируются нитями с заданной структурой ядра. В расчетах вихревая нить аппроксимируется набором прямых вихревых отрезков, размеры которых много меньше межвихревого расстояния. Согласно этому скорость точки вихревой нити определяется, в отсутствие нормальной компоненты, скоростью жидкости как целого плюс индуцированная скорость от всей вихревой системы, которая находится из решения уравнения Био–Савара:

$$\mathbf{V}_B(\mathbf{s}) = \frac{\kappa}{4\pi} \int_L \frac{(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}) \times d\mathbf{s}_1}{|\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}|^3}, \quad (1)$$

где \mathbf{s}, \mathbf{s}_1 — радиус-векторы, проведенные из начала координат к точкам на вихревой нити, интегрирование ведется по всей конфигурации нитей L . Величиной κ обозначен квант циркуляции для поля скорости, равный h/m_4 , где h — постоянная Планка, m_4 — масса атома гелия. Координатная система и параметризация вихревых нитей схематично представлена на рис. 1.

При учете силы трения и противотока нормальной и сверхтекучей компонент гелия уравнение движения элемента вихревой нити принимает следующий вид:

$$\mathbf{V}_L = \mathbf{V}_s + \mathbf{V}_B + \alpha \mathbf{s}' \times (\mathbf{V}_{ns} - \mathbf{V}_B) - \alpha' \mathbf{s}' \times [\mathbf{s}' \times (\mathbf{V}_{ns} - \mathbf{V}_B)], \quad (2)$$

где α, α' — зависящие от температуры коэффициенты трения, \mathbf{s}' — первая производная по параметру ξ , параметр ξ — длина дуги, другими словами, касательный вектор, \mathbf{V}_s — скорость сверхтекучей компоненты гелия, $\mathbf{V}_{ns} = \mathbf{V}_n - \mathbf{V}_s$ — скорость противотока (разность скоростей нормальной и сверхтекучей компонент). При мо-

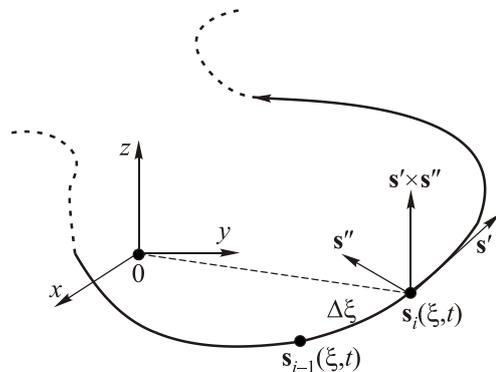


Рис. 1. Координатная система. Вихревая нить задана в естественной параметризации с натуральным параметром ξ .

делировании рассматривались случаи различных температур системы. Рассмотренные температуры и соответствующие коэффициенты трения приведены в табл. 1.

Таблица 1. Коэффициенты трения, соответствующие рассмотренным температурам

T, K	0	1,3	1,6	1,9
α	0	0,036	0,098	0,21
α'	0	0,014	0,016	0,0009

Для оценки характера спектра энергии на масштабах порядка межвихревых мы рассмотрели динамику пар вихревых колец. В качестве начальной конфигурации системы выбирались два кольца одинакового диаметра ($R_0 = 10^{-3}$ см), лежащих в плоскостях, наклоненных относительно друг друга. Температура была равна 1,3 К. Начальное расстояние между центрами вихревых колец выбрано равным радиусу вихревых колец, т.е. вихревые кольца были зацепленными. Качественно их динамика согласуется с динамикой незацепленных вихревых колец, лежащих в одной плоскости, исследованной ранее в работе [19]. Однако количество возможных конфигураций и, соответственно, больше различных особенностей в спектре энергии для непланарных вихрей, чем и мотивировано дополнительное (по отношению к работе [19]) исследование.

В настоящей работе использованы также конфигурации вихревого клубка, полученные в рамках описанного здесь алгоритма и его соответствующей реализации (см., следующий подраздел), в [18]. В указанной работе были получены конфигурации вихревого клубка в стационарном состоянии при температурах 1,3, 1,6, 1,9 К при различных значениях скоростей противотока от 0,3 до 1,2 см/с. Расчеты были проведены при периодических граничных условиях в кубической области с размером ребра 0,1 см.

Для определения полей скоростей, создаваемых полученными и используемыми вихревыми конфигурациями, применялось уравнение Био–Савара (скорость сверхтекучего гелия не меняет вида энергетического спектра, см. раздел, посвященный вычислению структурных функций).

2.2. Вычислительная схема

Для нахождения скорости, индуцированной вихревыми нитями, необходимо вычислить интеграл (1). При вычислении скорости вихревой точки \mathbf{s}_i этот интеграл можно представить в виде двух слагаемых:

$$\mathbf{V}_B(\mathbf{s}_i) = \beta \mathbf{s}'_i \times \mathbf{s}''_i + \frac{\kappa}{4\pi} \int_L \frac{(\mathbf{s}_j - \mathbf{s}_i) \times d\mathbf{s}_j}{|\mathbf{s}_j - \mathbf{s}_i|^3},$$

$$\beta = \frac{\kappa}{4\pi} \frac{2\sqrt{l_+ l_-}}{e^{1/4} a_0}.$$

Первое слагаемое в данном выражении — наведенная скорость соседних элементов нити: l_{\pm} — длины элементов нити, прилегающие к точке \mathbf{s}_i (локальный вклад), a_0 — радиус ядра вихревой нити, \mathbf{s}''_i — вторая производная по параметру ξ . Интеграл вдоль отрезка $\mathbf{s}_j - \mathbf{s}_{j+1}$ берется, и его значение определяется выражением

$$\mathbf{v}_{nl}^j(\mathbf{s}_i) = \frac{\kappa}{4\pi} \frac{2}{4ac - b^2} \left[\frac{b + 2c}{\sqrt{a + b + c}} - \frac{b}{\sqrt{a}} \right] \mathbf{p} \times \mathbf{q}.$$

Здесь использованы следующие обозначения: $\mathbf{p} = \mathbf{s}_j - \mathbf{s}_i$, $\mathbf{q} = \mathbf{s}_{j+1} - \mathbf{s}_j$, $a = |\mathbf{p}|^2$, $b = 2\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}$, $c = |\mathbf{q}|^2$. В итоге полная наведенная скорость определяется суммированием по всем элементам нити (нелокальный вклад), исключая прилегающие отрезки:

$$\mathbf{v}_{nl}(\mathbf{s}_i) = \sum_{j \neq i-1, j \neq i} \mathbf{v}_{nl}^j.$$

В процессе моделирования происходит изменение расстояний между точками вихревых петель. Для поддержания точности вычисления производных на одном уровне используется специальная процедура. Суть процедуры заключается в следующем: если расстояние между точками становится в полтора и более раз меньше изначально выбранного пространственного шага вдоль нити $\Delta\xi_0$, то промежуточная точка убирается, и, наоборот, если расстояние между точками становится в полтора и более раз больше, чем $\Delta\xi_0$, то между ними вставляется еще одна точка. Точка вставляется на середине дуги окружности элементы вихревой нити:

$$R_i^{-1} = |\mathbf{s}'_i| = |(\mathbf{s}'_i + \mathbf{s}''_{i+1}) / 2|.$$

Координата точки определяется выражением

$$\mathbf{s}_{i'} = (\mathbf{s}_i + \mathbf{s}_{i+1}) / 2 + \left(\sqrt{R_i^2 - l_+^2 / 4} - R_i \right) R_i \mathbf{s}''_i.$$

Динамика нитей усложняется еще тем, что при своем движении сегменты вихревых нитей (нити) могут пересекаться (реконnectировать). Процессы реконнекции, в результате которых очень сильно изменяется топология вихревой структуры, не описываются аналитически. В численных работах, начиная с работы Шварца, используются различные критерии реконнекций. Эти критерии основываются на физической интуиции и результатах численного моделирования. В работе [18] было проведено сравнение расчетов при применении трех наиболее используемых критериев реконнекций. Показано, что физически обоснованным и менее вычислительно затратным критерием является энергогеометрический. Суть этого критерия состоит в том, что если вихревые точки сегментов нитей подошли ближе пространственного шага вдоль нити $\Delta\xi_0$ и при этом после реконнекций длина вихревых нитей уменьшается, а угол между ними больше 10 градусов,

то процессы реконнекций осуществлялись. Указанный критерий был использован для моделирования динамики вихревого клубка.

Для интегрирования уравнений движения по времени была использована схема Рунге–Кутты 4-го порядка точности. Более подробно детали, использованной математической модели и особенности ее численной реализации, описаны в работе [18].

2.3. Структурные функции и спектр энергии

Для определения спектра поля скорости требуется найти структурную функцию второго порядка, как описано, например, в работах [20–25].

Структурная функция второго порядка определяется как изменение скорости между двумя точками пространства, спроектированного на вектор \mathbf{l} , соединяющий эти две точки (и нормированное на длину этого вектора l):

$$C_{ll}(l) = \langle \delta v_{ll}(l)^2 \rangle, \quad (3)$$

где

$$\delta v_{ll}(l) = ([\mathbf{v}(\mathbf{r} + \mathbf{l}) - \mathbf{v}(\mathbf{r})] \cdot \mathbf{l}) / l.$$

Под угловыми скобками подразумевается усреднение по ансамблю, т.е. для всех возможных значений \mathbf{r} . В теории Колмогорова (K41) [21,22] показано, что для однородной изотропной турбулентности $C_{ll}(l) \sim \varepsilon^{2/3} l^{2/3}$, где ε — плотность диссипации энергии. В общем случае, используя преобразование Фурье, можно показать, что зависимости $C_{ll}(l) \sim l^\alpha$ в пространстве координат соответствует зависимость $E(k) \propto k^{-\alpha-1}$ в пространстве волновых чисел.

Таким образом, определение спектральных характеристик системы сводится к следующему алгоритму: вычисляется интересующая конфигурация вихревых нитей, далее в окружающей области находится поле

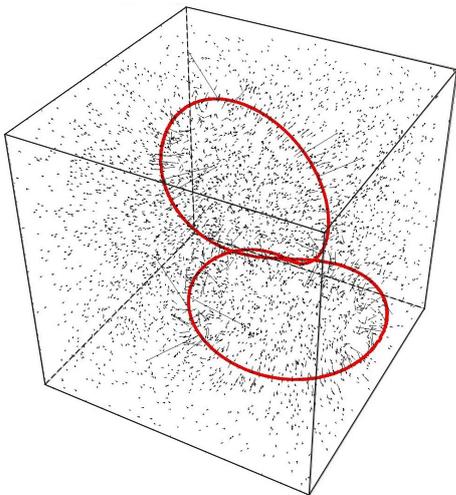


Рис. 2. (Онлайн в цвете) Пример поля скорости, создаваемого двумя вихревыми петлями.

скоростей, соответствующее полученной конфигурации (см., например, рис. 2). К найденному полю скорости применяется формула (3) и преобразование Фурье для перехода в пространство волновых векторов.

Во всех приведенных далее расчетах поле значения скорости определялись в 25000 точках, выбранных случайным образом в области, занимаемой вихревым клубком.

3. Результаты и обсуждение

Динамика вихревых нитей неразрывно связана с полями скоростей и их энергетическими характеристиками. Поэтому для самосогласованного изложения, прежде чем переходить к описанию энергетических характеристик исследуемых систем, опишем их характерные свойства.

3.1. Характер динамики вихревых нитей

Динамика вихревых петель определяется рядом факторов. Главным образом, это влияние элементов вихревых элементов друг на друга и сила трения между вихревыми нитями и нормальной компонентой гелия. Отсюда следует ограниченное число сценариев эволюции петель. Так, на практике реализуется либо сближение петель и их последующая реконнекция, либо ускоренное движение петель и их сжатие под действием трения. При наличии противотока петли будут поворачиваться в плоскость, перпендикулярную направлению \mathbf{V}_{ns} , а также сжиматься или раздуваться в зависимости от угла между плоскостью петли и направлением \mathbf{V}_{ns} , в соответствии с уравнением (2). Если петли находятся близко друг к другу, то их взаимное влияние будет приводить к деформации ближайших элементов петель с образованием пирамидальных структур (кинков) (подробнее см., например, [19]).

Для оценки характера спектра на масштабах порядка размеров петель мы рассмотрели несколько различных конфигураций вихревых петель непосредственно перед реконнекциями (см. рис. 3). Соответствующие начальные условия приведены в разделе, описывающем алгоритм моделирования динамики вихревых нитей. Выбор конфигураций непосредственно перед реконнекциями мотивирован желанием оценить возможное влияние кинков на спектральные характеристики поля скорости системы.

3.2. Свойства вихревого клубка

При нахождении энергетического спектра поля скорости были использованы вихревые конфигурации, полученные в работе [18]. Для понимания основных физических характеристик исследуемого объекта кратко опишем рассмотренные вопросы и некоторые основные (касающиеся силы трения и структуры вихревого клубка) результаты работы [18]. В этой работе

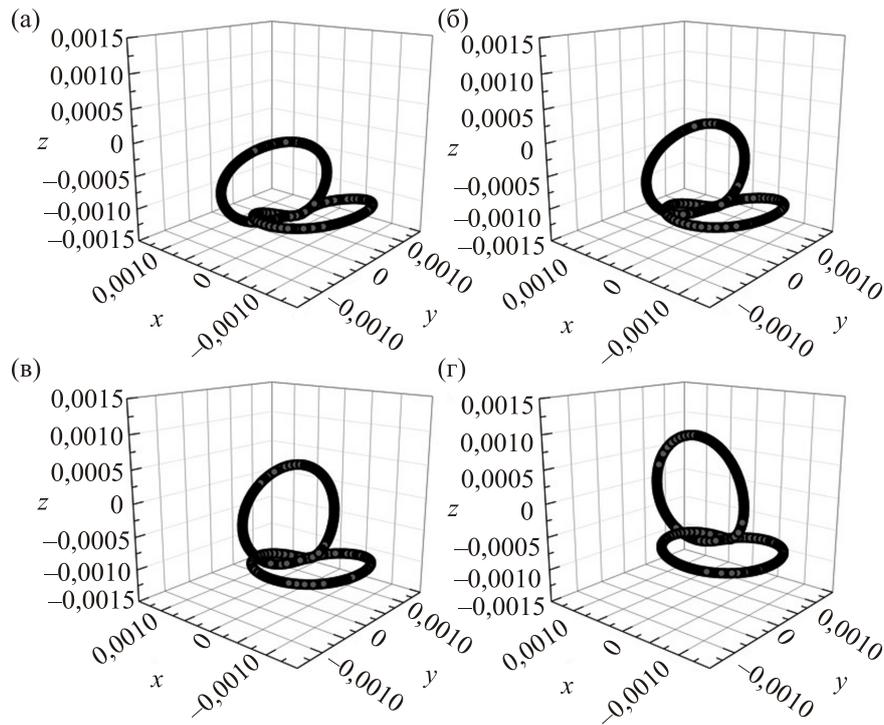


Рис. 3. Конфигурации вихревых петель перед реконнекциями для различных начальных углов между плоскостями петель: 30° (а), 45° (б), 60° (в), 90° (г).

было проведено детальное исследование средних характеристик вихревого клубка, а именно, были получены зависимости плотности вихревого клубка, скорости реконнекций, анизотропии, среднеквадратичных значений кривизны, скорости дрейфа и плотности силы трения от скорости противотока и температуры. Также была получена детальная статистическая информация об общих и локальных свойствах вихревой структуры: корреляционные функции ориентации вихревых нитей, распределение петель по их длинам, корреляции между длиной и среднеквадратичной кривизной петель, функции распределения кривизны нитей и т.д.

Все величины рассчитывались в стационарном состоянии (плотность вихревых нитей флуктуирует вокруг некоторого постоянного значения), которое было достигнуто для системы при всех значениях температур и V_{ns} . Характерные примеры вихревых конфигу-

раций в стационарном состоянии для различных температур приведены на рис. 4.

В работе проводилось исследование анизотропии вихревого клубка и характеризующих его индексов. Было показано, что с повышением температуры клубок становится более ориентированным в направлении, перпендикулярном к скорости противотока (становится более сплюснутым), также показано, что анизотропные индексы практически не зависят от скорости противотока.

При анализе структуры вихревого клубка с помощью автокорреляционной функции, построенной для вихревой ориентации, было показано, что корреляция скоростей элементов вихревого клубка $\langle \mathbf{s}'(r_1) \mathbf{s}'(r_2) \rangle$ падает до значений близких к нулевым на межвихревых расстояниях \tilde{l} . На основании этого в работе был сделан вывод о том, что конфигурация сегментов вихре-

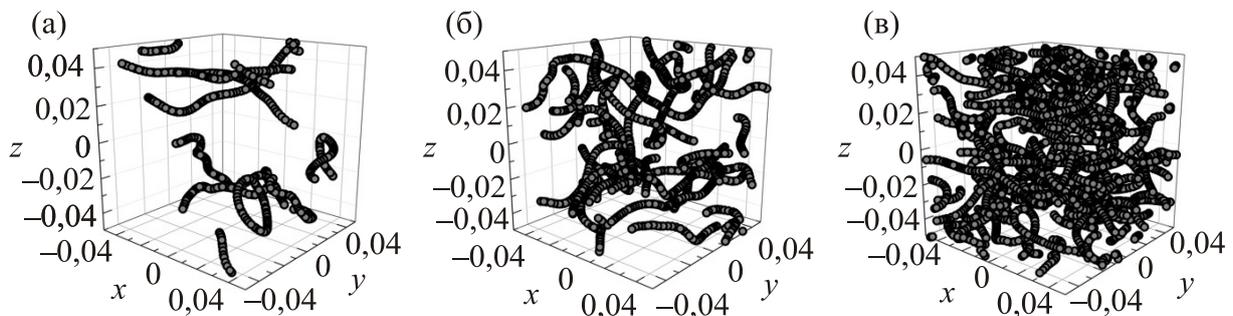


Рис. 4. Характерные структуры вихревых клубков при скорости противотока $V_{ns} = 0,5$ см/с и различных температурах T , К: 1,3 (а), 1,6 (б), 1,9 (в).

вых нитей напоминает случайное блуждание с длиной корреляции порядка межвихревого расстояния, т.е., что не существует когерентных вкладов вихревых нитей в поле скорости на расстояниях больше межвихревых. Также в работе [18] было сделано предположение, что энергетический спектр вихревого клубка $E(k)$ должен быть определен вкладами отдельных вихревых нитей от масштабов, где справедливо: $k\tilde{l} \ll 1$ вплоть до размера клубка.

Еще один важный результат, полученный в [18], касается силы трения. Так, было показано, что сила взаимного трения пропорциональна скорости противотока в кубе, а полученный коэффициент пропорциональности напрямую связан с экспериментально используемой константой Гортера–Меллинка. Сравнение с экспериментальными данными показало, что был получен правильный порядок и корректная зависимость константы Гортера–Меллинка от температуры.

3.3. Спектр энергии вихревого клубка

Согласно описанному выше алгоритму, были вычислены структурные функции для различных конфигураций вихревых клубков. Для минимизации ошибок проводилось усреднение значений структурных функций, полученных для десяти различных конфигураций, принадлежащих стационарному состоянию. Процедура усреднения проводилась для всех температур и скоростей противотока. Зависимости структурных функций от пространственного масштаба l при температуре $T = 1,6$ К для различных скоростей противотока показаны на рис. 5.

Все зависимости, приведенные на рис. 5, имеют два характерных участка. На масштабах порядка и меньше межвихревых расстояний при увеличении l наблюдается рост значений структурных функций. На больших масштабах структурные функции имеют очень слабую зависимость от l , а именно $C_{ll}(l) \sim l^{0,05}$. В дальнейших рассуждениях мы считаем C_{ll} независимой от l . Отметим, что характерные межвихревые расстояния, как было получено в работе [18], изменяются в пределах от 0,005 до 0,04 см в зависимости от скорости противотока и температуры. Увеличение температуры и скорости противотока приводит к уменьшению межвихревых расстояний. Для других температур зависимость структурных функций от l и V_{ns} качественно похожи на зависимость, полученную для $T = 1,6$ К. Отличия заключаются в значениях структурных функций и некоторой разнице в наклоне кривых на межвихревых масштабах, которое мы опишем далее.

Рассмотрим подробнее зависимости $C_{ll}(l)$ на масштабах порядка межвихревых. Во всех случаях, при фиксированном значении температуры, зависимости структурных функций от l при различных V_{ns} имели почти одинаковый наклон (см. рис. 5). Поэтому после получения уравнений кривых для различных значений ско-

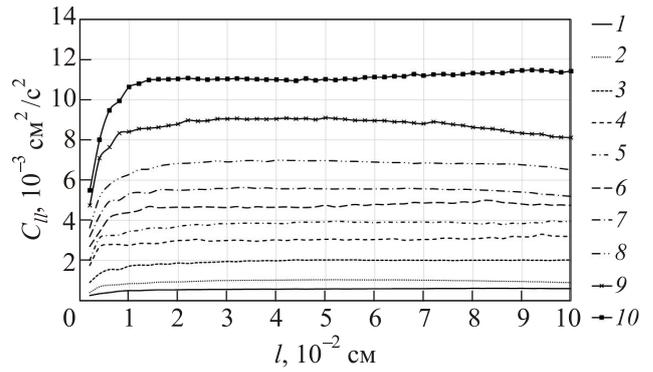


Рис. 5. Зависимость структурной функции от l при $T = 1,6$ К для различных значений V_{ns} , см/с: 0,3 (1), 0,4 (2), 0,5 (3), 0,6 (4), 0,7 (5), 0,8 (6), 0,9 (7), 1,0 (8), 1,1 (9), 1,2 (10).

ростей противотока было проведено усреднение по их наклонам. Эти результаты представлены на рис. 6, там же для сравнения приведены функции $C_{ll}(l)$ при $V_{ns} = 0,5$ см/с для различных температур.

Наклоны аппроксимирующих кривых равны: 0,3, 0,35 и 0,4 для температур: $T = 1,3, 1,6$ и $1,9$ К. Данные значения соответствуют $E(k) \sim k^{-1,3}$, $E(k) \sim k^{-1,35}$ и $E(k) \sim k^{-1,4}$. Для установления возможных причин наблюдения таких спектральных характеристик отдельно рассмотрены спектры, создаваемые вихревыми кольцами на масштабах, соответствующих средним межвихревым расстояниям вихревого клубка. Полученные результаты изложены в следующем подразделе.

Отдельно рассмотрим зависимости значений структурных функций от скоростей противотока. Как показано на рис. 5, значения структурных функций на масштабах, больших, чем межвихревые, практически не зависят от l , но существенно увеличиваются при уве-

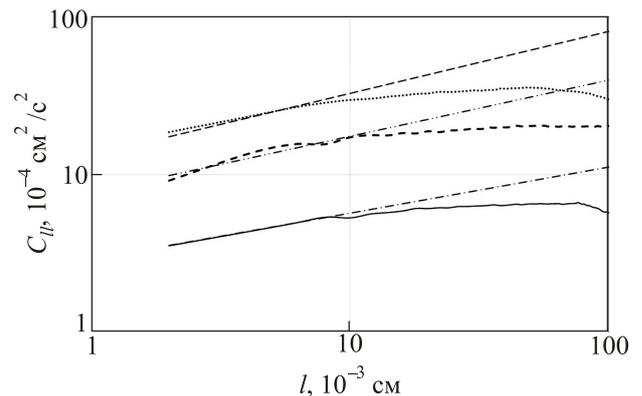


Рис. 6. Зависимость структурной функции от l при $V_{ns} = 0,5$ см/с для: $T = 1,3$ К — сплошная, $T = 1,6$ К — пунктирная, $T = 1,9$ К — точечная линии соответственно. Аппроксимации, построенные в области межвихревых расстояний, обозначены линией с длинными штрихами и штрихпунктирными линиями. Аппроксимации строились при фиксированных температурах путем усреднения наклонов линий, полученных при различных V_{ns} .

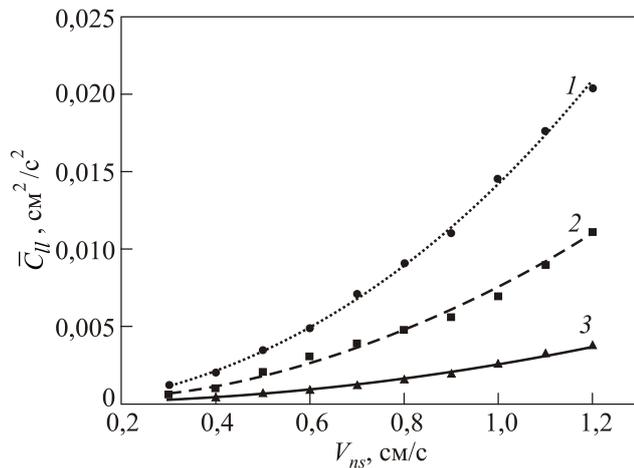


Рис. 7. Зависимость среднего значения структурной функции (усреднение проводилось на масштабах больше межвихревого расстояния) от V_{ns} для различных температур. Уравнения аппроксимирующих кривых и соответствующие значения коэффициента детерминации R^2 : $C_{||} = 0,0143V_{ns}^{2,0872}$, $R^2 = 0,999$, $T = 1,9$ К; $C_{||} = 0,0075V_{ns}^{2,0632}$, $R^2 = 0,9914$, $T = 1,6$ К; $C_{||} = 0,0025V_{ns}^{2,06}$, $R^2 = 0,9971$, $T = 1,3$ К.

личении скорости противотока. Для выяснения характера этой зависимости были вычислены средние значения структурных функций $\bar{C}_{||}$ на масштабах, больших межвихревых расстояний, для всех температур и скоростей противотока (см. рис. 7).

Полученные зависимости хорошо аппроксимируются квадратичными функциями (см. сплошную, пунктирную и точечную линии на рис. 7). Как указывалось ранее, $C_{||}(l) \sim \varepsilon^{2/3}l^{2/3}$, где ε — плотность диссипации энергии. В данном случае $C_{||}(l) \sim \varepsilon^{2/3}l^0$ и как следует из аппроксимаций $C_{||}(l) \sim V_{ns}^2$, т.е. $\varepsilon^{2/3} \sim V_{ns}^2$ или $\varepsilon \sim V_{ns}^3$. Таким образом, плотность диссипации энергии $\sim V_{ns}^3$. В работе [18], как отмечалось ранее в разделе, посвященном свойствам клубка, сила трения между вихревым клубком и нормальной компонентой — $F_{ns} \sim V_{ns}^3$. Отсюда, можно предположить, что диссипация энергии в системе связана с работой силы трения.

3.4. Спектр энергии вихревых петель

На масштабах порядка межвихревых расстояний, характерных для вихревых клубков, были вычислены спектральные характеристики полей скоростей, создаваемых вихревыми конфигурациями, представленными на рис. 3. Результаты показаны на рис. 8. Полученные структурные функции имеют несколько характерных участков, протяженность которых зависит от конфигурации петель. Наклон аппроксимирующих кривых (см. сплошные линии на рис. 8) увеличивается с уменьшением угла между плоскостями начального расположения петель, т.е. для более пространственно скоррелированных вихревых конфигураций. Значения углов наклона $C_{||}$ изменяются в диапазоне от 0,45 до 0,66, что соот-

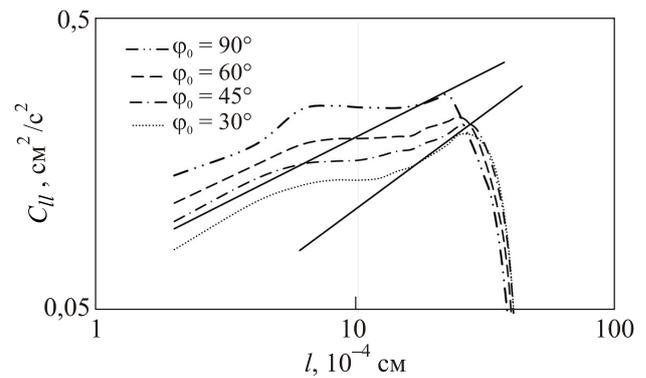


Рис. 8. Зависимость структурной функции от l для вихревых конфигураций, соответствующих рис. 3.

ветствует спектрам $E(k) \sim k^{-1,45}$ и $E(k) \sim k^{-5/3}$. Отметим, что для петель, далеких от точки реконнекции и не имеющих характерных кинков, подобная зависимость в области больших значений l не наблюдается.

Во всех рассмотренных случаях наличие кинков приводит к характерным особенностям в спектре энергии. Стоит ожидать, что при увеличении числа кинков спектр энергии должен иметь более крутой наклон. Очевидно, что их число существенно растет с увеличением плотности вихревого клубка и числа реконнекций, которые, в свою очередь, растут с увеличением температуры. Поэтому при более высоких температурах на межвихревых масштабах должен наблюдаться больший наклон $E(k)$, чем при более низких. Такой характер $E(k)$ и был получен для вихревых клубков в предыдущем разделе.

4. Заключение

Изучены спектральные характеристики вихревых клубков в сверхтекучем гелии при различных температурах и скоростях противотока. Показано, что на масштабах больше межвихревых расстояний наблюдается спектр близкий к $E(k) \sim k^{-1}$. Стоит отметить, что подобный спектр характерен для прямой вихревой нити. Рассмотренная нами система, т.е. сверхтекучая турбулентность при наличии противотока, по своей сути является анизотропной, благодаря выделенному направлению скорости противотока. Наличие противотока приводит к поляризации клубка, что было установлено при анализе анизотропных индексов в работе [18], и сближает систему с системами, обладающими осевой симметрией, например, с прямой вихревой нитью. В данном случае сходство выразилось в характере спектра на больших масштабах.

На масштабах порядка межвихревых расстояний спектр энергии имеет вид: $E(k) \sim k^{-\alpha}$, где $1,3 < \alpha < 1,4$. Причем большие значения α соответствуют большим температурам. На примере реконнектирующих вихревых петель, показано, что такое поведение может быть

связано с наличием характерных особенностей — кинков и увеличением их числа с ростом температуры.

Кроме того, установлено, что плотность диссипации энергии пропорциональна кубу скорости противотока нормальной и сверхтекучей компонент гелия. Аналогичную зависимость от скорости противотока имеет сила трения между вихревым клубком и нормальной компонентой гелия. Данный факт позволяет предположить, что диссипация энергии в исследуемой системе, главным образом, связана с силой трения.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №14-29-00093).

1. R.J. Donnelly, *Quantized Vortices in Helium II*. Cambridge University Press, Cambridge (1991).
2. M.R. Smith, R.J. Donnelly, N. Goldenfeld, and W.F. Vinen, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 2583 (1993).
3. S.R. Stalp, L. Skrbek, and R.J. Donnelly, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 4831 (1999).
4. W.F. Vinen, *Phys. Rev. B* **61**, 1410 (2000).
5. S.I. Davis, P.C. Hendry, and P.V.E. McClintock, *Physica B* **280**, 43 (2000).
6. W. Schoepe, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 095301 (2004).
7. D.I. Bradley, D.O. Clubb, S.N. Fisher, A.M. Guenault, R.P. Haley, C.J. Matthews, G.R. Pickett, V. Tsepelin, and K. Zaki, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 035301 (2006).
8. P.M. Walmsley, A.I. Golov, H.E. Hall, A.A. Levchenko, and W.F. Vinen, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 65302 (2007).
9. V. Eltsov, R. de Graaf, R. Hanninen, M. Krusius, R. Solntsev, V. L'vov, A. Golov, and P. Walmsley, in: *Progress in Low Temperature Physics: Quantum Turbulence of Progress in Low Temperature Physics*, Elsevier (2009), vol. 16, p. 45.
10. W. Schoepe, *J. Low Temp. Phys.* **161**, 526 (2010).
11. C. Nore, M. Abid, and M. Brachet, *Phys. Fluids* **9**, 2644 (1997).
12. D.C. Samuels and C.F. Barenghi, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 4381 (1998).
13. M. Tsubota, T. Araki, and S.K. Nemirovskii, *Physica B* **284**, 79 (2000).
14. T. Araki and M. Tsubota, *J. Low Temp. Phys.* **121**, 405 (2000).
15. T. Araki, M. Tsubota, and S.K. Nemirovskii, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 145301 (2002).
16. M. Leadbeater, D.C. Samuels, C.F. Barenghi, and C.S. Adams, *Phys. Rev. A* **67**, 015601 (2003).
17. S. Fujiyama, A. Mitani, M. Tsubota, D.I. Bradley, S.N. Fisher, A.M. Guenault, R.P. Haley, G.R. Pickett, and V. Tsepelin, *Phys. Rev. B* **81**, 180512 (2010).
18. L. Kondaurova, V. L'vov, A. Pomyalov, and I. Procaccia, *Phys. Rev. B* **89**, 014502 (2014).
19. V.A. Andryushchenko, L.P. Kondaurova, and S.K. Nemirovskii, *J. Low Temp. Phys.* **185**, 377 (2016).
20. U. Frisch, *Turbulence*, Cambridge University Press, Cambridge (1995).
21. A.N. Kolmogorov, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **30**, 299 (1941).
22. A.N. Kolmogorov, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **32**, 19 (1941).
23. A.S. Monin and A.M. Yaglom, *Statistical Fluid Mechanics*, MIT Press, Cambridge, MA (1975), Pt. 2.
24. L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, Pergamon, New York (1987).
25. M. Lesieur, *Turbulence in Fluids. Fluid Mechanics and its Applications*, Springer, Dordrecht (2008).

Counterflow energy spectra of quantum turbulence at finite temperatures

V.A. Andryushchenko and L.P. Kondaurova

The spectrum of the energy generated by the vortex tangle in counterflow of normal and superfluid components at different temperatures was obtained. The counterflow magnitude was varied from 0.3 cm/s to 1.2 cm/s and the temperature was varied from 1.3 K to 1.9 K. It was shown that $E(k) \sim k^{-\alpha}$ at intervortex scale, where $1.3 < \alpha < 1.4$ depending on the temperature. At larger scales $E(k) \sim k^{-1}$. It was obtained that change of the kinetic energy per unit mass is proportional to the cube of the counterflow of normal and superfluid components at Gorter–Mellink mode, thus the energy dissipation originate from friction between normal component of helium and vortex tangle.

PACS: 67.25.dk Vortices and turbulence;
 47.37.+q Hydrodynamic aspects of superfluidity; quantum fluids;
 03.75.Kk Dynamic properties of condensates; collective and hydrodynamic excitations, superfluid flow.

Keywords: superfluidity, vortex structure, quantum turbulence.