

Свойства квазисолитонных состояний в нелинейных средах в условиях высокочастотного локального воздействия. Аналитическое описание и сравнение с численным анализом

В.И. Белан¹, А.С. Ковалев^{1,2}, А.А. Перетяцько³

¹*Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины
пр. Науки, 47, г. Харьков, 61103, Украина*

²*Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина
пл. Свободы, 4, г. Харьков, 61107, Украина*

³*Национальный технический университет “Харьковский политехнический институт”
ул. Багалея, 21, г. Харьков, 61002, Украина
E-mail: kovalev@ilt.kharkov.ua*

Статья поступила в редакцию 15 мая 2016 г., опубликована онлайн 24 октября 2016 г.

Аналитически (в рамках метода коллективных переменных) и численно проанализированы пространственно локализованные возбуждения одномерной магнитной системы во внешнем высокочастотном поле. В случае прямого воздействия локализованного магнитного поля найдены зависимости амплитуды локальных квазисолитонных состояний от амплитуды этого поля при различных значениях его частоты и величины затухания в системе. Указано на гистерезисный характер полевой зависимости и появление «окон неустойчивости» стационарных состояний. В этих интервалах неустойчивости возбуждения становятся нестационарными: они сопровождаются дополнительной периодической нутацией вектора намагниченности. При этом наблюдаются такие явления нелинейной динамики, как удвоение периода колебаний и переход к хаотическому поведению.

Аналітично (в межах методу колективних змінних) і чисельно проаналізовано просторово локалізовані збудження одновимірної магнітної системи в зовнішньому високочастотному полі. На разі прямого впливу локалізованого магнітного поля знайдено залежності амплітуди локальних квазі-солітонних станів від амплітуди цього поля при різних значеннях його частоти та величини загасання в системі. Вказано на гістерезисний характер польової залежності та появу «вікон нестійкості» стаціонарних станів. В цих інтервалах нестійкості збудження стають нестационарними: вони супроводжуються додатковою періодичною нутацією вектора намагніченості. При цьому спостерігаються такі явища нелінійної динаміки, як подвоєння періоду коливань та перехід до хаотичної поведінки.

PACS: 05.45.Yv Солитоны;
63.20.Pw Локализованные моды.

Ключевые слова: квазиодномерные системы, высокочастотная накачка, нелинейный резонанс, квазисолитонные возбуждения.

1. Введение

Теоретическое изучение динамики существенно нелинейных сред в приложении к физике твердого тела стало актуальным в последнее время в связи с многочисленными технологическими приложениями (нели-

нейная оптика, магнитоупорядоченные среды, слабая сверхпроводимость и т.д.). При этом значительный интерес привлекают особые, существенно нелинейные возбуждения в таких средах — солитоны (оптические солитоны, магнитные солитоны, вихри и доменные гра-

ницы, флаксоны в джозефсоновских контактах, дислокации в упругих средах) [1–4]. Наиболее многообещающим представляется использование солитонных импульсов в волоконной оптике [1] и в магнитных линиях задержки [2]. Особенностью нелинейной динамики в физике твердого тела является наличие значительной диссипации, что требует разработки систем усиления возбуждаемых импульсов (локальных усилителей в нелинейной оптике) [5]. Сходная проблема возникает в магнитных системах передачи информации и управления магнитными импульсами. В этих случаях локальное высокочастотное воздействие на систему используется для управления свойствами распространяющихся нелинейных импульсов (в частности, солитонов) [6–8]. В джозефсоновских контактах локальное переменное магнитное поле, приложенное к краю контакта, управляет свойствами флаксоновой динамики [9]. Несмотря на разную физику этих явлений, их теоретическое описание имеет много общих свойств. (Заметим, что впервые сходная задача была рассмотрена достаточно давно для описания нелинейных таммовских состояний [10].) В контексте «солитонной науки» в [11] в рамках качественного изучения флаксонов впервые было обращено внимание на то, что при «точечном» высокочастотном воздействии на систему вблизи зоны действия внешнего поля возможно образование специфических локализованных возбуждений солитонного типа. Позже в [12] аналитически и численно было показано, что подобные локализованные состояния могут существовать и в магнитных системах, возбуждаемых высокочастотным полем, приложенным к поверхности ферромагнетика. Глубокие, подробные аналитические исследования этой проблемы и соответствующие численные расчеты были проведены в работах [13] для джозефсоновских контактов и в [14, 15] для магнитных солитонов в условиях локализованной накачки.

Основные результаты, полученные в перечисленных выше работах, сводятся к следующему.

В квазиодномерных нелинейных системах, допускающих существование локализованных солитонных возбуждений, при наличии точечного высокочастотного прямого воздействия возможно существование специфических «квазисолитонных» состояний. (Название объясняется тем, что при отсутствии затухания они представляют собой два связанных солитона, локализованных в точке накачки.) Таких стационарных возбуждений может быть несколько (малоамплитудные, почти линейные возбуждения, и существенно нелинейные квазисолитонные состояния), и они существуют в конечном интервале амплитуды внешнего поля от нулевой до определенной критической величины. При учете даже слабой диссипации в системе ситуация существенно меняется: некоторые состояния не реализуются, возникает гистерезис в зависимости амплитуды возникающих локализованных колебаний от амплитуды внешнего

поля, локализованные состояния могут существовать и в полях, больших критического поля. Кроме этого, появляются нестационарные многочастотные состояния и возбуждения хаотического типа. Эти проблемы были исследованы качественно, аналитически и численно в рамках возмущенных синусоидального уравнения Клейна–Гордона (SGE) и нелинейного уравнения Шредингера (NSE) в цитированных выше работах, а также в рамках более простых линейно-нелинейных моделей в работе [16]. Большинство результатов относительно нестационарных режимов возбуждения квазисолитонных состояний было получено численно, но в работе [17] часть численных данных была подтверждена аналитически в рамках метода коллективных переменных. Результаты численных расчетов, конечно, дают правильную информацию о динамике нелинейных систем, но не лишены некоторых недостатков. Во-первых, численно исследовались системы конечной длины, в которых возникают дополнительные нелинейные возбуждения типа поверхностных колебаний. Во-вторых, использование в численных расчетах дискретных моделей приводит, как правило, к хаотизации динамики. Наконец, при численном подходе к изучению достаточно больших систем нет возможности использования хорошо разработанных методов качественного анализа конечномерных динамических систем. Результаты [17] показали хорошее количественное согласие с предыдущими численными данными в описании гистерезисного поведения полевых зависимостей и качественное согласие в описании нестационарного поведения системы.

В настоящей работе для описания нелинейных возбуждений в оптических и магнитных средах в рамках NSE использован вариант метода коллективных переменных. При этом: (1) получена соответствующая конечномерная система обыкновенных дифференциальных уравнений, (2) исследована аналитически устойчивость различных нелинейных возбуждений и гистерезис полевой зависимости, (3) выяснен характер нестационарных состояний и (4) проведено сравнение полученных данных с результатами предыдущих численных расчетов.

Работа состоит из Введения, разд. 2 с формулировкой модели, основными рассматриваемыми уравнениями и краткой информацией о предыдущих результатах, разд. 3 с описанием предложенного метода коллективных переменных, выводом уравнений сокращенного описания и исследованием устойчивости квазисолитонных возбуждений разного типа в пренебрежении диссипацией, разд. 4 с анализом динамики стационарных локальных состояний при наличии затухания, разд. 5, в котором исследованы нестационарные квазисолитонные возбуждения и проведено сравнение с предыдущими данными численного изучения исходных эволюционных уравнений, и заключительного раздела с выводами.

2. Формулировка модели

Поскольку в экспериментах исследуется распространение нелинейных импульсов в длинных оптоволоконных системах [1] и длинных (по сравнению с размерами импульсов) и узких полосках качественных ферромагнетиков [3], то теоретическое рассмотрение данной проблемы может быть проведено в рамках модифицированного нелинейного уравнения Шредингера (NSE) для поля $\psi(x, t)$:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \omega_0 \psi + |\psi|^2 \psi + i\gamma \psi = h\delta(x)e^{-i\omega t}, \quad (1)$$

где x — координата вдоль системы, $\psi = M_x + iM_y$ — отклонение классического вектора намагниченности \mathbf{M} в легкоплоскостном ферромагнетике от направления «легкой оси» (оси Z) или медленно меняющаяся огибающая высокочастотной «несущей» электромагнитной волны в оптических волноводах. В приложении к задачам динамики магнитоупорядоченных сред безразмерный параметр ω_0 описывает частоту однородного ферромагнитного резонанса, параметр γ учитывает диссипацию в системе, h — амплитуда циркулярного внешнего магнитного поля, вращающегося вокруг легкой оси Z с частотой ω и локализованного вблизи начала координат. Размер области локализации поля учтен в перенормировке амплитуды поля.

Это уравнение в магнетиках представляет собой длинноволновой предел системы дискретных уравнений, в которых величина ψ_n связана с магнитными моментами атомов $\psi_n = M_{n,x} + iM_{n,y}$:

$$i \frac{\partial \psi_n}{\partial t} + \psi_{n+1} + \psi_{n-1} - 2\psi_n - \omega_0 \psi_n + |\psi_n|^2 \psi_n + i\gamma \psi_n = h\delta_{n0}e^{-i\omega t}. \quad (2)$$

В оптической среде, исходно непрерывной, используется уравнение (1). Для магнитных сред (легкоосного ферромагнетика) уравнения (1) и (2) представляют собой малоамплитудный предел известных уравнений Ландау–Лифшица [2] с затуханием и внешней силой. В приложении к оптическим волноводам такое воздействие экспериментально исследовалось в работах [18,19]. Уравнение (1) без учета затухания и внешнего поля ($\gamma = 0$, $h = 0$) может быть приведено к полностью безразмерному виду перенормировкой координаты x , времени t и амплитуды поля ψ , но мы оставили коэффициент ω_0 , характеризующий край сплошного спектра линейных волн (частота однородного ферромагнитного резонанса или частота несущей линейной электромагнитной волны при заданном значении ее волнового числа). После перехода к безразмерным переменным x , t и ψ значения коэффициента затухания и амплитуды внешнего поля не могут быть исключены из уравнений и имеют вполне определенные значения,

которые могут быть взяты из экспериментов. При теоретическом изучении задачи амплитуду внешнего поля h мы не будем считать малой, поскольку наиболее интересные эффекты (гистерезис и нестационарные состояния) происходят при значениях амплитуд поля $h \sim 1$. (В размерных единицах это соответствует полям магнитной анизотропии $H \sim \beta M_0$, используемым в экспериментах.) Значение же затухания будет предполагаться малым, и приближенные подходы будут учитывать малость этого параметра: $\gamma \ll 1$. В реальных добротных магнитных системах $\gamma/\omega_0 \sim 10^{-3}$. (В работе при численных расчетах принимались значения $\gamma = 0,1$ и $\gamma = 0,05$.)

После замены переменной $\psi(x, t) = u(x, t) \exp(-i\omega t)$ уравнение (1) становится уравнением с постоянными коэффициентами, и в предположении о симметрии решений относительно точки накачки удобно его переписать в виде

$$i \partial u / \partial t + \partial^2 u / \partial x^2 - \varepsilon^2 u + |u|^2 u + i\gamma u = 0, \quad x \neq 0, \quad (3)$$

$$(\partial u / \partial x)_{x=0} = h/2, \quad (4)$$

где $\varepsilon = \sqrt{\omega_0 - \omega}$ и $\omega < \omega_0$. Состояния, в которых переменная $u = u(x)$ не зависит от времени и является вещественной, ниже называются стационарными (хотя исходная полевая переменная зависит от времени и меняется с частотой ω). В отсутствие затухания и внешнего воздействия в бесконечной однородной системе уравнение (1) является полностью интегрируемым и допускает, в частности, решения для неподвижных солитонов вида [2]

$$u(x) = \frac{\sqrt{2}\varepsilon}{\text{ch}(\varepsilon(x-x_0))} e^{i\varphi}. \quad (5)$$

При наличии внешнего воздействия в точке $x = 0$ в ее окрестности могут существовать локализованные возбуждения солитонного типа четырех различных видов (A, B, C, D), параметры x_0 и φ которых принимают четыре вполне определенных набора значений: $x_0^{A,C} = -x_0^{D,B} = -\text{Arcsh}(s \pm \sqrt{s^2 - 1})/\varepsilon$, $\varphi^{A,B} = \pi$, $\varphi^{C,D} = 0$, где $s = \sqrt{2}\varepsilon^2/h$. (Для решений типа C и D параметр x_0 соответствует координате точки, в которой находится максимум амплитуды возбуждения. Параметр φ определяет фазу вращения вектора намагниченности относительно фазы вращения внешнего поля.) Из приведенных формул видно, что локализованные квазисолитонные стационарные состояния существуют только в интервале внешних полей $0 \leq h \leq h_c = \sqrt{2}\varepsilon^2$. При этом значение параметра ε должно быть не слишком велико, что связано с тем, что область локализации L самого решения (5) обратно пропорциональна его амплитуде: $L \sim 1/\varepsilon$. Поэтому при больших значениях ε решение сильно локализуется, что нарушает условие перехода к длинно-

волновому пределу в исходной дискретной системе уравнений. Традиционно в предыдущих работах полученная информация представлялась в виде зависимостей амплитуды возбуждения в точке накачки $|\psi(x=0)| = |u^{(0)}(h)| = a(h)$ от величины внешнего поля, которые имеют вид $a_{B,C}^{A,D} = \epsilon \sqrt{1 \mp \sqrt{1 - h^2/2\epsilon^4}}$. В пределе $h \rightarrow 0$, $u(0) \rightarrow 0$ решение *A* стремится к нулю, а решение *D* — к двум солитонным решениям, разнесенным на бесконечное расстояние. В другом предельном случае $h \rightarrow 0$, $u(0) \rightarrow \sqrt{2}\epsilon = a_0$ решения *B* и *C* превращаются в солитонные решения (5) с противоположными знаками амплитуды. Приведенные зависимости можно переписать в едином виде: $h = \sqrt{2a^2(2\epsilon^2 - a^2)}$. Зависимости $a(h)$ и соответствующие профили распределения намагниченности в различных состояниях приведены на рис. 1(а).

Учет затухания существенно меняет динамику системы (рис. 1(б)). При малой диссипации можно воспользоваться теорией возмущений по малому параметру γ [15]. При этом вырождение зависимостей $a(h)$ для разных состояний снимается, и возникают два новых критических поля: возбуждения типа *B* и *C* возникают бифуркационным образом при конечном значении внешнего поля $h_{c1} \approx 2\sqrt{2}\gamma$, а в области полей $h \approx h_c$ расщепление зависимостей составляет величину $\delta h \approx 16\gamma^2/\epsilon^2$. Зависимость для *D*-солитонов кардинально меняется при $h_{c2} \approx 4\sqrt{2}\epsilon\sqrt{\gamma}$, но для них в этой области параметров теряет применимость теория возмущений (тонкая линия на рис. 1(б)). В основном приближении распределение поля в квазисолитоне определяется формулой (5), но с модернизированной в меру слабого затухания зависимостью $x_0(\epsilon, h, \gamma)$, а параметр ϕ становится функцией координаты.

Задача об устойчивости различных квазисолитонных состояний в рамках нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных (1) достаточно сложна. Поэтому ранее в [16] этот вопрос был исследован аналитически в рамках упрощенной линейно-нелинейной модели, в которой нелинейность

учитывалась только в точке приложения поля: сила, действующая на линейную систему, представлялась в виде $(h \exp(-i\omega t) - \psi^2 \bar{\psi})\delta(x)$. Результаты расчетов приведены на рис. 1(в). Полученная зависимость $a = a(h)$ качественно близка к таковым в исходной модели, но $a_0 \rightarrow a'_0 = \sqrt{2}\epsilon$ и $h_c \rightarrow h'_c = \sqrt{32\epsilon^3/27}$, решение *D*-типа отсутствует и асимптотика возбуждения *C*-типа в больших полях имеет вид $a \approx \sqrt[3]{h}$. В указанной модели устойчивость различных решений легко анализируется, и области устойчивости приведены на рис. 1(в) жирными линиями.

К сожалению, аналитический расчет устойчивости квазисолитонных стационарных состояний и анализ нестационарных возбуждений в исходной модели представляют сложную математическую задачу. Эта задача в работах [12,14,15] была выполнена численно (аналогичная проблема также численно была рассмотрена в [13] для джозефсоновских контактов в рамках SGE). Результаты в случае малого уровня затухания ($\gamma = 0,05$) и значения $\epsilon = 0,3$ приведены на рис. 2(а). Видно существенное их отличие при больших амплитудах внешнего поля от данных приближенных расчетов, приведенных на рис. 1(б). На зависимости $a = a(h)$ возникает гистерезис, связанный с неустойчивостью некоторых решений, и область нестационарных локализованных состояний (заштрихована). В этой области решение может быть периодическим (одночастотным или с несколькими частотами) и хаотическим в зависимости от величины внешнего поля. В работах [12,14,15] нами численно была исследована нелинейная динамика достаточно небольших систем, состоявших из 10 элементов ψ_n с $n = 1, \dots, 10$. Мы провели дополнительные расчеты для систем с большим числом магнитных моментов (до 80 моментов) и показали, что результаты практически не изменились.

Однако численные расчеты исходных уравнений в частных производных обладают рядом недостатков. Во-первых, реально решается система дискретных дифференциально-разностных уравнений, и дискретность привносит в результаты ряд особенностей. Например,

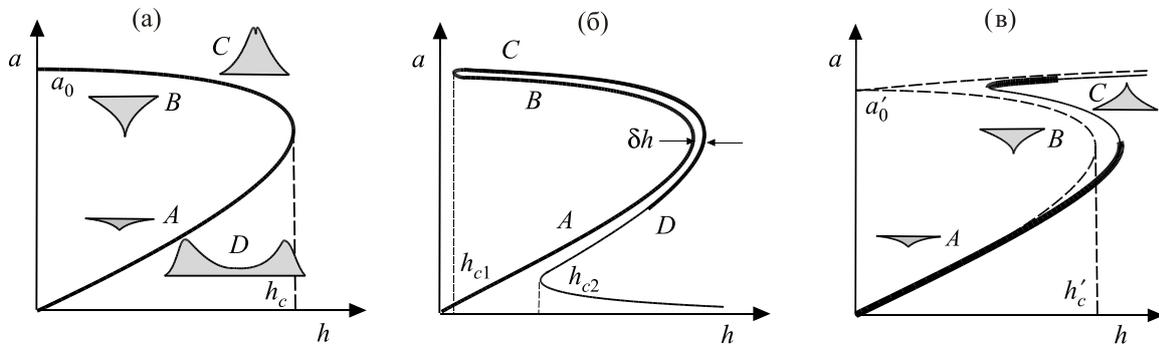


Рис. 1. Зависимости амплитуды возбуждения a в точке накачки (при $x = 0$) от амплитуды внешнего поля h без учета затухания (а), при слабой диссипации (б) и в комбинированной линейно-нелинейной модели (в).

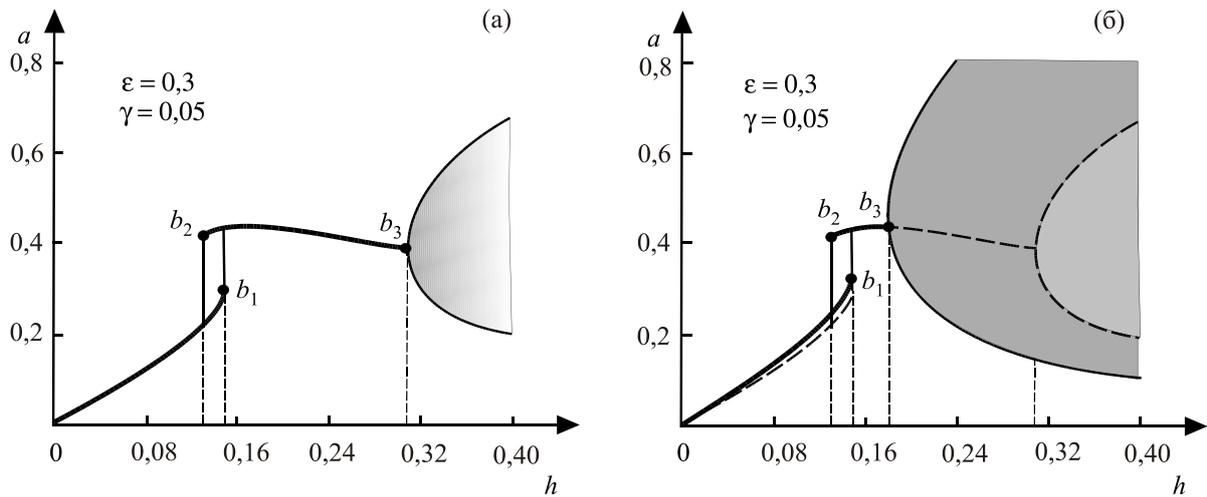


Рис. 2. Зависимости амплитуды возбуждения a от амплитуды внешнего поля h : данные численного расчета в рамках исходных уравнений (1) (а); результаты, полученные в рамках метода коллективных переменных (жирным штрихом приведены кривые рис. 2(а)) (б).

дискретность увеличивает стохастическую компоненту динамики системы. Кроме того, как было показано в [15,16], может возникнуть большой скачок между амплитудой колебаний нулевого элемента ψ_0 и амплитудами остальных элементов ψ_n . Во-вторых, из-за конечных размеров рассматриваемой системы важным может оказаться влияние ее границ. Как было показано в [13], при небольшой длине цепочки и больших амплитудах поля на свободной границе возникают нелинейные поверхностные колебания такой же амплитуды, что и в точке накачки. Это обстоятельство влияет на положение границы области нестационарной динамики.

Поэтому ниже мы, по возможности, детально рассмотрим проблему аналитически для сравнения результатов с данными численного счета, воспользовавшись методом коллективных переменных. Этот метод, хотя и является приближенным, но описывает безграничную цепочку без учета ее дискретности.

3. Уравнения для коллективных переменных. Устойчивость стационарных квазисолитонных состояний в отсутствие диссипации

Основные идеи метода коллективных переменных для уравнений в частных производных содержатся уже в подходе Ван-дер-Поля, предложенном для приближенного решения обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих малые возмущения [20]. Решение возмущенной системы берется в том же функциональном виде, что и решение исходного уравнения, все произвольные параметры решения считаются медленно (в меру возмущения) меняющимися функциями времени. После подстановки решения в возмущенное уравнение и проектирования его на ортонормированный базис решений, производится временное усредне-

ние и получается система уравнений первого порядка, описывающая эффективную динамическую систему. В случае интегрирования эволюционных уравнений постулируется тот или иной Ansatz, близкий к солитонным решениям исходных уравнений с медленно зависящими от времени параметрами, но «удобной» зависимостью от координаты. После подстановки его в возмущенное уравнение и интегрирования по пространственной координате, получается система уравнений для конечномерной динамической системы, которая может быть исследована методами нелинейной механики.

В нашем случае, поскольку в отсутствие диссипации решение представляет собой «сшитые» в точке накачки солитоны, удобно в качестве пробной функции выбрать выражения для точных солитонных решений NSE [20], которые в неограниченной диссипативной среде имеют следующий вид:

$$u_s(x, t) = \frac{\sqrt{2} B \exp(-ikx - i\Omega t - i\phi_0)}{\text{ch}(B(x - Vt - x_0))}, \quad (6)$$

где четыре параметра B, V, k, Ω связаны между собой двумя соотношениями: $V = 2k$ и $\Omega = \epsilon^2 + k^2 - B^2$, а параметры x_0 и ϕ_0 — произвольны, т.е. решение является четырехпараметрическим. Сохраняя зависимость решения от координаты и предполагая медленное изменение всех параметров со временем, постулируем такой Ansatz для симметричного по x решения при $x > 0$:

$$u(x, t) = \frac{\sqrt{2} B(t) \exp(-ik(t)x - i\phi(t))}{\text{ch}(B(t)x - z(t))}. \quad (7)$$

Воспользуемся вариационным принципом и представим уравнение (1) как уравнение Эйлера–Лагранжа для обобщенных координат (u, \dot{u}) . Для систем, описываемых NSE и учитывающих пространственно одномерную накачку, такая процедура в разных вариантах была предложена в [21,22]. При локализованном внешнем воздействии, но в рамках SGE аналогичный подход был развит в [17]. Несмотря на то, что уравнение (1) учитывает затухание, его можно представить в лагранжевой форме [22]. Легко проверить, что (1) для обобщенных координат (u, \dot{u}) является эйлеровым при следующей плотности лагранжиана:

$$l(u, \dot{u}) = \left(\frac{i}{2} (\dot{u}\bar{u} - \dot{\bar{u}}u) - |u'|^2 + \varepsilon^2 |u|^2 + \frac{|u|^4}{2} - h(u + \bar{u})\delta(x) \right) \exp(2\gamma t). \quad (8)$$

Подставляя в это выражение пробную функцию $u = u(x, z(t), B(t), \varphi(t), k(t))$ в виде (7) и интегрируя его по x , получаем эффективный лагранжиан $L = 2 \int_0^\infty dx l(x, t) = L(z(t), B(t), \varphi(t), k(t), t)$, зависящий от времени и динамических переменных $q_i = (z, B, \varphi, k)$:

$$L = \left(B(1 + \text{th } z) (\dot{\varphi} - \varepsilon^2 + B^2 - k^2) + (z + \ln(2 \text{ch } z)) \dot{k} - \frac{2B^3}{3} (1 + \text{th}^3 z) - hB \frac{\cos \varphi}{\sqrt{2} \text{ch } z} \right) \exp(2\gamma t). \quad (9)$$

Соответствующая система лагранжевых уравнений выглядит так:

$$\dot{w} = -2kBw - \gamma \frac{1}{w^2} (1 + w^2) \ln(1 + w^2), \quad (10)$$

$$\dot{B} = \frac{4kB^2}{1 + w^2} + h \frac{B \sin \varphi}{\sqrt{2}w} + \gamma \frac{2B}{w^2} (\ln(1 + w^2) - w^2), \quad (11)$$

$$\dot{\varphi} = (k^2 + \varepsilon^2 - B^2) + \frac{4B^2(1 - w^2)}{(1 + w^2)^2} + h \frac{\cos \varphi}{\sqrt{2}w}, \quad (12)$$

$$\dot{k} = -\frac{4B^3(1 - w^2)}{(1 + w^2)^2} - h \frac{B \cos \varphi}{\sqrt{2}w}, \quad (13)$$

где $w = \exp z$.

Рассмотрим в предложенном приближенном подходе простейший случай отсутствия диссипации ($\gamma = 0$). При этом статические решения системы (10)–(13) имеют простой вид: $k = k_0 = 0$, $B = B_0 = \varepsilon$, $\varphi = \varphi_0^{A,B} = \pi$, $\varphi = \varphi_0^{C,D} = 0$ и

$$w = w_0 = \sqrt{s + \sigma\sqrt{s^2 - 1}} \left(\sqrt{2} + \mu\sqrt{s + \sigma\sqrt{s^2 - 1}} \right), \quad (14)$$

где $s = \sqrt{2}\varepsilon^2/h$, $\sigma^{A,D} = 1$, $\sigma^{B,C} = -1$, $\mu^{B,D} = 1$, $\mu^{A,C} = -1$. (Это выражение может быть записано в более компактной форме: $4sw_0(w_0^2 - 1)/(w_0^2 + 1)^2 = \cos \varphi_0$.) Формула (7) с такими параметрами совпадает с решением исходного уравнения (1), поскольку мы выбрали пробную функцию в виде его решения. Удобство переменной w определяется тем, что эта величина при переходах между последовательностью четырех статических решений $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$ монотонно растет от нуля до бесконечности. Области решений типа A соответствует интервал $0 < w_0 < w_1 = \sqrt{2} - 1$, решениям B — интервал

$w_1 < w_0 < 1$, решениям C — интервал $1 < w_0 < w_2 = \sqrt{2} + 1$ и решениям D — интервал $w_2 < w_0 < \infty$.

В приближенном подходе легко исследовать устойчивость квазисолитонных решений различного типа. После линеаризации уравнений (10)–(13) с $\gamma = 0$ вблизи статического решения, вводя малые добавки $w = w_0 + W$, $B = B_0 + \beta$, $\varphi = \varphi_0 + \chi$, $k = k_0 + \kappa$, для четырехмерного вектора $\mathbf{U} = (W, \beta, \chi, \kappa)$ и решений вида $\mathbf{U} = \mathbf{U}_0 \exp(\lambda t)$ получаем характеристическое уравнение $\hat{A}_0 \mathbf{U} = \lambda \mathbf{U}$, которое сводится к виду

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 F + G = 0, \quad (15)$$

где

$$F = \frac{8\varepsilon^4 (3 - 2w_0^2 + 3w_0^4)}{(1 + w_0^2)^4} > 0,$$

$$G = \frac{64\varepsilon^8 (w_1^2 - w_0^2)(1 - w_0^2)(w_2^2 - w_0^2)}{(1 + w_0^2)^5}.$$

Из этих выражений видно, что величина F положительна при всех значениях w_0 , и критерий устойчивости решения сводится к неравенству $F^2 > G > 0$. Из условия $G > 0$ следует, что решение B с $w_1 < w_0 < 1$ и решение D с $w_0 > w_2$ неустойчивы. Для анализа устойчивости решений типа A и C рассмотрим уравнение для границ устойчивости $G = F^2$, которое сводится к следующему:

$$w_0^{12} - 4w_0^{10} - 2w_0^8 - 12w_0^6 + 33w_0^4 - 8w_0^2 + 8 = 0. \quad (16)$$

Это уравнение имеет два вещественных корня: $w_- \approx 1,228292$ и $w_+ \approx 2,160548$. Таким образом, решение A устойчиво во всей допустимой области парамет-

ров, а решение C устойчиво в областях $1 < w_0 < w_-$ и $w_+ < w_0 < w_2$ (или в терминах амплитуды поля: $0 < h/h_c < 0,397124$ и $0,986722 < h/h_c < 1$). Области устойчивых квазисолитонных состояний в отсутствие затухания приведены на рис. 3.

Полученный результат качественно совпадает с данными приближенного рассмотрения локализованных возбуждений в комбинированной линейно-нелинейной модели (рис. 1(в)).

4. Влияние диссипации на динамику квазисолитонных состояний в методе коллективных переменных

Для учета диссипации в системе вернемся к исходным уравнениям для эффективной динамической системы с четырьмя степенями свободы (10)–(13), и вначале рассмотрим возможные стационарные состояния. Из уравнений (10)–(13) в статическом случае легко выразить характеристики решения B_0 , k_0 и Φ_0

$$B_0^2 = \frac{\varepsilon^2}{2} \left(\sqrt{1 + \Gamma^2 \left(\frac{(1 + w_0^2) \ln(1 + w_0^2)}{2w_0^2} \right)^2} + 1 \right), \quad (17)$$

$$k_0^2 = \frac{\varepsilon^2}{2} \left(\sqrt{1 + \Gamma^2 \left(\frac{(1 + w_0^2) \ln(1 + w_0^2)}{2w_0^2} \right)^2} - 1 \right), \quad (18)$$

$$\sin \Phi_0 = w_0 \Gamma / H \quad (19)$$

через величину w_0 , зависимость которой от затухания $\Gamma = 2\gamma/\varepsilon^2$ и характеристик внешнего поля (его амплитуды $H = h/h_c$ и частоты ε) в неявной форме определяется формулой

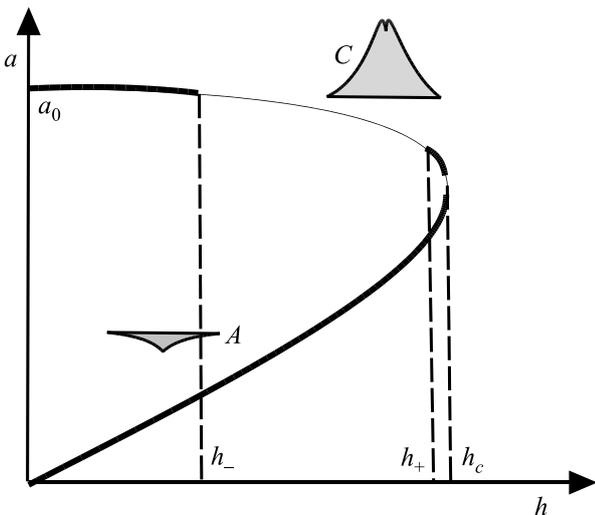


Рис. 3. Области устойчивости (выделены жирными линиями) квазимагнотонных состояний (A) и квазисолитонных состояний (C).

$$H^2 = \Gamma^2 w_0^2 + \frac{4w_0^2 (1 - w_0^2)^2}{(1 + w_0^2)^4} \times \left(1 + \sqrt{1 + \Gamma^2 \left(\frac{(1 + w_0^2) \ln(1 + w_0^2)}{2w_0^2} \right)^2} \right)^2. \quad (20)$$

Таким образом, система алгебраических уравнений

$$\frac{a}{a_0} = w_0 \left(\frac{2B_0(w_0)}{\varepsilon(1 + w_0^2)} \right),$$

$$\frac{h}{h_c} = w_0 \sqrt{\Gamma^2 + (1 - w_0^2)^2 \left(\frac{2B_0(w_0)}{\varepsilon(1 + w_0^2)} \right)^4} \quad (21)$$

с $B_0(w_0)$ из (17) определяет зависимость амплитуды возбуждения в точке накачки от величины внешнего поля $a = a(h)$, аналогичную приведенной на рис. 1(б) при приближенном рассмотрении квазисолитонных состояний в рамках исходных эволюционных уравнений, и на рис. 1(в) для комбинированной линейно-нелинейной модели. Амплитуда квазисолитонных возбуждений изображена на рис. 4 для некоторых значений параметра затухания и демонстрирует качественное сходство и количественную близость результатов метода коллективных переменных и данных анализа исходной системы. (Отметим, что характер зависимости нормированной амплитуды колебаний a/a_0 от безразмерной величины поля h/h_c определяется одним параметром γ/ε^2 .)

Для выяснения устойчивости различных ветвей локализованных возбуждений вернемся к динамическим

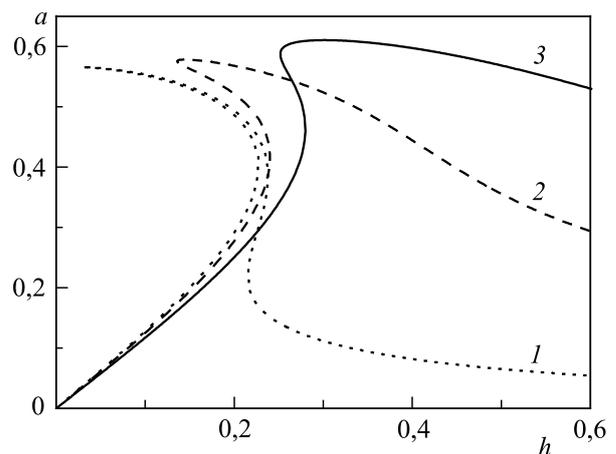


Рис. 4. Зависимости амплитуды квазисолитонных возбуждений a от величины внешнего поля h при его фиксированной частоте ($\varepsilon = 0,4$) и значениях параметра затухания: $\gamma = 0,01$ (кривая 1), $\gamma = 0,05$ (кривая 2) и $\gamma = 0,1$ (кривая 3).

уравнениям (10)–(13) и линеаризуем их вблизи статических решений (17)–(20) для $w_0(h)$, $B_0(h)$, $\varphi_0(h)$ и $k_0(h)$: $w = w_0 + W$, $B = B_0 + \beta$, $\varphi = \pi - \varphi_0 - \chi$ и $k = k_0 + \kappa$. Как и в случае отсутствия диссипации для 4-вектора $\mathbf{U} = (W, \beta, \chi, \kappa)$ и решений типа $\mathbf{U} = \mathbf{U}_0 \exp(\lambda t)$ получаем характеристическое уравнение $\det|\lambda \hat{A} - \hat{A}| = 0$ с матрицей \hat{A} :

$$\hat{A} = 2 \begin{vmatrix} -\gamma(1-p) & -w_0 k_0 & 0 & -w_0 B_0 \\ \gamma B_0 m(qm-2p) & -\gamma p & 2B_0^3 m^3 q & 2B_0^3 m^3 q \\ -2B_0^2 m^3 S/w_0 & -B_0 m^2(2q+S) & -\gamma & -k_0 \\ 2B_0^3 m^3(2q-S)/w_0 & -4B_0^2 m^3 q & -\gamma B_0 & 0 \end{vmatrix}, \quad (23)$$

где $q = (1 - w_0^4)$, $S = (w_1^2 - w_0^2)(w_2^2 - w_0^2)$, $m = 1/(1 + w_0^2)$ и $p = \ln(1 + w_0^2)/w_0^2$. Это — уравнение четвертой степени относительно λ с коэффициентами, зависящими от параметров ε , γ и w_0 с зависимостью $w_0 = w_0(\varepsilon, \gamma, h)$, определяемой (20). Для параметра $\Lambda = \lambda/\varepsilon^2$ эти коэффициенты зависят лишь от w_0 и Γ . Из-за громоздкости полученного уравнения оно решалось численно. Стационарные решения неустойчивы при появлении положительной вещественной части решений характеристического уравнения: $\text{Re} \lambda_i > 0$. На рис. 5(а) приведена зависимость амплитуды локальных возбуждений в точке накачки $a = a(h)$ для значений $\varepsilon = 0,4$ и $\gamma = 0,1$, аналогичная кривой 3 на рис. 4, но с указанием областей устойчивости и неустойчивости стационарных возбуждений. Квазимагнотные состояния типа А устойчивы в области полей до точки бифуркации b_1 , в которой $h_1 \approx 0,28$ и $a_1 \approx 0,47$. Решения типа В неустойчивы между точками бифуркаций b_1 и b_2 (в точке бифуркации b_2 критические значения поля и амплитуды равны соответственно $h_2 \approx 0,25$ и $a_2 \approx 0,59$). Квазисолитонные состояния типа В и С устойчивы в области

полей между точками бифуркаций b_2 и b_3 . В точке b_3 с координатами $h_3 \approx 0,37$ и $a_3 \approx 0,6$ они теряют устойчивость и возникают нестационарные состояния. В этой области (при $h > h_3$) неустойчивость носит осцилляционный характер: экспоненциально нарастают колебания с конечной частотой $\Omega \approx 0,28$, которая слабо зависит от амплитуды поля h . Декремент нарастания амплитуды колебаний зависит от величины поля при $h > h_3$ корневым образом. (На этом же рисунке дополнительная выделенная область, возникающая при $h > 0,56$, соответствует нестационарным колебаниям квазисолитона, вычисленным в рамках исходных уравнений в частных производных (1).)

Подчеркнем, что в рассмотренном конкретном примере с $\varepsilon = 0,4$ и $\gamma = 0,1$ мы считаем, что частота однородного ферромагнитного резонанса равна единице, и циркулярное внешнее магнитное поле вращается с частотой $\omega = 0,84$. При этом в стационарных состояниях вектор намагниченности вращается синфазно с внешним полем, но с определенным сдвигом фазы, зависящим от амплитуды поля и величины диссипации. В нестационарных состояниях наряду с этим вращением возникает дополнительная прецессия намагниченности, сопровождаемая нутацией магнитных моментов (определяемая параметром B). Частота этой добавочной динамики не связана с частотой накачки и определяется амплитудой внешнего поля и затуханием в системе.

Приведенная на рис. 5(а) зависимость качественно совпадает с таковой на рис. 2(б) для системы с параметрами $\varepsilon = 0,3$ и $\gamma = 0,05$. (Как указывалось выше, полевые зависимости определяются единым параметром γ/ε^2 , который в двух данных примерах равен 0,625 и 0,555 соответственно).

На рис. 5(а) отмечены основные бифуркации, разделяющие области устойчивых и неустойчивых стационарных

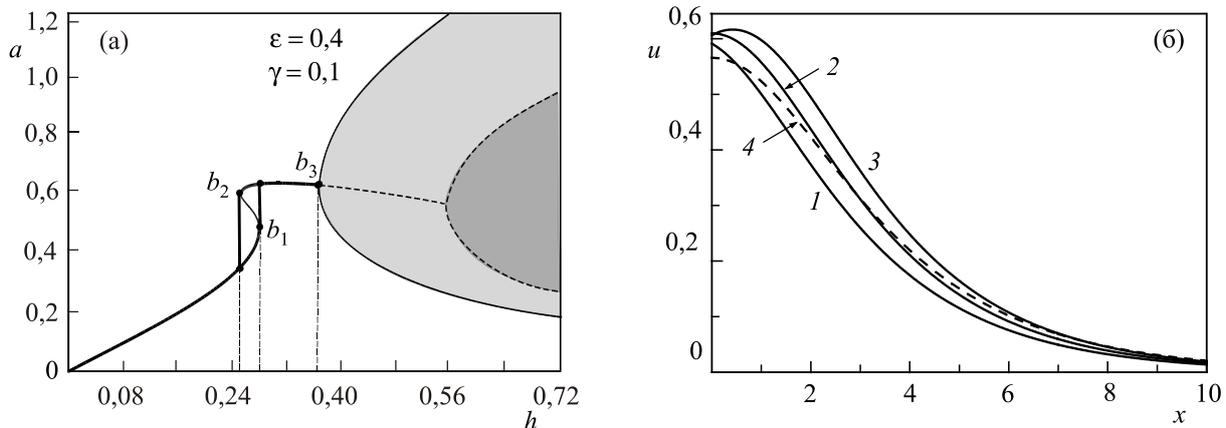


Рис. 5. Зависимость амплитуды квазисолитонных возбуждений a от амплитуды внешнего поля h при $\varepsilon = 0,4$ и $\gamma = 0,1$. Участки кривых для устойчивых состояний выделены жирными линиями, а для неустойчивых — тонкими (а). Распределение поля в квазисолитонных возбуждениях при разных h в области $h(b_2) < h < h(b_3)$ (б). (Обозначения кривых на рис. 5(б) см. в тексте.)

нарных возбуждений. Подробный анализ показывает более «богатую» картину: при $0 < w_0 < w_\alpha \approx 0,41$ четыре корня характеристического уравнения λ_i попарно сопряжены с отрицательными вещественными частями, при $w_\alpha < w_0 < w_0(b_1)$ два корня комплексно сопряжены и два – чисто вещественны (все с отрицательными вещественными частями), в области $w_0(b_1) < w_0 < w_0(b_2)$ один из вещественных корней становится положительным, при $w_0(b_2) < w_0 < w_\beta \approx 0,86$ он снова становится отрицательным, в области $w_\beta < w_0 < w_0(b_3)$ корни попарно комплексно сопряжены с отрицательными вещественными частями и, наконец, при $w_0(b_3) < w_0$ вещественная часть пары комплексно сопряженных корней становится положительной (модуляционная неустойчивость). Полученные результаты качественно близки приведенным выше данным для случая $\varepsilon = 0,3$ и $\gamma = 0,05$ (см. рис. 2(б)).

На рис. 5(б) приведено распределение намагниченности в квазисолитонных состояниях в области между точками бифуркаций b_2 и b_3 . Первая кривая (1) отвечает значению поля $h \approx 0,252$ вблизи точки бифуркации b_2 и соответствует солитону B -типа (с максимумом в точке накачки). Такой характер распределения намагниченности в солитоне сохраняется до поля $h \approx 0,283$ (с $w_0 = 1$), в котором кривая (2) имеет качественно такой же вид, что и для солитона в отсутствие диссипации и накачки (пунктир (4) на рис. 5(б)), но с несколько большей амплитудой. В больших полях реализуется квазисолитонное состояние C -типа с локальным минимумом в точке накачки (кривая 3 для поля $h \approx 0,353$, близкого к точке потери устойчивости b_3). Таким образом, во всей области существования стационарных состояний верхней «солитонной» ветви найденные решения близки к чисто солитонным возбуждениям системы без накачки и диссипации. Это подтверждает правильность использованного качественного рассмотрения динамики джозефсоновских контактов в работе [11].

Исследуем характер нестационарных квазисолитонных состояний.

5. Анализ динамики нестационарных квазисолитонных возбуждений в рамках метода коллективных переменных

Вернемся к системе исходных нелинейных уравнений (10)–(13). Стационарная точка (w_0, B_0, Φ_0, k_0) этой системы в четырехмерном фазовом пространстве (w, B, Φ, k) при переходе через поле бифуркации $h = h(b_3)$ теряет устойчивость и в двухмерном сечении (w, B) превращается в «неустойчивый фокус». На рис. 6(а) показано развитие этой неустойчивости при небольшом превышении внешним полем критического значения: $h = 0,38 > h_3 = 0,37$. Из приведенных на рисунке результатов численного счета следует, что на линейной стадии развития неустойчивости амплитуда колебания с частотой $\Omega \approx 0,284$ нарастает экспоненциально: $u \sim \exp(\lambda t)$ с инкрементом $\lambda \approx 0,009$. Эти значения частоты колебания и инкремента нарастания согласуются с данными, полученными из решения характеристического уравнения $\det|\lambda \hat{I} - \hat{A}| = 0$ с матрицей \hat{A} из (23). При временах $\tau \sim 1/\lambda$, как видно на рис. 6(а), происходит нелинейное ограничение экспоненциального роста амплитуды и выход на новое устойчивое решение, связанное с устойчивым предельным циклом с частотой Ω . Фазовый портрет этого предельного цикла в сечении (z, B) приведен на рис. 6(б). На этом рисунке точка 1 с координатами $z_0 \approx 0,24$ и $B_0 \approx 0,438$ соответствует неустойчивому стационарному состоянию при $h > h(b_3)$, с которого начинается экспоненциальный рост амплитуды колебаний на рис. 6(а). Динамику системы удобно исследовать именно на «фазовой плоскости» двумерного сечения (z, B) , поскольку на ней изображающая точка показывает эволюцию со временем амплитуд и координат двух солитонов, связанных в точке приложения внешнего поля. Точке 2 на рис. 6(б) соответствует конфигурация, в которой два солитона, связанные в локализованном состоянии, максимально сближаются (кривая 2 на рис. 6(в)), а точке 3 — конфигурация в момент, когда колеблющиеся солитоны расходятся на максимальное расстояние (кривая 3 на рис. 6(в)). Пунктирной линией 1 на

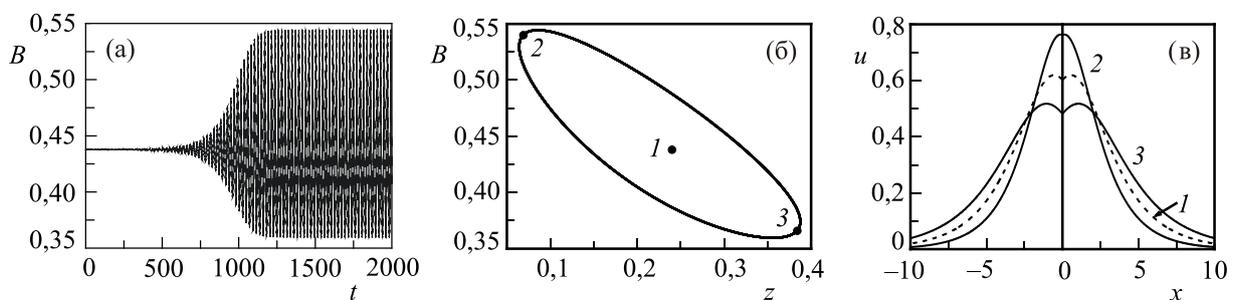


Рис. 6. Развитие неустойчивости стационарных состояний и переход к устойчивому нестационарному режиму колебания (а). Фазовый портрет устойчивого предельного цикла при $h = 0,38$ (б). Динамика профиля решения для осциллирующей пары связанных солитонов в предельных конфигурациях (в). (Обозначения кривых см. в тексте.)

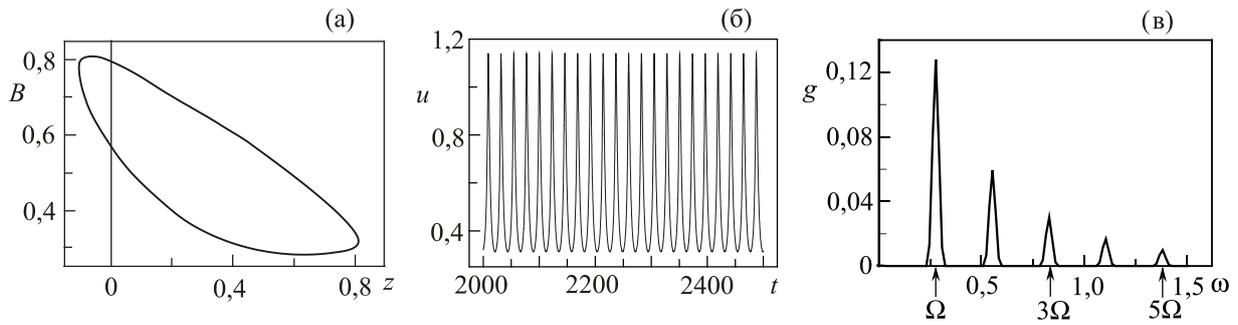


Рис. 7. Предельный цикл, соответствующий нестационарным квазисолитонным возбуждениям при $h = 0,5$ (а). Временная зависимость $u(t)$ амплитуды квазисолитона (б). Плотность частот $g(\omega)$ спектра колебаний квазисолитона (в).

рис. 6(в) изображен профиль неустойчивого стационарного решения, соответствующий точке 1 на рис. 6(б).

Как видно на рис. 6(в), динамика нестационарного квазисолитонного возбуждения представляет собой колебание с частотой Ω двух связанных в точке накачки солитонов. При этом с ростом расстояния между ними амплитуда связанных солитонов уменьшается. С ростом амплитуды внешнего поля динамика нестационарных возбуждений меняется следующим образом. При небольшом увеличении амплитуды поля вблизи точки b_3 характер колебаний сохраняется: см. рис. 7, на котором приведены соответствующие результаты для амплитуды внешнего поля $h = 0,5$.

На рис. 7(а) изображен устойчивый предельный цикл, а на рис. 7(б) — временная зависимость $u(t)$ амплитуды квазисолитона. При колебании связанных солитонов их амплитуда в максимуме существенно превосходит амплитуду солитонов в бездиссипативной среде без внешнего поля, а в минимуме амплитуда сильно понижается, и решение превращается в квази-магнотное, почти линейное возбуждение. Видно, что динамика по-прежнему имеет вид одночастотного колебания. На рис. 7(в) изображены результаты фурье-анализа этого колебания, т.е. функция $g(\omega) = \frac{T}{2\pi} \int_0^T dt u(t) \exp(i\omega t)$, где $u(t)$ — результат числен-

ного счета, приведенного на рис. 7(б) и T — интервал этого счета. Спектр нестационарных возбуждений содержит пики на частотах, равных $n\Omega$. (Ширина пиков

$\delta\omega \sim 1/T$ и масштаб фона определяются длительностью интервала счета и стремятся к нулю при увеличении T .) Наличие кратных частот связано с нелинейным характером предельного цикла и ангармоничностью осцилляций на рис. 7(б).

При дальнейшем росте амплитуды поля происходит новая бифуркация решения и удвоение периода колебаний. Соответствующие зависимости приведены на рис. 8 для значения поля $h = 0,7$. На рис. 8(в) видно появление пиков в частотной плотности состояний $g(\omega)$ на частотах $n\Omega/2$.

Наконец, в больших полях динамика становится хаотической. Фазовый портрет системы в поле $h = 10$ приведен на рис. 9(а), а изменение со временем расстояния между связанными солитонами $u(t)$ — на рис. 9(б). На этих рисунках видно сохранение основного мотива динамики: наличие периодического колебания размера связанного состояния со средней частотой, близкой к частоте в точке бифуркации b_3 . Амплитуда колебания слабо меняется относительно средней величины, но эти отклонения носят хаотический характер. Распределение плотности колебаний $g(\omega)$ приведено на рис. 9(в).

Отметим, что нестационарный режим локализованных колебаний в методе коллективных переменных для значений параметров $\epsilon = 0,4$ и $\gamma = 0,1$ возникает в поле $h \approx 0,37$, в то время как при численном решении исходной системы уравнений (1) он появляется в поле $h > 0,56$ (см. рис. 5(а)). Аналогичное явление наблюдалось и для параметров $\epsilon = 0,3$ и $\gamma = 0,05$ (см. рис. 2(б)): в методе коллективных переменных переход к нестационарной

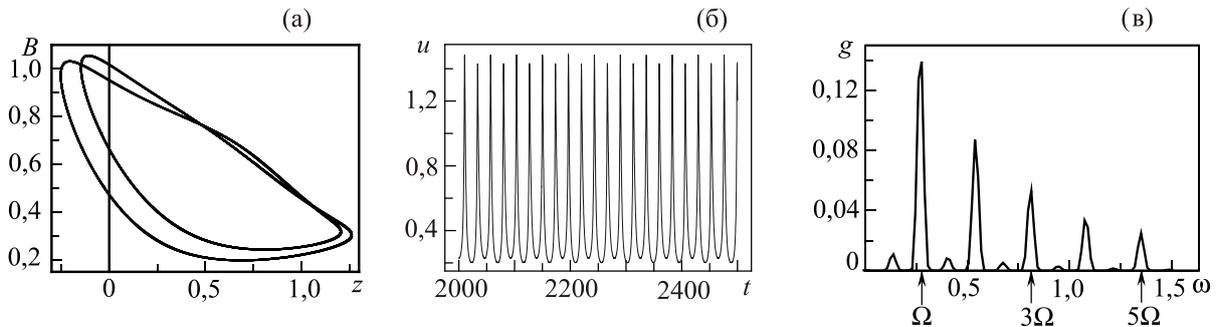


Рис. 8. Характеристики нестационарных колебаний квазисолитонов при $h = 0,7$. Предельный цикл на фазовой плоскости с удвоенным периодом (а). Колебания амплитуды квазисолитона (б). Плотность частот колебаний квазисолитона (в).

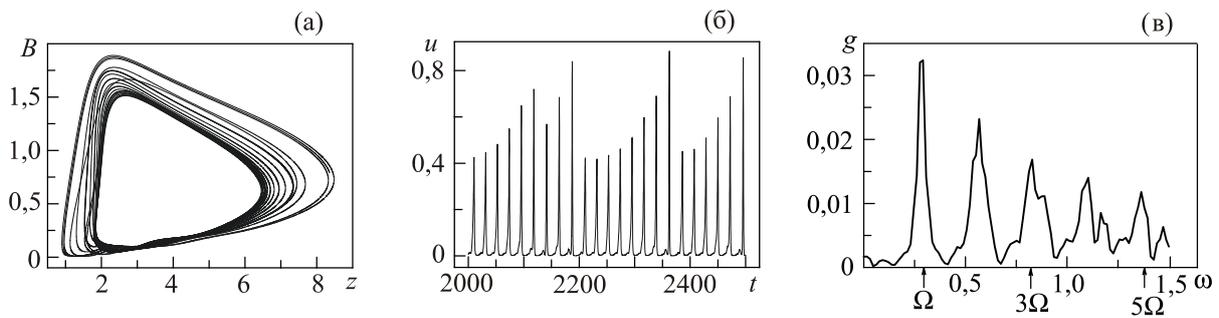


Рис. 9. Хаотическая динамика квазисолитонных состояний в больших внешних полях ($h = 10$). Фазовый портрет системы (а). Временная эволюция размеров возбуждения (б). Частотное распределение колебаний квазисолитона (в).

динамике происходит в меньших полях, чем в рамках исходных дифференциальных уравнений в частных производных. На это обращалось внимание и в работе [16] для случая длинных джозефсоновских контактов.

6. Выводы

В работе предложен вариант метода коллективных переменных и получена соответствующая система уравнений конечномерной динамической системы для анализа динамики квазиодномерного ферромагнетика с анизотропией типа «легкая ось» при учете приложенного локального высокочастотного магнитного поля и диссипации в системе. Показано, что вблизи области приложенного поля возникают нелинейные локализованные возбуждения солитонного типа, в которых диссипация компенсируется энергией внешнего поля. Проанализированы все возможные типы таких локальных состояний и их устойчивость. Переход между состояниями различного типа (квазимагнетными и квазисолитонными) сопровождается гистерезисом зависимости амплитуды поля намагниченности от амплитуды приложенного поля. При больших амплитудах внешней накачки локализованные возбуждения становятся нестационарными и представляют собой осциллирующее во времени связанное состояние двух магнитных солитонов. Это динамическое возбуждение может быть как регулярным (одночастотным или двухчастотным), так и хаотическим. Данные, полученные в рамках метода коллективных переменных, хорошо согласуются с полученными ранее результатами численного изучения соответствующих решений нелинейного уравнения Шредингера.

Настоящая работа была выполнена с использованием вычислительных ресурсов грид-кластера ИЛТРЕ — Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина Национальной академии наук Украины, Харьков. Работа поддержана научным проектом НАН Украины № 4/16–Н и научной программой 1.4.10.26/Ф-26-3.

1. G.P. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics*, Academic, New York (1989), p. 136.
2. A.M. Kosevich, B.A. Ivanov, and A.S. Kovalev, *Phys. Rep.* **194**, 117 (1990).
3. S.O. Demokritov, B. Hillebrahds, and A.N. Slavin, *Phys. Rep.* **348**, 441 (2001).
4. O.M. Braun and Yu.S. Kivshar, *The Frenkel–Kontorova Model*, Springer, Berlin (2004), p. 519.
5. R.G. Hunsperger, *Integrated Optics*, Springer, Berlin (2002), p. 223.
6. G.A. Melkov, A.A. Serga, V.S. Tiberkevich, Yu.V. Kobljanskij, and A.N. Slavin, *Phys. Rev. E* **63**, 066607 (2001).
7. G.A. Melkov, Yu.V. Kobljanskij, A.A. Serga, V.S. Tiberkevich, and A.N. Slavin, *J. Appl. Phys.* **89**, 6689 (2001).
8. T. Neumann, A.A. Serga, and B. Hillebrands, *Appl. Phys. Lett.* **93**, 252501 (2008).
9. O.H. Olsen and M.R. Samuelsen, *Appl. Phys. Lett.* **47**, 1007 (1985).
10. I.Y. Tamm, *Phys. Z. Soviet.* **1**, 733 (1932).
11. O.H. Olsen and M.R. Samuelsen, *Phys. Rev. B* **34**, 3510 (1986).
12. A.C. Ковалев, А.А. Степанов, *Нелинейные возбуждения в ферромагнетике при локализованной высокочастотной накачке, Тезисы XXVI Всесоюзного совещания по физике низких температур*, Донецк (1990), т. 2, с. 211.
13. O.H. Olsen and M.R. Samuelsen, *Phys. Rev. B* **43**, 10273 (1991).
14. A.C. Ковалев, А.А. Степанов, А.А. Перетяцько, *Нелинейный мир* **6**, 367 (2008).
15. В.И. Белан, А.С. Ковалев, А.А. Перетяцько, *ФНТ* **39**, 186 (2013) [*Low Temp Phys.* **39**, 140 (2013)].
16. A.C. Ковалев, Я.Е. Прилепский, А.А. Перетяцько, *ФНТ* **34**, 1294 (2008) [*Low Temp. Phys.* **34**, 1019 (2008)].
17. Yu.S. Kivshar, O.H. Olsen, and M.R. Samuelsen, *Phys. Lett. A*, **168**, 391 (1992).
18. K. Kurokawa and M. Nakazawa, *IEEE J. Quantum Electron.* **28**, 1922 (1992).
19. K. Yamashita, E. Fukuzawa, A. Kitanobou, and K. Oe, *Appl. Phys. Lett.* **92**, 051102 (2008).
20. А.М. Косевич, А.С. Ковалев, *Введение в нелинейную физическую механику*, Наукова думка, Киев (1989), с. 301.

21. K. Nozaki and N. Bekki, *J. Phys. Soc. Jpn.* **54**, 2363 (1985).
22. K.H. Spatschek, H. Pietsch, E.W. Laedke, and T. Eickermann, in: *Singular Behavior and Nonlinear Dynamics*, World Scientific, Singapore (1988), Vol. 2, p. 555.

Quasi-soliton states induced in nonlinear media by high-frequency local radiation: An analytical approach in compare to numerical calculations

V.I. Belan, A.S. Kovalev, and A.A. Peretyatko

A collective coordinate approach is applied to analytical and numerical study of spatially localized excitations of one-dimensional magnetic system in external high-frequency field. The dependence for ampli-

amplitude of local soliton-like states on external field magnitude is found for different values of its frequency and damping in the system. It is demonstrated the hysteresis character of this dependence and existence of instability domains. In these field intervals the quasi-soliton excitations become non-stationary and additional periodic magnetization nutation appears. The system shows a variety of interesting nonlinear phenomena such as periodicity doubling and chaos.

PACS: 05.45.Yv Solitons;
63.20.Pw Localized modes.

Keywords: quasi-one-dimensional systems, high-frequency pumping, nonlinear resonance, quasi-soliton excitations.