

Коллапсирующие вихревые нити и спектр квантовой турбулентности

В.А. Андрющенко, С.К. Немировский

Институт теплофизики СО РАН, пр. Академика Лаврентьева, 1, г. Новосибирск, 630090, Россия

Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова, 2, г. Новосибирск, 630090, Россия

E-mail: nemir@itp.nsc.ru

Статья поступила в редакцию 28 июля 2016 г., опубликована онлайн 25 ноября 2016 г.

В рамках метода корреляционных функций и метода конфигураций квантовых вихрей вычисляется энергетический спектр трехмерного поля скорости, индуцированного коллапсирующими (непосредственно перед осуществлением реконнекции) вихревыми нитями. Постановка задачи мотивирована идеей моделирования классической турбулентности набором хаотических квантованных вихревых нитей. Среди различных аргументов, поддерживающих идею квазиклассического поведения квантовой турбулентности, самым сильным, вероятно, является реализация колмогоровского спектра энергии типа $E(k) \propto k^{-5/3}$, полученная в ряде численных работ. Еще одна цель связана с важной и интенсивно обсуждаемой темой, касающейся роли гидродинамического коллапса в формировании спектров турбулентности. В результате вычислений продемонстрировано, что реконнектирующие вихревые нити в момент касания создают поле скоростей, имеющее сингулярную особенность. Такая конфигурация вихревых нитей генерирует спектр $E(k)$, близкий к колмогоровскому. Обсуждается возможная причина этого факта, а также вероятные причины отклонения. Полученные результаты комментируются с точки зрения как классической, так и квантовой турбулентности.

В рамках методу кореляційних функцій і методу конфігурацій квантових вихорів обчислюється енергетичний спектр тривимірного поля швидкості, індукованого колапсирующими (безпосередньо перед здійсненням реконекції) вихровими нитями. Постановка завдання мотивована ідеєю моделювання класичної турбулентності набором хаотичних квантованих вихрових ниток. Серед різних аргументів, що підтримують ідею квазікласичної поведінки квантової турбулентності, найсильнішим, ймовірно, є реалізація колмогоровського спектра енергії типу $E(k) \sim k^{-5/3}$, отримана у ряді чисельних робіт. Ще одна мета пов'язана з важливою й інтенсивно обговорюваною темою, що стосується ролі гідродинамічного колапсу в формуванні спектрів турбулентності. В результаті обчислень продемонстровано, що реконектуючі вихрові ниті в момент торкання створюють поле швидкостей, що має сингулярну особливість. Така конфігурація вихрових нитей генерує спектр $E(k)$ близький до колмогоровського. Обговорюється можлива причина цього факту, а також ймовірні причини відхилення. Отримані результати коментуються з точки зору як класичної, так і квантової турбулентності.

PACS: 67.25.dk Вихри и турбулентность;

47.37.+q Гидродинамические аспекты сверхтекучести, квантовые жидкости;

03.75.Kk Динамические свойства конденсатов; коллективные и гидродинамические возбуждения, течение сверхтекучей жидкости.

Ключевые слова: гидродинамический коллапс, квантовые вихревые нити.

1. Введение и мотивация

Двумя различными способами изучается спектр энергии трехмерного течения сверхтекучего гелия, индуцируемого сталкивающимися (реконнектирующими) кван-

товыми вихревыми нитями. Обсуждается возможность реализации колмогоровского спектра типа $E(k) \propto k^{-5/3}$.

Первая мотивация этой работы связана с важной и интенсивно обсуждаемой сейчас темой, касающейся роли гидродинамического коллапса (или спонтанно раз-

вивающихся сингулярных решений) в формировании спектров турбулентности (см., например, [1–3] и приведенные там ссылки). Яркие примеры такого типа спектров — спектр Филлипса для ветровых волн на поверхности океана, созданных клинообразными волнами — так называемыми каспами. Другой пример — спектр Кадомцева–Петвиашвили для акустической турбулентности, создаваемой ударными волнами [1,2]. Как волны Филлипса, так и ударные волны-разрывы являются сингулярными структурами. Появление таких особенностей — когерентный процесс, соответственно, сингулярные объекты являются когерентными структурами. Таким образом, приходим к очень важной проблеме сосуществования турбулентности (хаотической части) и когерентных структур (см., например, [2]).

В классической гидродинамике известен сценарий коллапса, основанный на так называемом разрушении вихря. Суть этого сценария — формирование особенности завихренности поля $\omega = \nabla \times \mathbf{v}$ в трехмерных уравнениях Эйлера для несжимаемой жидкости. Это явление было проанализировано в ряде работ Кузнецова с соавторами (см., например, [1,4] и приведенные в них ссылки) в рамках интегрируемой несжимаемой гидродинамической модели с гамильтонианом $\int |\omega| d\mathbf{r}$. Схематично процесс изображен на рис. 1. В некоторой точке \mathbf{a}_0 (точка касания) возможно образование сингулярности поля завихренности. Изучая уравнения Эйлера в терминах завихренности ω , Кузнецов пришел к выводу, что в непосредственной близости от точки касания \mathbf{a}_0 максимальное значение завихренности ω_{\max} развивается взрывным образом, достигая бесконечных значений за конечный интервал времени. Пространственная зависимость поля завихренности в поперечном направлении ρ_{\perp} к вихревому пучку имеет вид $\omega \propto 1/\rho_{\perp}^{2/3}$, что эквивалентно колмогоровскому спектру.

В квантовых жидкостях завихренность в значительной степени локализована, т.е. сосредоточена в очень тонких вихревых трубках или вихревых нитях, поэто-

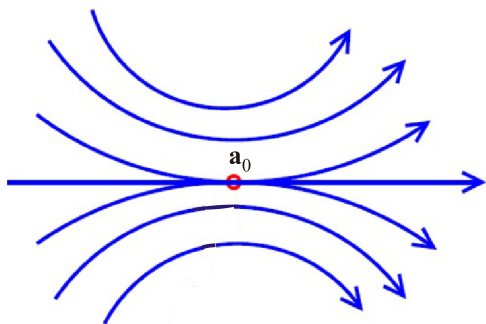


Рис. 1. Схематическое изображение, иллюстрирующее коллапс поля завихренности [2]. Регулярное первоначально распределение завихренности спонтанно концентрируется в точке \mathbf{a}_0 , формируя сингулярную структуру.

му описанный выше сценарий не может реализоваться. В этом случае, однако, особенность может возникать из-за столкновения взаимодействующих вихревых нитей. Результат такого столкновения — появление очень острого излома (кинка), причем энергия взаимодействия между близко расположенными элементами может существенно превышать собственную энергию этих элементов.

Вторая мотивация предлагаемого исследования связана с проблемой моделирования классической турбулентности набором хаотичных вихревых нитей. Эта идея обсуждается уже довольно долгое время. Более подробную информацию см., например, в работах [5–7]. В классических жидкостях тонкие вихревые трубки не существуют, поскольку они расширяются из-за вязких эффектов, поэтому понятие вихревых нитей может рассматриваться только в качестве модели. Квантовые жидкости, где вихревые нити представляют собой реальные объекты, дают прекрасную возможность для изучения вопроса о том, способна ли динамика набора вихревых линий воспроизводить (по крайней мере частично) свойства реальной гидродинамической турбулентности.

Среди различных аргументов, поддерживающих идею квазиклассического поведения квантовой турбулентности, самым сильным является наличие зависимости спектров энергии E от волновых векторов k , полученные при численном моделировании и в экспериментах. Существует много работ, которые демонстрируют зависимость $E(k)$, близкие к колмогоровскому спектру: $E(k) \propto k^{-5/3}$. Эти работы основаны на методе вихревых нитей [8–11] и уравнении Гросса–Питаевского [12–14]. Наличие подобных спектров, несомненно, демонстрирует связь динамики хаотичных вихревых нитей с классической турбулентностью и говорит о неоднородном распределении энергии при малых значениях k (т.е. на больших масштабах). Однако, несмотря на огромную важность этого результата и на многочисленные обсуждения, вопрос, каким образом генерируется колмогоровский спектр, остается открытым. Поэтому весьма заманчиво найти механизм появления спектра типа колмогоровского. Мы предлагаем рассмотреть коллапсирующие вихревые нити в качестве кандидата на эту роль.

Предлагается два различных метода для решения данной задачи: численный метод, связанный с определением корреляционных функций, и аналитический метод, основанный на связи конфигураций квантовых вихрей с трехмерным полем скорости.

Во второй главе изложен метод корреляционных функций, который позволяет определить спектр энергии для векторного поля скоростей. Кроме того, описана методика получения конфигурации вихревых петель перед реконнекцией и нахождения соответствующего трехмерного поля скорости.

В третьей главе представлен метод расчета энергетического спектра с помощью конфигурации вихревой линии. Этот метод позволяет записать энергию потока в терминах взаимодействия различных петель. Поэтому, выбирая аналитическое соотношение для формы реконnectирующих вихревых линий, возможно выполнить аналитическое вычисление энергетических спектров $E(k)$.

В заключении мы сравниваем результаты, полученные в рамках двух различных методов, и обсуждаем причины близости полученных спектров к зависимости Колмогорова $E(k) \propto k^{-5/3}$, а также причины их расхождения.

2. Метод корреляционных функций

Рассмотрим структурные функции для векторного поля. В частности, для определения спектра поля скорости требуется нахождение структурной функции второго порядка [6,15–19].

Структурная функция второго порядка определяется как квадрат изменения скорости между двумя точками пространства, спроектированного на отрезок, соединяющий эти две точки (и нормированного на длину отрезка l):

$$C_{ij}(l) = \langle \delta v_{ij}(l)^2 \rangle,$$

где

$$\delta v_{ij}(l) = [\mathbf{v}(\mathbf{r} + \mathbf{l}) - \mathbf{v}(\mathbf{r})]l/l.$$

Под угловыми скобками подразумевается усреднение по ансамблю. В теории Колмогорова (К41) [15,16] показано, что для однородной и изотропной турбулентности $C_{ij}(l) \sim l^{2/3}$. Данная зависимость в k -пространстве соответствует спектру $E(k) \propto k^{-5/3}$. В общем случае, используя преобразование Фурье, можно показать, что зависимости $C_{ij}(l) \sim l^\alpha$ в пространстве координат соответствует зависимость $E(k) \propto k^{-\alpha-1}$ в пространстве волновых чисел (подробно см. книгу Фриша [6]). Для проверки возможности генерации реконnectирующими вихревыми нитями колмогоровского спектра необходимо установить, справедлива ли зависимость $C_{ij}(l) \sim l^{2/3}$.

Для определения вида структурной функции необходимо знать поле скорости, создаваемое вихревыми нитями. Описанию метода вычисления вихревой конфигурации перед реконnectией и генерируемого ею поля скорости посвящен следующий подраздел.

2.1. Расчет динамики вихревых линий

Для получения вихревой конфигурации перед реконnectией проведено моделирование динамики вихревых петель в рамках метода вихревой нити. Суть метода заключается в том, что незначительное изменение ядра

квантованных вихрей игнорируется, а вихри аппроксимируются нитями с заданной структурой ядра (фиксированным диаметром). В расчетах вихревая нить аппроксимируется набором прямых вихревых отрезков, размеры которых выбираются много меньшими межвихревого расстояния. Скорость точки вихревой нити определяется уравнением Био-Савара (в отсутствие нормальной компоненты и покоящейся сверхтекучей компоненты гелия):

$$\mathbf{V}_B = \frac{\kappa}{4\pi} \int_L \frac{(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}) \times d\mathbf{s}_1}{|\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}|^3},$$

где \mathbf{s}, \mathbf{s}_1 — координаты точек на вихревой нити, интегрирование ведется по всей конфигурации нитей L . Величиной κ обозначен квант циркуляции поля скорости, равный h/m_4 , где h — постоянная Планка, m_4 — масса атома гелия. Координатная система и параметризация вихревых нитей схематично представлена на рис. 2. Таким же образом параметризованы вихревые нити и в разд. 3. При наличии нормальной компоненты, но в случае ее нулевой скорости, уравнение движения вихревой нити принимает следующий вид:

$$\mathbf{V}_L = \mathbf{V}_B - \alpha \mathbf{s}' \times \mathbf{V}_B + \alpha' \mathbf{s}' \times [\mathbf{s}' \times \mathbf{V}_B],$$

где α, α' — зависящие от температуры коэффициенты трения, \mathbf{s}' — производная радиуса-вектора вдоль кривой, другими словами, касательный вектор. В качестве начальной конфигурации системы выбирались два одинаковых кольца (начальные радиусы R_0 равны между собой и $R_0 = 10^{-3}$ см), лежащие в одной плоскости на расстоянии $2,5 R_0$. Векторы циркуляции выбраны сонаправленными. Моделирование проводилось при температуре 1,3 К. При данной температуре коэффициенты трения равны $\alpha = 0,036$ и $\alpha' = 0,014$. Стоит отметить, что при других начальных условиях и температурах геометрическая конфигурация вихревых нитей вблизи

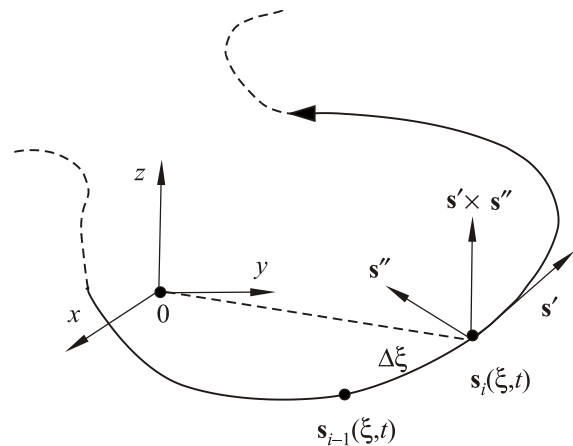


Рис. 2. Координатная система. Вихревая нить задана в естественной параметризации с натуральным параметром ξ .

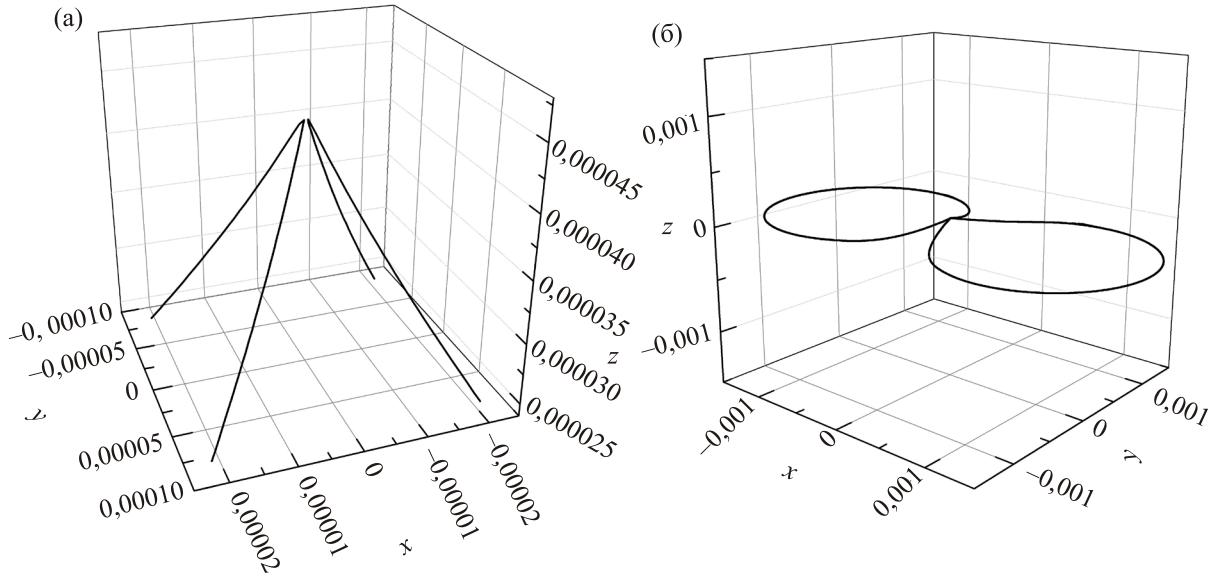


Рис. 3. Геометрические конфигурации кинков (а) и вихревых петель (б) перед реконнекцией.

точки реконнекции была практически одинаковой, как показано в работе [20]. Там же более подробно приведены особенности динамики вихревых петель перед реконнекцией при ненулевых температурах и описание использованного численного алгоритма.

После получения конфигурации вихревой нити необходимо вычислить создаваемое ею поле скорости. Для этого в области, где требовалось найти поле скорости, случайным образом выбирались 25000 точек. В выбранных точках, согласно уравнению Био-Савара, определялась скорость, индуцируемая полученной вихревой конфигурацией. Описанию полученных вихревых конфигураций посвящен следующий раздел.

2.2. Форма реконнектирующих вихревых линий

При выбранных начальных условиях (см. разд. 2.2) вихревые петли эволюционировали следующим образом: петли двигались перпендикулярно плоскости своего начального расположения, а их ближайшие участки начинали сближаться, образуя структуру пирамидального типа (см. рис. 3). Для определения вида спектра непосредственно перед реконнекцией рассматривается область с линейными размерами $0,1R_0 \times 0,1R_0 \times 0,1R_0$ ($R_0 = 10^{-3}$ см), окружающая ближайшие точки вихревых нитей. В этой области ближайшие вихревые сегменты образуют пирамидальную структуру (кинк), рис. 3(а). Для оценки влияния геометрической конфигурации на спектр поля скорости рассмотрим геометрическую конфигурацию вихревых нитей в области $0,1R_0 \times 0,1R_0 \times 0,1R_0$ за $\Delta t = 1,09 \cdot 10^{-5}$ с до момента реконнекции. Геометрическая конфигурация кинков в эти моменты несколько отличается. Для определения геометрических различий кинки были разбиты на сег-

менты, как показано на рис. 4(а). Нумерация сегментов начиналась от вершины кинков (их ближайших точек). На рис. 4(б) представлены углы между сегментами кинков для ветвей 1–2 — сплошная и пунктирная линии, для ветвей 1–3 — точечная и штрихпунктирная линии; в момент $t = t_* - \Delta t$ — сплошная и точечная линии, в момент $t = t_*$ — пунктирная и штрихпунктирная линии. Расстояния между ближайшими точками составляли $1,09 \cdot 10^{-5}$ и $6,99 \cdot 10^{-7}$ см соответственно.

Для оценки влияния пирамидальной структуры на спектр всей вихревой системы рассмотрена область $2R_0 \times 2R_0 \times 2R_0$, содержащая обе вихревые петли (см. рис. 3(б)). Согласно процедуре, описанной в предыдущем разделе, для рассмотренных конфигураций определены создаваемые ими поля скоростей. Полученные вихревые структуры (для момента непосредственно перед реконнекцией) и поля скоростей, создаваемые ими, представлены на рис. 5.

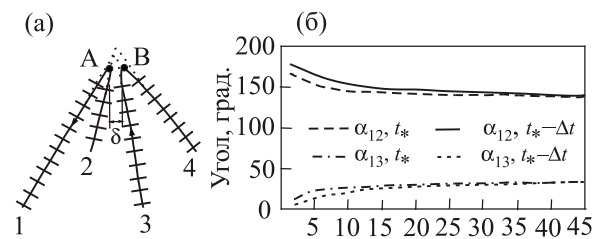


Рис. 4. (а) Определение углов при вершине пирамиды (кинка), (б) значения углов между сегментами вихревых нитей при вершине пирамиды для момента непосредственно перед реконнекцией $t = t_*$ и при приближении к моменту реконнекции $t = t_* - \Delta t$, где $\Delta t = 1,09 \cdot 10^{-5}$ с.

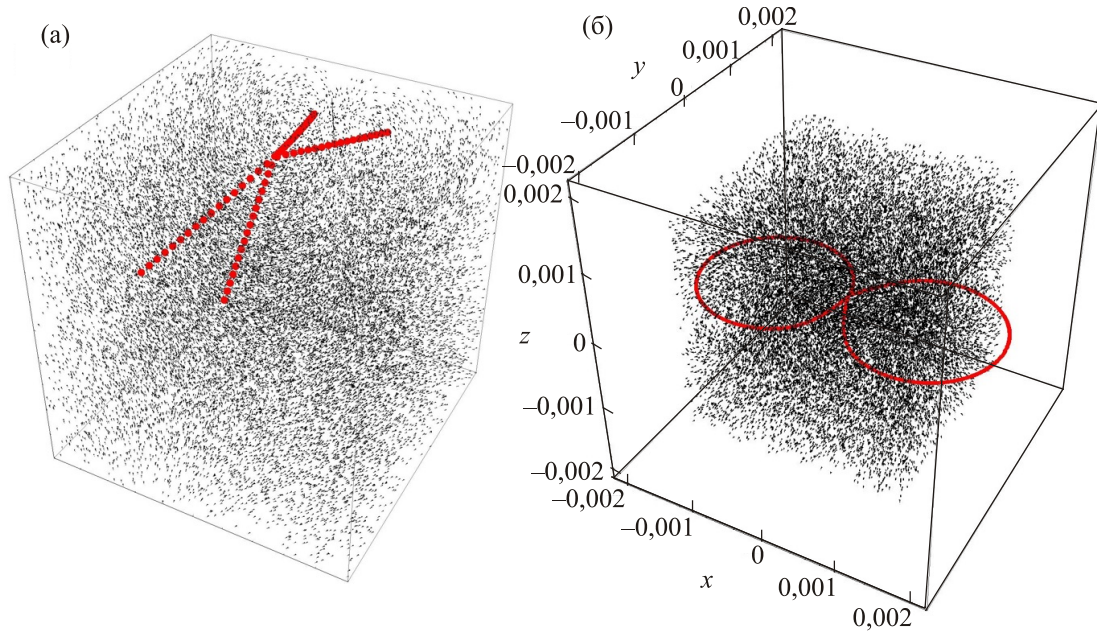


Рис. 5. (Онлайн в цвете) Геометрические конфигурации кинков (а) и вихревых петель (б) перед реконнекцией и создаваемые ими трехмерные поля скоростей.

2.3. Вычисление спектра поля скорости, создаваемого реконнектирующими вихревыми линиями

Для полученных полей скоростей, соответствующих вихревым конфигурациям, описанным в предыдущем разделе, построены структурные функции второго порядка. Рассмотрим их характер. Для области вблизи точки реконнекции для двух, несколько отличающихся конфигураций, получены качественно похожие спектры — установлено, что на масштабах порядка размеров кинков (пирамидальных структур) $C_{II}(l) \sim l^{2/3}$, а на меньших масштабах $C_{II}(l) \sim l^0$ (сплошные линии на рис. 6). Эта ситуация соответствует спектрам $E(k) \propto k^{-5/3}$ и $E(k) \propto k^{-1}$ соответственно. Таким образом, на масштабах порядка неоднородности, образующейся при взаимодействии вихревых нитей перед реконнекцией, можно ожидать спектр колмогоровского типа, а на меньших масштабах — спектр, аналогичный созда-

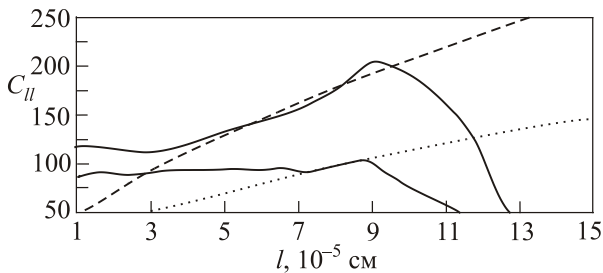


Рис. 6. Структурные функции для поля скоростей в окрестности кинка — сплошные линии. Точечная и пунктирная линии соответствуют функциям $\sim l^{2/3}$.

ваемому гладкой вихревой нитью. Причем интенсивность диссипации, связанная с величиной амплитуды структурной функции (для классической турбулентности $C_{II}(l) \sim e^{2/3}$, где e — плотность диссипации энергии), существенно возрастает при сближении вихревых нитей (верхняя и нижняя сплошные линии на рис. 6), т.е. даже для небольших изменений геометрической структуры при приближении к точке реконнекции (рис. 4(б)) наблюдается взрывной рост диссипации энергии.

Для установления влияния пространственной неоднородности на спектр всей системы вычислена корре-

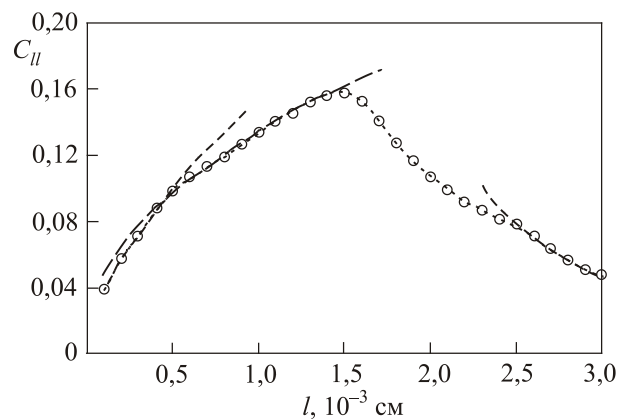


Рис. 7. Структурная функция для системы вихревых петель. Точечная линия с круглыми маркерами соответствует структурной функции. Пунктирные линии — степенные аппроксимации: $\sim l^{0,6}$, $\sim l^{0,45}$, $\sim l^{-3}$ на соответствующих масштабах l .

ляционная функция в области $2R_0 \times 2R_0 \times 2R_0$ (см. рис. 7), в которой расположены обе вихревые петли (рис. 5(б)). На малых масштабах (характерный размер кинка) $C_{II}(l) \sim l^{0,6}$, что соответствует $E(k) \sim k^{-1,6}$, на больших масштабах $C_{II}(l) \sim l^{0,45}$, что соответствует $E(k) \sim k^{-1,45}$, на масштабах системы $C_{II}(l) \sim l^{-3}$, что соответствует $E(k) \sim k^2$ на малых k , или закону равномерного распределения.

Таким образом, единичная неоднородность может создавать спектр поля скорости, соответствующий колмогоровскому для волновых чисел порядка обратных размеров кинка. Множество кинков, например в плотном вихревом клубке, возможно, могло бы создавать спектр колмогоровского типа для большого диапазона волновых чисел. Этот вопрос предполагается исследовать в будущем.

3. Метод конфигураций квантовых вихрей

В этом разделе представлен метод расчета энергетического спектра с помощью конфигурации вихревой линии. Метод позволяет записать энергию потока в терминах объединения различных петель $\{\mathbf{s}(\xi)\} = -\bigcup \mathbf{s}_i(\xi)$, где $\mathbf{s}_i(\xi)$ — i -вихревая нить. Выбирая аналитическое соотношение для формы реконnectирующих вихревых линий, возможно выполнить аналитическое вычисление энергетических спектров $E(k)$. Показано, что спектр $E(k)$ очень близок к зависимости Колмогорова $E(k) \propto k^{-5/3}$, обсуждаются причины такого поведения, а также причины отклонения.

3.1. Энергия вихревой системы

Средняя кинетическая энергия потока, индуцируемого вихревой нитью, может быть записана в виде

$$E = \left\langle \frac{\rho_s}{2} \int \mathbf{v}^2 d^3 \mathbf{r} \right\rangle.$$

Здесь ρ_s — плотность сверхтекучей компоненты, \mathbf{v} — скорость жидкости, $\langle \rangle$ — усреднение ведется по всем возможным конфигурациям вихревой системы. Перейдем от скорости \mathbf{v} к завихренности $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r})$, для этого введем векторный потенциал поля скорости:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}|} d^3 \mathbf{r}_1,$$

тогда энергия принимает вид

$$\begin{aligned} E &= \left\langle \frac{\rho_s}{2} \int \mathbf{v}[\nabla \times \mathbf{A}] d^3 \mathbf{r} \right\rangle = \\ &= \left\langle \frac{\rho_s}{2} \int \nabla[\mathbf{A} \times \mathbf{v}] d^3 \mathbf{r} + \frac{\rho_s}{2} \int \mathbf{A}[\nabla \times \mathbf{v}] d^3 \mathbf{r} \right\rangle. \end{aligned}$$

Интегрирование дивергенции вектора по бесконечности дает нуль, поэтому первый член в правой части уравнения равен нулю и

$$E = \left\langle \frac{\rho_s}{8\pi} \iint \frac{\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r})\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} d^3 \mathbf{r} d^3 \mathbf{r}_1 \right\rangle. \quad (1)$$

Поле завихренности, создаваемое вихревой нитью $\mathbf{s}(\xi)$ в Не II, имеет следующий вид:

$$\bar{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{r}) = \kappa \int_0^L \mathbf{s}'(\xi) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{s}(\xi)) d\xi.$$

Применим преобразование Фурье к $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r})$, тогда

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}(\mathbf{k}) &= \frac{\kappa}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} d^3 \mathbf{r} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \int_0^L \mathbf{s}'(\xi) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{s}(\xi)) d\xi = \\ &= \kappa \int_0^L \mathbf{s}'(\xi) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{s}(\xi)} d\xi. \end{aligned} \quad (2)$$

Используем известное соотношение из теории обобщенных функций (см., например, [21]):

$$\frac{1}{|\mathbf{r}|} = \int \frac{4\pi d^3 \mathbf{k}}{k^2} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}. \quad (3)$$

Подставляя (2) и (3) в (1), получаем выражение для энергии в удобном для дальнейшего анализа виде:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} d^3 \mathbf{k} \left\langle \frac{1}{k^2} \frac{\rho_s \kappa^2}{16\pi^3} \iint_{00}^{LL} \mathbf{s}'(\xi_1) \mathbf{s}'(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 e^{i\mathbf{k}(\mathbf{s}(\xi_1) - \mathbf{s}(\xi_2))} \right\rangle. \quad (4)$$

Таким образом, энергию потока выражаем в терминах конфигурации вихревых петель $\{\mathbf{s}(\xi)\} = \bigcup \mathbf{s}_i(\xi)$. Очевидно, что выражение в угловых скобках является спектром энергии потока — важнейшей характеристикой турбулентных течений. Отметим, что энергетические спектры $E(\mathbf{k})$ могут быть также получены из выражения для преобразования Фурье полей завихренности и скорости $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{k}) = \mathbf{k} \times \mathbf{v}(\mathbf{k})$. Принимая во внимание, что из-за несжимаемости $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{k}) = 0$, легко получить $\mathbf{v}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{v}(-\mathbf{k}) = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\omega}(\mathbf{k})/k^2$, что эквивалентно формуле (4).

В изотропном случае спектральная плотность зависит только от абсолютного значения волнового числа k . Интегрирование по телесному углу приводит к формуле

$$E(k) = \frac{\rho_s \kappa^2}{(2\pi)^2} \oint \mathbf{s}'(\xi_1) \mathbf{s}'(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \frac{\sin(k|\mathbf{s}(\xi_1) - \mathbf{s}(\xi_2)|)}{k|\mathbf{s}(\xi_1) - \mathbf{s}(\xi_2)|}. \quad (5)$$

Для анизотропных ситуаций формула (5) понимается как угловое среднее.

3.2. Форма реконnectирующих вихревых линий

Несмотря на огромное количество работ, посвященных динамике коллапсирующих линий как в классических, так и квантовых жидкостях [22,23] (этот список далеко не полный), точное решение уравнения для формы кривых $\mathbf{s}(\xi)$ еще не получено. Основные результаты получены с помощью различных подходов, объединяющих аналитические и численные методы, такие как метод вихревых нитей, а также трехмерных исследований уравнения Навье–Стокса или нелинейного уравнения Шредингера для вихрей в конденсате Бозе–Эйнштейна.

Качественно результаты этих исследований весьма схожи и могут быть описаны следующим образом. Из-за взаимодействия вихревых нитей на больших расстояниях изначально произвольно ориентированные вихри приближаются друг к другу. По мере приближения их наиболее близкие сегменты начинают переориентироваться таким образом, чтобы занять антипараллельное положение. Кроме того, на приближающихся элементах двух вихревых линий появляются выступы (кинки). Кривизна на кончиках этих выступов может быть настолько большой, что самоиндуцированная скорость каждого возмущения преодолевает нелокальное отталкивание от смежной вихревой линии. Далее выступы (кинки) растут и приближаются друг к другу, что увеличивает их кривизну и, соответственно, их индуцированные скорости. Важным фактом является то, что расстояние между двумя возмущенными сегментами, Δ , уменьшается в соответствии с соотношением $\Delta \propto (t^* - t)^{1/2}$, где коэффициент в этой зависимости является некоторой величиной, которая может зависеть от температуры и начальных условий (см., например, недавнюю работу авторов [20]). Таким образом, за конечное время вихревые линии коллапсируют. Форма вихревых нитей перед реконnectией асимптотически описывается двумя гиперболическими кривыми, лежащими на противоположных сторонах пирамиды (см., например, 25,26)]. Немного другой сценарий без пирамидальной структуры наблюдался в работе [27]. В недавнем исследовании [23] было показано, что кривые не являются точными гиперболами (авторы называют эти кривые квазигиперболами) типа

$$h(\xi) = \sqrt{a^2 \xi^2 / (a^2 + \xi^2) + a^2 + \xi^2}.$$

Эти кривые не лежат в плоскости сторон пирамиды, а находятся на искривленных поверхностях, согнутых вовнутрь. В момент непосредственно перед коллапсом, когда вихревые ядра почти соприкасаются друг с другом, появляется очень острый излом. Эти кривые могут быть записаны в параметрической форме (ср. с формулой (16) в работе [23]):

$$\mathbf{s}_{1,2}(\xi) = [\pm(h(\xi) - c), \pm \xi, (h(\xi) - b)]. \quad (6)$$

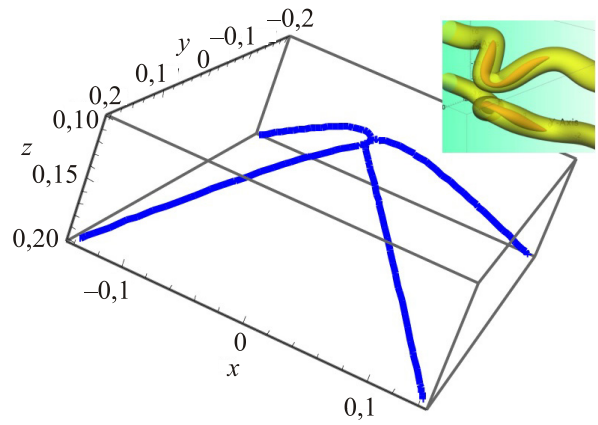


Рис. 8. Касающиеся квазигиперболы, описывающие коллапсирующие линии (см. (6)), полученные в [23]. На вставке показаны кинки на коллапсирующих антипараллельных вихревых трубках, полученные при численном моделировании [24].

Описанная конфигурация показана на рис. 8. Знаки выбраны таким образом, что $\mathbf{s}'_1(0) \cdot \mathbf{s}'_2(0) = -1$ (вихри антипараллельны). Величина a — мера порядка размера кинков. Как показано на вставке рис. 8, величина a может быть ассоциирована с характерным межвихревым расстоянием $\delta = \mathcal{L}^{-1/2}$ (где \mathcal{L} — плотность вихревых линий — полная длина в единице объема). Величина b ответственна за искривление поверхностей, на которых лежат квазигиперболы. Величина c отвечает за близость нитей. Величины b и c меньше, чем межвихревое расстояние δ . Описанная картина согласуется с результатами многочисленных работ, исследующих процессы реконnectии вихревых линий (см., например, [3,24] и ссылки в них), типичное изображение, полученное в [24], показано на вставке рис. 8.

3.3. Аналитическое вычисление спектра

Из-за быстро осциллирующей функции прямое численное вычисление интеграла (5) затруднено. Кроме того, численные результаты оставляют невыясненными основные закономерности, дающие вклад в энергетический спектр. Поэтому, насколько это возможно, проведем аналитическое исследование. Интеграл (5) может быть приближенно оценен при больших волновых векторах k с использованием метода асимптотического разложения (см., в частности, книгу [28]). Когда k велико, функция $\sin(k|\mathbf{s}(\xi_1) - \mathbf{s}(\xi_2)|)$ быстро осциллирует. Поэтому основной вклад в интеграл вносят точки минимального значения фазовой функции $D(\xi_1, \xi_2) = |\mathbf{s}(\xi_1) - \mathbf{s}(\xi_2)|$, которая описывает расстояния между различными точками обеих кривых. Этот вывод усугубляется тем, что расстояние $|\mathbf{s}(\xi_1) - \mathbf{s}(\xi_2)|$ входит в знаменатель в подынтегральном выражении (5). Таким образом, поведение фазовой функции $D(\xi_1, \xi_2)$ для вихревой конфигурации, описываемой уравнением (6) вблизи минимума, имеет решающее

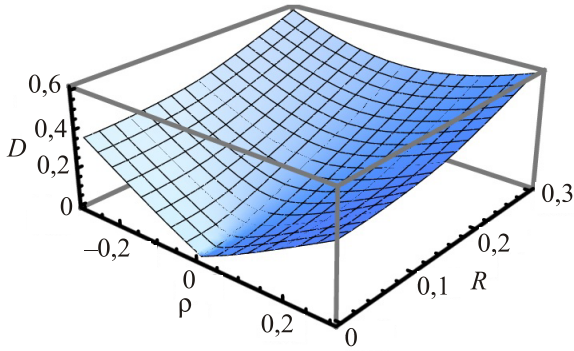


Рис. 9. (Онлайн в цвете) Величина $D(\rho, R)$ — фазовая функция в координатах ρ, R .

значение для величины интеграла и его зависимости от k . Исследуем функцию $D(\xi_1, \xi_2)$ непосредственно перед коллапсом, когда $c \approx a$. Удобно ввести переменные $\rho = \xi_1 - \xi_2$ и $R = (\xi_1 + \xi_2)/2$ и представить двойной интеграл $\int_C \int_C d\xi_1 d\xi_2$ в виде кратного интеграла $\int dR \int d\rho$ в области, ограниченной линиями $\rho = 2R$ и $\rho = -2R$. Верхний предел для R не является существенным, так как основной вклад в интеграл дают окрестности точки $R = 0$. Рассмотрим поведение функции $D(\rho, R)$, изображенное на рис. 9.

В начале координат $\rho = 0, R = 0$ функция $D(\rho, R) = 0$. Важная особенность функции $D(\rho, R)$ — ее поведение в области вблизи $\rho = 0$ (для разных R), которая является медианной частью домена, возникающей от эквидистантных ($\xi_1 = \xi_2$) точек, касающихся вихревых нитей. При фиксированном R (перпендикулярно медиане) функция $D(\rho, R = \text{const})$ аппроксимируется сначала отрезками параболы $\propto \rho^2$, а затем переходит в линейную функцию $\propto |\rho|$ для $\rho \gtrsim a$ с одним и тем же наклоном для всех R . Таким образом, все точки медианы являются точками локального минимума, и производная $\partial D / \partial \rho|_{\rho=0} = 0$ для всех R . Другой важной особенностью фазовой функции $D(\rho, R)$ является ее зависимость от R вдоль медианы $\rho = 0$.

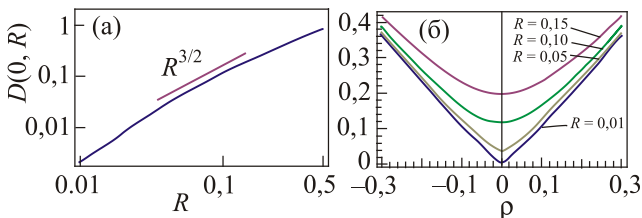


Рис. 10. (Онлайн в цвете) (а) Функция $D(0, R)$. Расстояние вдоль медианы в логарифмических координатах. Сегмент прямой линии имеет наклон $3/2$. (б) Сечения фазовой функции $D(\rho, R)$ для различных R .

На рис. 10 показана функция $D(0, R)$ в логарифмических координатах. Видно, что она ведет себя сначала как $\propto R^2$, затем (при $R \sim a$ (область кроссовера)) переходит в линейную функцию $\propto R$. Таким образом, имеем сложный случай, когда точка $(R = 0, \rho = 0)$ является одновременно и угловой граничной точкой области, ограниченной кривыми $\rho = 2R$ и $\rho = -2R$, и стационарной точкой (точкой минимума), в которой $\nabla D(\rho, R) = 0$.

Перейдем к полярным координатам R, θ . Проинтегрировав по углу θ , получаем асимптотическое разложение спектра по степеням $1/k$. Ведущий член имеет вид

$$E(k) = \rho_s \kappa^2 \int_0^{\infty} dR \sqrt{\frac{\pi}{k \partial^2 D / \partial \rho^2}} \bigg|_{\rho=0} \frac{\sin(kD(\rho, R))}{kD(\rho, R)} \bigg|_{\rho=0} \quad (7)$$

Здесь интегрирование по θ идентично интегрированию по $d\rho$, именно $d\rho = R d\theta$ и медианная кривая $\rho = 0$ — линия, где функция $D(\rho, R = \text{const})$ имеет локальный минимум $\partial D / \partial \rho|_{\rho=0} = 0$. Поэтому интегрирование по θ может быть осуществлено с использованием метода стационарной фазы, что дает (7). При вычислении интеграла в окрестности стационарной точки пренебрегаем медленно меняющейся функцией $s'(\xi_1) \cdot s'(\xi_2)$, положив ее равной -1 (напомним, что линии антипараллельны). Таким образом, мы свели всю проблему к оценке одномерного интеграла (7). На рис. 11(а) представлен спектр $E(k)$, рассчитанный на основе формулы (7). Во-первых, обратите внимание, что спектр, рассчитанный с использованием (7), очень близок к спектру, рассчитанному на основе уравнения (4); это оправдывает приближенную процедуру, описанную выше. Другой, и более важный факт — в интервале волновых чисел $1-50$ наклон $E(k)$ близок к $-5/3$. Заметим, что волновые числа, соответствующие кроссоверу, $k \sim 2\pi/a \sim 50$.

Чтобы понять появление зависимости $k^{-5/3}$, обращаемся к так называемой лемме Эрдели [29], в которой говорится, что интеграл $\int_0^{\infty} x^{\beta-1} f(x) e^{i\lambda x^\alpha} dx$ с достаточно гладкой функцией $f(x)$ имеет разложение в асимптоти-

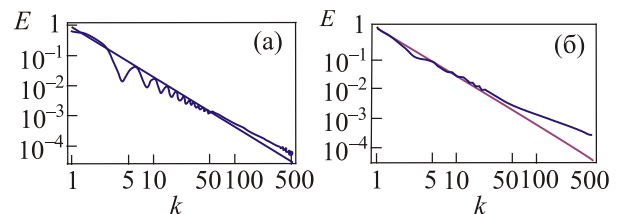


Рис. 11. (Онлайн в цвете) (а) Спектр $E(k)$, полученный на основе описанной процедуры и формулы (7). (б) Спектр $E(k)$, полученный численно на основе формулы (4). Прямая линия имеет наклон $-5/3$.

ческий ряд $\sum_m a_m \lambda^{-(m+\beta)/\alpha}$ с главным членом $\lambda^{-\beta/\alpha}$. В частности, это означает, что если бы мы взяли коллапсирующую нить, а не квадратичные квазигиперболы, т.е. степенные функции порядка $3/2$, $s_{1,2}(\xi) = (\xi, \pm \xi^{3/2}, 0)$, и реализовали процедуру, описанную выше, то получили бы спектр $E(k) \propto k^{-5/3}$ во всем диапазоне волновых чисел. Возвращаясь к решению (6) и рис. 10, видим, что $D(0, R)$ не является «чистой» параболой степени $3/2$, а представляет более сложную функцию, которая ведет себя вначале как $\propto R^2$, а затем переходит в $\propto R$ в области кроссовера $\sim a$, покрывая от 1 до 1,5 декад вблизи a . Поэтому в области кроссовера, где величина $D(0, R)$ изменяется по закону, близкому к $R^{3/2}$, следует ожидать, что $E(k)$ близка к зависимости $\propto k^{-5/3}$ для волновых чисел k порядка $2\pi/a$, что на самом деле и происходит. Область кроссовера соответствует масштабу, где ветви гиперболы имеют тенденцию становиться прямыми линиями. Как обсуждалось, это масштаб порядка размера кинка на кривых и, соответственно, порядка межвихревого расстояния $\delta = \mathcal{L}^{-1/2}$ (см. вставку на рис. 8).

4. Заключение

Резюмируя, можно утверждать, что как в рамках метода структурных функций, так и в рамках метода конфигурации вихревых петель показано, что вихревые кинки, образуемые ближайшими элементами вихревых нитей перед реконнекцией, могут создавать поле скорости со спектральными характеристиками, близкими к спектральным характеристикам классической изотропной турбулентности. Данный вывод справедлив на масштабах порядка и несколько больше характерных размеров кинка. Показано, что при рассмотрении спектральных характеристик системы (в данном случае двух вихревых петель) на масштабах порядка размера особенности (размера кинка) также связаны с характером этой особенности. В методе структурных функций данный факт выражается в зависимости $C_{ll}(l) \sim l^{0,6}$, что несущественно отличается от колмогоровского спектра $C_{ll}(l) \sim l^{2/3}$. На больших масштабах зависимость имеет более гладкий вид, что логично ожидать для гладкой конфигурации вихревых нитей. Однако в реальных вихревых клубках, особенно при больших температурах, вихревые нити имеют множество особенностей, обусловленных их высокой плотностью и постоянными процессами реконнекции. По всей видимости, это может приводить к образованию спектра колмогоровского типа, по крайней мере на масштабах особенностей.

Возвращаясь к целям работы, сформулированным во Введении, можно предположить, что спектр $E(k)$ близок к колмогоровской зависимости $\propto k^{-5/3}$, которая ранее наблюдалась при численном моделировании динамики квантованных вихревых нитей [8,11]. Ин-

тервал значений волновых чисел, где выполняется закон $E(k) \propto k^{-5/3}$, регулируется размером кинка $\sim a$ и, соответственно, межвихревым расстоянием δ . В реальности этот спектр охватывает максимум 1–1,5 декады около значения $k \approx 2\pi/\delta$. Следует подчеркнуть, что в ключевых численных работах [8,11] диапазоны для волнового числа также порядка одной декады около значения $k \approx 2\pi/\delta$. К сожалению, из-за отсутствия точного аналитического решения для конфигурации $\{s(\xi)\}$ реконнектирующих вихревых нитей величина $E(k)$ является приблизительной и зависит от асимптотического решения (6). С другой стороны (как видно из предложенного аналитического рассмотрения), спектр зависит от нескольких особенностей коллапсирующих линий, таких как порядок касания и величина кроссовера к гладкой прямой. Точная форма кинка может влиять в основном на область больших волновых чисел. Что касается малых волновых чисел ($k \ll 2\pi/\delta$), спектр $E(k)$ должен быть вычислен путем интегрирования базовой формулы (5) по всей конфигурации вихрей, в том числе самых удаленных элементов вихревых нитей ($|s(\xi_1) - s(\xi_2)| \gg \delta$).

Другой, более тонкий вопрос, затронутый во Введении, касается роли динамики дискретных вихрей в физике турбулентности. Наши результаты подтверждают точку зрения о роли коллапса в формировании турбулентных спектров, проведенных в [1]. С другой стороны, помимо проблемы не очень большого интервала волновых чисел, остаются неясными другие вопросы. В сценарии Колмогорова спектр $E(k) \propto k^{-5/3}$ был следствием k -независимого каскада энергии P_k в k -пространстве. В схеме, основанной на изучении динамики коллапсирующих вихревых нитей, вопрос о каскаде энергии не появляется вообще (по крайней мере в явном виде). Можно выдвинуть предположение, что коллапс вихревых нитей, который поставляет энергию в крохотную область пространства вблизи точки реконнекции (где эта энергия «сгорает» в процессе аннигиляции), играет роль переносчика энергии в малые масштабы. Есть другие возможные сценарии, связанные с полным пересоединением и образованием больших или меньших вихревых петель (рекомбинации), что предполагает перераспределение энергии между различными масштабами, вызывая прямые и обратные каскады [30,31].

Конечно, имеются и многие другие вопросы, связанные, например, со структурными функциями более высоких порядков или с частотой реконнекций, необходимой для поддержания равномерного и изотропного спектра (см., например, [32–35]). Эти вопросы, однако, выходят за рамки представленной работы и будут являться объектом будущих исследований.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 15-02-05366.

1. E.A. Кузнецов, В.П. Рубан, *ЖЭТФ* **118**, 893 (2000) [*JETP* **91**, 775 (2000)].
2. E.A. Kuznetsov, Collapse and Kolmogorov spectra, *Proceedings of Scientific school "Nonlinear waves-2012"*, A.G. Litvak and V.I. Nekorkin (eds.), Institute for Applied Physics, Nizhnii Novgorod (2013), p. 26.
3. R.M. Kerr, *Phys. Fluids* **25**, 065101 (2013).
4. D.S. Agafontsev, E.A. Kuznetsov, and A.A. Mailybaev, Development of High Vorticity Structures in Incompressible 3d Euler Equations, *arXiv preprint arXiv:1502.01562*, 2015.
5. A.J. Chorin, *Vorticity and Turbulence*, Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag (1994).
6. U. Frisch, *Turbulence*, Cambridge University Press, Cambridge (1995).
7. S.K. Nemirovskii, *Phys. Rep.* **524**, 85 (2013).
8. T. Araki, M. Tsubota, and S.K. Nemirovskii, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 145301 (2002).
9. D. Kivotides, C.J. Vassilicos, D.C. Samuels, and C.F. Barenghi, *Europhys. Lett.* **57**, 845 (2002).
10. D. Kivotides, J.C. Vassilicos, D.C. Samuels, and C.F. Barenghi, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 3080 (2001).
11. A.W. Baggaley, *Phys. Fluids* **24**, 055109 (2012).
12. C. Nore, M. Abid, and M.E. Brachet, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 3896 (1997).
13. M. Kobayashi and M. Tsubota, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 065302 (2005).
14. N. Sasa, T. Kano, M. Machida, V.S. L'vov, O. Rudenko, and M. Tsubota, *Phys. Rev. B* **84**, 054525 (2011).
15. А.Н. Колмогоров, *ДАН СССР* **30**, 9 (1941).
16. А.Н. Колмогоров, *ДАН СССР* **32**, 19 (1941).
17. A.S. Monin and A.M. Yaglom, *Statistical Fluid Mechanics*, Pt. 2, MIT Press, Cambridge, MA (1975).
18. L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, Pergamon, New York (1987).
19. M. Lesieur, *Turbulence in Fluids. Fluid Mechanics and its Applications*, Springer, Dordrecht (2008).
20. V.A. Andryushchenko, L.P. Kondaurova, and S.K. Nemirovskii, *J. Low Temp. Phys.* **185**, 377 (2016).
21. В.С. Владимиров, *Обобщенные функции в математической физике*, Наука, Москва (1976).
22. E.D. Siggia, *Phys. Fluids* **28**, 794 (1985).
23. L. Boué, D. Khomenko, V.S. L'vov, and I. Procaccia, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 145302, (2013).
24. M.D. Bustamante and R.M. Kerr, *Physica D: Nonlin. Phenom.* **237**, 1912 (2008).
25. A.T.A.M. de Waele and R.G.K.M. Aarts, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 482 (1994).
26. R. Tebbs, A. Youd, and C. Barenghi, *J. Low Temp. Phys.* **162**, 314 (2011).
27. R. Hänninen, *Phys. Rev. B* **88**, 054511 (2013).
28. М.В. Федорюк, *Метод перевала*, Наука, Москва (1977).
29. A. Erdelyi, *J. Soc. Industr. Appl. Math.* **3**, 17 (1955).
30. S.K. Nemirovskii, *Phys. Rev. B* **77**, 214509 (2008).
31. A.W. Baggaley, C.F. Barenghi, and Y.A. Sergeev, *Phys. Rev. E* **89**, 013002 (2014).
32. M. Tsubota, T. Araki, and S.K. Nemirovskii, *Phys. Rev. B* **62**, 11751 (2000).
33. C.F. Barenghi and D.C. Samuels, *J. Low Temp. Phys.* **136**, 281 (2004).
34. S.K. Nemirovskii, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 015301 (2006).
35. L. Kondaurova, V. L'vov, A. Pomyalov, and I. Procaccia, *Phys. Rev. B* **89**, 014502 (2014).

Collapsing vortex filaments and the spectrum of quantum turbulence

V.A. Andryushchenko and S.K. Nemirovskii

With the use of the method of correlation functions and of the method of quantum vortices configurations, the energy spectrum of the three-dimensional velocity field induced by collapsing (immediately before the implementation reconnection) vortex filaments is calculated. Statement of the problem is motivated by the idea of modeling the classical turbulence by set of chaotic quantized vortex filaments. Among the various arguments, supporting the idea of quasi-classical behavior of quantum turbulence, the strongest is the realization of the Kolmogorov spectrum of type $E(k) \propto k^{-5/3}$, resulting in a number of numerical operations. Another goal is connected with an important and intensively discussed topic on the role of hydrodynamic collapse in the formation of turbulence spectra. As a result of calculations it was demonstrated that the vortex filament at the moment of contact create a velocity field having a singularity. This configuration a of vortex filaments generates spectrum $E(k)$, close to the Kolmogorov law. A possible cause of this fact, as well as the likely reason for deviation are discussed. The results are discussed from the point of view of both the classical and quantum turbulence.

PACS: 67.25.dk Vortices and turbulence;
 47.37.+q Hydrodynamic aspects of superfluidity; quantum fluids;
 03.75.Kk Dynamic properties of condensates; collective and hydrodynamic excitations, superfluid flow.

Keywords: hydrodynamic collapse, quantum vortex line.