УДК 510.6, 681.3.06

*М.С. Нікітченко, С.С. Шкільняк*

# ЛОГІКИ ЛОКАЛЬНО-ЕКВІТОННИХ ПРЕДИКАТІВ: СЕМАНТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ТА СЕКВЕНЦІЙНІ ЧИСЛЕННЯ*

Пропонуються композиційно-номінативні логіки локально-еквітонних предикатів. Такі логіки зберігають основні дедуктивні властивості класичних логік, але мають значно багатший клас моделей. Вивчаються семантичні властивості цих логік, відношення логічного наслідку для множин формул, будуються відповідні секвенційні числення, на їх основі доводяться теореми коректності та повноти.

## *Вступ*

Методи математичної логіки знаходять широке застосування в інформатиці, програмуванні, обчислювальній математиці, лінгвістиці, інших сферах людської діяльності. Це привело до появи великої кількості логічних формалізмів, які орієнтовані на відображення особливостей тих чи інших прикладних областей. Таких формалізмів стало настільки багато, що навіть поверхневий їх опис вимагає багатьох томів (тут досить пригадати 18-томне! видання з філософської логіки видавництва Kluwer Academic Publishers, редактори Dov M. Gabbay та F. Guenther). Таке розмаїття логік робить актуальною проблему їх інтеграції. Тому не дивною є поява різноманітних підходів до уніфікації логічних формалізмів. До таких належить і композиційно-номінативний підхід [1], який має метою побудову логік предикатів різного рівня абстракції на єдиній методологічний основі з теорією програмування та теорією алгоритмів. Побудова відповідної ієрархії логік різного рівня абстракції є дуже складною проблемою, вона вимагає багатьох років напруженої праці. Проте вже зараз можна окреслити певні логічні формалізми, які займають в цій ієрархії особливе місце. До таких формалізмів в першу чергу належить класична логіка предикатів. Особливе місце класичної логіки визначається тим, що, по-перше, вона є основою багатьох спеціальних логік (модальних, темпоральних, релевантних та інших), а по-друге, вона детально досліджена і для неї побудовано багато різноманітних систем автоматизованого доведення.

В той же час класична логіка предикатів, незважаючи на численні позитивні якості, не дозволяє адекватно виразити нові задачі, які з'являються у програмуванні та моделюванні. Вона має низку обмежень [1], які ускладнюють її застосування в зазначених областях. Викликано це тим, що класична логіка орієнтується на класичні математичні структури тотальних (всюди визначених) $n$-арних функцій та предикатів. Така орієнтація веде до обмежень при побудові формул та моделей класичної логіки. Проте якщо подивитись на аксіоми та правила виведення різних числень класичної логіки, то неважко переконатись, що в них $n$-арні функції та предикати безпосередньо не використовуються. Це спостереження дає підставу для побудови логіки, яка орієнтується на істотно загальніший клас функцій та предикатів.

Проведений аналіз класичної логіки [2, 3] дозволяє стверджувати, що такими більш загальними функціями та предикатами повинні бути квазіарні відображення, які задаються на довільних наборах іменованих предметних значень. Прийняття такого рішення веде до кількох наслідків. По-перше, перехід до квазіарних відображень змушує відмовитись від їх тотальності. Це означає перехід до логік часткових предикатів. По-друге, робота з квазіарними предикатами вимагає нових засобів, пов'язаних з перейменуванням значень, що спонукає явне введення

* Робота виконана в рамках проекту INTAS 2000-447

оператора (композиції) реномінації. По-третє, клас квазіарних предикатів є надзвичайно потужним, тому для збереження властивостей класичної логіки його варто обмежити. Таке обмеження природно задається властивістю еквітонності. Ця властивість говорить про те, що значення відображення не змінються при розширенні даних. Наведені властивості реалізовані в некласичних логіках часткових предикатів, які орієнтовані на клас еквітонних відображень [2, 3].

Зважаючи на те, що некласичні логіки предикатів зберігають основні дедуктивні властивості класичної логіки, але розширюють клас її моделей, природно поставити питання про побудову некласичних логік з максимальним класом моделей. Побудова такого максимального класу вимагає попереднього уточнення та спеціального дослідження. Крім того, вже зараз можна стверджувати, що опис такого класу не буде простим. Тому темою даної статті є побудова некласичної логіки, орієнтованої на відносно простий, зате потужний клас відображень. Таким є клас локально-еквітонних предикатів. Цей клас є узагальненням класу еквітонних предикатів, для якого допускається розширення даних лише на скінченну кількість іменованих значень (зауважимо, що достатньо розглядати розширення лише на одне значення — 1-еквітонність).

Побудовані композиційно-номінативні логіки локально-еквітонних предикатів (ЛЕ-логіки) зберігають основні закони класичної логіки при істотному розширенні класу моделей. Це дозволяє використовувати в програмуванні та моделюванні теоретичні результати і багатий досвід застосування класичної логіки. В статті викладаються семантичні властивості ЛЕ-логік, зокрема відношення логічного наслідку для множин формул. Стосовно синтаксичного аспекту для таких логік будуються аксіоматичні системи секвенційного типу — реномінативні та кванторні секвенційні ЛЕ-числення. На базі таких числень розглядаються теореми повноти для ЛЕ-логік реномінативного та кванторного рівнів.

## *1. Основні поняття та семантичні властивості ЛЕ-логік*

Будемо дотримуватись позначень робіт [2, 4]. Для зручності нагадаємо основні поняття та визначення.

Потужність множини $M$ позначатимемо $|M|$. Те, що значення $f(d)$ деякої функції $f: D \to R$ визначене, позначаємо $f(d)\downarrow$. Якщо $f(d)$ невизначене, то пишемо $f(a)\uparrow$. Для функцій $f$ та $g$ вводимо позначення $f(a) \cong g(b)$, якщо з $f(a)\downarrow$ та $g(b)\downarrow$ випливає $f(a) = g(b)$.

Нехай $A$ — множина базових даних, $V$ — множина предметних імен (предметних змінних). *$V$-іменною множиною* ($V$-ІМ) над $A$ назвемо довільну однозначну функцію із $V$ в $A$. Множину всіх $V$-ІМ над $A$ позначаємо ${}^{V}\!A$. $V$-ІМ будемо звичайно задавати у вигляді $[v_1 \mapsto a_1, ..., v_n \mapsto a_n, ...]$ (тут $v_i \in V$, $a_i \in A$, причому $v_i \neq v_j$ при $i \neq j$). *$V$-повна ІМ над $A$* — це тотальна однозначна функція із $V$ в $A$. Множину всіх $V$-повних ІМ над $A$ позначаємо $A^V$. Множину всіх скінченних $V$-ІМ над $A$ позначаємо ${}^{V}\!A_F$.

Для $V$-ІМ вводимо операції $\cap$, $\setminus$ та операцію звуження за множиною $X \subseteq V$, задану так: $\delta\|X = [v \mapsto a \in \delta \mid v \in X]$. Вводимо функцію $im$: ${}^{V}\!A \to 2^V$, визначену умовою $im(\delta) = pr_1(\delta)$.

Замість $\delta\|(V \setminus \{x\})$ для спрощення будемо писати $\delta\|\text{-}x$.

Операція $\|X$ для множин іменних множин визначається так: $\mathrm{M}\|X = \{\delta\|X \mid \delta \in \mathrm{M}\}$.

Замість $\mathrm{M}\|(V \setminus \{x\})$ для спрощення будемо писати $\mathrm{M}\|\text{-}x$.

Визначимо операцію $\nabla$ накладки $V$-ІМ $\delta_2$ на $V$-ІМ $\delta_1$: $\delta_1 \nabla \delta_2 = \delta_2 \cup (\delta_1\|(V \setminus im(\delta_2)))$.

Безпосередньо із визначення операції $\nabla$ випливає: якщо $\alpha \subseteq \beta$, то $\alpha \nabla \delta \subseteq \beta \nabla \delta$.

**Твердження 1.** Нехай $\alpha \subseteq \delta$, $\beta \subseteq \delta$ та $\alpha \setminus \beta$ і $\beta \setminus \alpha$ скінченні. Тоді існує ІМ

$\varphi \subseteq \delta$ така, що $\alpha \subseteq \varphi$, $\beta \subseteq \varphi$ та $\varphi \setminus \alpha$ і $\varphi \setminus \beta$ скінченні.

Справді, ІМ $\varphi = (\alpha \cap \beta) \cup (\alpha \setminus \beta) \cup \cup (\beta \setminus \alpha)$ — шукана.

Операцію *реномінації* **r**: ${}^VA \times {}^VV_F \to \to {}^VA$ визначимо наступним чином:

$$\mathbf{r}([v_1 \mapsto x_1, ..., v_n \mapsto x_n], \delta) = [v_1 \mapsto \delta(x_1), ..., v_n \mapsto \mapsto \delta(x_n)] \cup (\delta \,\|\, (V \setminus \{v_1, ..., v_n\})).$$

Операція $\mathbf{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$ монотонна в наступному смислі: із $d' \supseteq d$ випливає $\mathbf{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(d') \supseteq \supseteq \mathbf{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(d)$.

Довільну функцію вигляду ${}^VA \to R$ назвемо *V-квазіарною* функцією. Нехай $Fn^A$ — множина таких функцій. Під композицією *реномінації* в загальному випадку розуміємо композицію $\boldsymbol{R} : Fn^A \times {}^VV_F \to Fn^A$, яка задається так:

$$\boldsymbol{R}(f, [v_1 \mapsto x_1, ..., v_n \mapsto x_n])(\delta) = = f(\mathbf{r}([v_1 \mapsto x_1, ..., v_n \mapsto x_n], \delta)).$$

При фіксуванні множини пар імен $[v_1 \mapsto x_1, ..., v_n \mapsto x_n]$ говоримо про параметричну операцію реномінації $\mathbf{r}^{[v_1 \mapsto x_1, ..., v_n \mapsto x_n]}: {}^VA \to {}^VA$ та параметричну композицію реномінації $\boldsymbol{R}^{[v_1 \mapsto x_1, ..., v_n \mapsto x_n]}: Fn^A \to Fn^A$, які традиційно позначаються [2] $\mathbf{r}_{x_1, ..., x_n}^{v_1, ..., v_n}$ та $\boldsymbol{R}_{x_1, ..., x_n}^{v_1, ..., v_n}$. Ввівши позначення вигляду $\bar{y}$ для $y_1, ..., y_n$, замість $\mathbf{r}_{x_1, ..., x_n}^{v_1, ..., v_n}$ та $\boldsymbol{R}_{x_1, ..., x_n}^{v_1, ..., v_n}$ також пишемо $\mathbf{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$ та $\boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$.

Довільний предикат вигляду $P : {}^VA \to \{T, F\}$ назвемо *V-квазіарним* предикатом на $A$.

Предикат $P$ (частково) *істинний*, якщо для довільних $d \in {}^VA$ із $P(d)\downarrow$ випливає $P(d) = T$.

Ім'я $x$ *неістотне* для $V$-квазіарного предикату $P$, якщо для довільних $d \in {}^VA$ та для довільних $a$, $b \in A$ маємо $P(d \nabla x \mapsto a) \cong P(d \nabla x \mapsto b)$.

$V$-квазіарний предикат $P$ на $A$ назвемо *1-еквітонним*, якщо для довільних $d$, $d' \in {}^VA$ із умов $P(d)\downarrow$, $d' \supset d$ та $|d' \setminus d| = 1$ випливає $P(d')\downarrow = P(d)$.

$V$-квазіарний предикат $P$ на $A$ назвемо *скінченно-еквітонним*, або *локально-еквітонним*, якщо для довільних $d$, $d' \in {}^VA$ із умов $P(d)\downarrow$, $d' \supseteq d$ та $d' \setminus d$ скінченна, випливає $P(d')\downarrow = P(d)$.

Неважко переконатись, що має місце

**Твердження 2.** Предикат $P$ 1-еквітонний $\Leftrightarrow$ $P$ локально-еквітонний.

$V$-квазіарний предикат $P$ на $A$ назвемо *еквітонним*, якщо для довільних $d$, $d' \in {}^VA$ із умови $P(d)\downarrow$ та $d' \supseteq d$ випливає $P(d')\downarrow = P(d)$.

Кожний еквітонний предикат є локально-еквітонним, але зворотне необов'язкове:

**Твердження 3.** Існують нееквітонні локально-еквітонні предикати.

Таким є, зокрема, предикат, істинний на всіх скінченних ІМ та хибний на всіх нескінченних ІМ.

$V$-квазіарний предикат $P$ *повнототальний*, якщо $P(d)\downarrow$ для всіх $d \in A^V$.

Еквітонні повнототальні $V$-квазіарні предикати назвемо *V-повними*.

Семантичною основою композиційно-номінативної логіки локально-еквітонних предикатів (скорочено ЛЕ-логіки) реномінативного та кванторного рівнів є композиційні алгебри локально-еквітонних квазіарних предикатів $(LEPr^A, \boldsymbol{C})$. Тут $LEPr^A$ — множина локально-еквітонних $V$-квазіарних предикатів на $A$, множина $\boldsymbol{C}$ задається базовими композиціями першого порядку $\vee$, $\neg$, $\boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$ для логік реномінативного рівня та $\vee$, $\neg$, $\boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, $\exists \boldsymbol{x}$ для логік кванторного рівня. Такі композиції зберігають [2] властивості еквітонності, фінарності та повнототальності.

**Теорема 1.** Композиції $\neg$, $\vee$, $\boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, $\exists \boldsymbol{x}$ зберігають властивість локально-еквітонності $V$-квазіарних предикатів.

Нехай $d' \supseteq d$ та $d' \setminus d$ скінченна. Нехай предикати $P$ та $Q$ локально-еквітонні.

Із умови $P(d)\downarrow$ та $Q(d)\downarrow$ маємо $P(d')\downarrow = P(d)$ та $Q(d')\downarrow = Q(d)$. Якщо $\neg(P)(d)\downarrow$, то $\neg(P)(d')\downarrow = \neg(P)(d)$. Якщо

$\vee(P, Q)(d)\downarrow$, то $P(d) = T$, або $Q(d) = T$, або $P(d) = Q(d) = F$. За локально-еквітонністю $P$ та $Q$ маємо, що $P(d') = T$, або $Q(d') = T$, або $P(d) = Q(d) = F$. Звідси $\vee(P, Q)(d')\downarrow = \vee(P, Q)(d)$.

Нехай $\boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)(d)\downarrow$. За монотонністю операції $\mathbf{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$ із $d' \supseteq d$ маємо $\mathbf{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(d') \supseteq \supseteq \mathbf{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(d)$. Якщо $d' \setminus d$ скінченна, то $\mathbf{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(d') \setminus \setminus \mathbf{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(d)$ теж скінченна. За локально-еквітонністю $P$ маємо $P(\mathbf{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(d'))\downarrow = P(\mathbf{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(d))$, тобто $\boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)(d')\downarrow = \boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)(d)$.

Нехай $\exists\boldsymbol{x}(P)(d)\downarrow$. Це означає, що $P(d \nabla x \mapsto b) = T$ для деякого $b \in A$ або $P(d \nabla x \mapsto a) = F$ для всіх $a \in A$. Із $d' \supseteq d$ маємо $d' \nabla x \mapsto a \supseteq d \nabla x \mapsto a$. Якщо $d' \setminus d$ скінченна, то зрозуміло, що $(d' \nabla x \mapsto a) \setminus \setminus (d \nabla x \mapsto a)$ теж скінченна. Звідси за локально-еквітонністю предикату $P$ маємо $P(d' \nabla x \mapsto b)\downarrow = P(d \nabla x \mapsto b) = T$ для деякого $b \in A$ або $P(d' \nabla x \mapsto a)\downarrow = = P(d \nabla x \mapsto a) = F$ для всіх $a \in A$. Тому $\exists\boldsymbol{x}(P)(d')\downarrow = \exists\boldsymbol{x}(P)(d)$.

**Наслідок 1.** Клас $LEPr^A$ замкнений відносно композицій $\neg$, $\vee$, $\boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, $\exists\boldsymbol{x}$.

Беручи до уваги похідні композиції $\rightarrow$, **&**, $\leftrightarrow$, $\forall\boldsymbol{x}$, дістаємо:

**Наслідок 2.** Клас $LEPr^A$ замкнений відносно композицій $\neg$, $\vee$, $\rightarrow$, **&**, $\leftrightarrow$, $\boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, $\exists\boldsymbol{x}$, $\forall\boldsymbol{x}$.

Побудова композиційної алгебри локально-еквітонних предикатів дає змогу визначити мову ЛЕ-логіки. *Алфавіт* мови складається з множини $V$ предметних імен (предметних змінних), множини $Ps$ предикатних символів, а також символів базових композицій $\neg$, $\vee$, $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, $\exists x$.

Множина $\boldsymbol{Fr}$ формул мови ЛЕ-логіки визначається індуктивно:

1. Кожний предикатний символ є формулою. Такі формули назвемо *атомарними*.

2. Нехай $\Phi$ та $\Psi$ — формули. Тоді $\neg\Phi$, $\vee\Phi\Psi$, $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\ \Phi$, $\exists x\Phi$ — формули.

Для кожної формули вигляду $\exists x\Phi$ чи $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi$ формулу $\Phi$ назвемо областю дії кванторного префікса $\exists x$ чи символа реномінації $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}$. Для запису формул будемо також використовувати інфіксну форму та символи похідних композицій $\rightarrow$, &, $\leftrightarrow$, $\forall x$.

При фіксуванні множини базових композицій композиційна алгебра $(LEPr^A,\ \boldsymbol{C})$ визначається алгебраїчною системою (АС) $(A,\ LEPr^A)$. Для визначення значення формул ЛЕ-логіки задамо відображення $\boldsymbol{I} : Ps \rightarrow LEPr^A$. Пару $((A,\ LEPr^A), \boldsymbol{I})$ будемо називати алгебраїчною системою локально-еквітонних предикатів з доданою сигнатурою. Надалі такі АС будемо позначати у вигляді $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I})$.

Відображення $\boldsymbol{I}$ продовжимо до відображення $\boldsymbol{J} : \boldsymbol{Fr} \rightarrow EPr^A$:

1) $\boldsymbol{J}(p) = \boldsymbol{I}(p)$ для кожного $p \in Ps$.

2) $\boldsymbol{J}(\neg\Phi) = \neg\boldsymbol{J}(\Phi)$, $\boldsymbol{J}(\vee\Phi\Psi) = \vee(\boldsymbol{J}(\Phi), \boldsymbol{J}(\Psi))$, $\boldsymbol{J}(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\ \Phi) = \boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\boldsymbol{J}(\Phi))$, $\boldsymbol{J}(\exists x\Phi) = \exists\boldsymbol{x}(\boldsymbol{J}(\Phi))$.

Предикат $\boldsymbol{J}(\Phi)$, який є значенням формули $\Phi$ при інтерпретації $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I})$, позначаємо $\Phi_{\boldsymbol{A}}$.

Таким чином, з синтаксичної точки зору мови ЛЕ-логіки та неокласичної логіки (НКЛ) не відрізняються. Різниця — в семантичних моделях. Для ЛЕ-логіки клас таких моделей ширший. У той же час основні закони класичної логіки [9, 10] справджуються і для ЛЕ-логіки.

Формула $\Phi$ *істинна при інтерпретації* $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I})$ або $\boldsymbol{A}$-істинна, якщо $\Phi_A$ — частково істинний предикат. Це позначаємо $\boldsymbol{A} \models \Phi$.

Формула $\Phi$ *всюди істинна*, якщо $\boldsymbol{A} \models \Phi$ при кожній інтерпретації $\boldsymbol{A}$. Це позначаємо $\models \Phi$.

Формула $\Psi$ є *логічним наслідком* формули $\Phi$, що позначаємо $\Phi \models \Psi$, якщо $\models \Phi \rightarrow \Psi$.

Формули Φ та Ψ *логічно еквівалентні*, що позначаємо Φ~Ψ, якщо $\Phi \models \Psi$ та $\Psi \models \Phi$.

Формула Ψ є логічним наслідком множини формул $\{\Phi_1, ..., \Phi_n\}$, що позначаємо $\{\Phi_1, ..., \Phi_n\} \models \Psi$, якщо $\Phi_1\& \ldots \&$ $\& \Phi_n \models \Psi$.

Семантичні властивості ЛЕ-логік в основному аналогічні відповідним властивостям НКЛ, які розглядались в [2–6]. Важливе місце серед таких властивостей займає теорема семантичної еквівалентності.

**Теорема 2.** Нехай формула Φ′ отримана із формули Φ заміною деяких входжень формул $\Phi_1, ..., \Phi_n$ на $\Psi_1$, ..., $\Psi_n$ відповідно. Якщо $\models \Phi_1 \leftrightarrow \Psi_1$, ..., $\models \Phi_n \leftrightarrow \Psi_n$, то $\models \Phi \leftrightarrow \Phi'$.

Предметне ім'я $x\in V$ *неістотне для формули* Φ, якщо для кожної $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I})$ ім'я $x$ неістотне для предикату $\Phi_A$. Критерії неістотності предметних імен, що мають місце для НКЛ, справджуються і для ЛЕ-логік.

**Теорема 3.** Ім'я $x\in V$ неістотне для формули Φ ⇔ для кожного $v\in V$ $\models \Phi \leftrightarrow R_v^x(\Phi)$.

**Теорема 4.** Ім'я $x\in V$ неістотне для формули Φ ⇔ $\models \Phi \leftrightarrow \forall x\Phi$ ⇔ $\models \Phi \to$ $\to \forall x\Phi$ ⇔ $\models \exists x\Phi \to \Phi$ ⇔ $\models \exists x\Phi \leftrightarrow \Phi$.

Для кожного $p\in Ps$ постулюємо множину синтетично неістотних [6] імен. Таку множину визначаємо за допомогою тотальної функції $\mu : Ps \to 2^V$. Зазначену функцію продовжуємо так, як це зроблено для НКЛ [6], до функції $\mu : \boldsymbol{Fr} \to 2^V$. Кожне $x\in\mu(\Phi)$ неістотне для формули Φ.

Ім'я $x\in V$ *тотально неістотне*, якщо воно неістотне для кожного $p\in Ps$.

Додатковою вимогою до семантичних моделей ЛЕ-логік, подібно до семантичних моделей НКЛ, є наявність нескінченної множини тотально неістотних імен. Це необхідно [6] для виконання еквівалентних перетворень довільних формул.

Семантичні властивості ЛЕ-логік RT, RR, R¬, R∃, PsN, ΦN формулюються цілком аналогічно відповідним властивостям неокласичних логік, які наведені в [2–6].

Позначимо σ(Φ) множину всіх тих $p\in Ps$, які входять до складу формули Φ.

Позначимо $nm$(Φ) множину всіх імен із $V$, які фігурують у символах реномінації та квантифікації, що входять до складу Φ. Таку $nm$(Φ) назвемо *множиною імен* формули Φ.

Позначимо $q$(Φ) множину всіх імен із $V$, які фігурують у символах квантифікації, що входять до складу Φ. Таку $q$(Φ) назвемо *множиною кванторних імен* формули Φ.

Множину $nm(\Phi) \setminus q(\Phi)$ позначимо $nq$(Φ).

Розширимо $nm$, σ, $q$ та $nq$ на множини формул:

$$nm(\Gamma) = \bigcup_{\Phi\in\Gamma} nm(\Phi)\,;\ \sigma(\Gamma) = \bigcup_{\Phi\in\Gamma} \sigma(\Phi)\,;$$

$$q(\Gamma) = \bigcup_{\Phi\in\Gamma} q(\Phi)\,;\ nq(\Gamma) = nm(\Gamma)\backslash q(\Gamma).$$

Формула *примітивна*, якщо вона атомарна або має вигляд $R_{\bar{\boldsymbol{x}}}^{\bar{\boldsymbol{v}}}p$, де $\{\bar{\boldsymbol{v}}\} \cap \mu(p) = \varnothing$.

Формула Ψ знаходиться в *різнокванторній*, або *субнормальній* формі, якщо всі входження кванторних префіксів у Ψ, за їх наявності, — по різних тотально неістотних іменах, причому кожне ім'я $y\in q(\Psi)$ не може лежати в області дії символа $R_{\bar{\boldsymbol{x}}}^{\bar{\boldsymbol{v}}}$ такого, що $y\in\{\bar{\boldsymbol{v}}, \bar{\boldsymbol{x}}\}$.

Формулу в різнокванторній формі назвемо *різнокванторною*, або *субнормальною*. Кожну формулу ЛЕ-логіки можна звести до субнормальної форми:

**Теорема 5.** Для кожної формули Φ можна збудувати різнокванторну формулу Ξ таку, що $\models \Phi \leftrightarrow \Xi$.

Доведення цілком аналогічне доведенню [8] відповідної теореми неокласичної логіки. Різнокванторну формулу Ξ, отриману із Φ описаним в такому доведенні способом, назвемо *субнормалізантою* формули Φ.

Формула $\Psi$ знаходиться в *нормальній* формі [2, 4], якщо вона в різнокванторній формі, та всі її символи реномінації, за їх наявності, застосовані тільки до предикатних символів. Формулу в нормальній формі назвемо *нормальною*.

**Теорема 6**. Для кожної формули $\Phi$ можна збудувати нормальну формулу $\Psi$ таку, що $\models \Phi \leftrightarrow \Psi$.

Доведення теореми 6 аналогічне доведенню [2, 4] відповідної теореми неокласичної логіки. Нормальну формулу $\Xi$, отриману із $\Phi$ описаним у такому доведенні способом, назвемо *нормалізантою* формули $\Phi$.

Надалі вважаємо зафіксованою мову ЛЕ-логіки та відповідну сигнатуру АС.

Для довільних $d \in {}^V A$ та $X \subseteq V$ множину $\bigcup_{\kappa \in {}^X A_F} d \nabla \kappa$ позначимо ${}^X\boldsymbol{F}_d$. При $X = V$ множину ${}^V\boldsymbol{F}_d$ позначимо $\boldsymbol{F}_d$. Таким чином, $\boldsymbol{F}_d$ — множина всіх ІМ, утворених накладками скінченних ІМ на $d$.

**Теорема 7.** Нехай $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I_A})$ і $\boldsymbol{B} = (A, \boldsymbol{I_B})$ — $AC$ одної сигнатури та $d \in {}^V A$. Нехай формула $\Phi$ із $nm(\Phi) = X$ така, що для всіх $p \in \sigma(\Phi)$ для всіх $\delta \in {}^X\boldsymbol{F}_d$ із умови $p_{\boldsymbol{A}}(\delta)\downarrow$ випливає $p_{\boldsymbol{B}}(\delta)\downarrow = p_{\boldsymbol{A}}(\delta)$. Тоді для всіх $\delta \in {}^X\boldsymbol{F}_d$ з умови $\Phi_{\boldsymbol{A}}(\delta)\downarrow$ випливає $\Phi_{\boldsymbol{B}}(\delta)\downarrow = \Phi_{\boldsymbol{A}}(\delta)$.

Доводимо індукцією за побудовою формули $\Phi$.

Нехай $\Phi$ атомарна, тобто $\Phi$ суть $p \in Ps$. Тоді $\Phi_{\boldsymbol{A}}(\delta)\downarrow$ означає $p_{\boldsymbol{A}}(\delta)\downarrow$. Згідно умови теореми звідси $p_{\boldsymbol{B}}(\delta)\downarrow = p_A(\delta)$, тобто $\Phi_{\boldsymbol{B}}(\delta)\downarrow = \Phi_{\boldsymbol{A}}(\delta)$.

Нехай $\Phi$ має вигляд $\neg\Psi$. Тоді $\Phi_{\boldsymbol{A}}(\delta)\downarrow$ означає $(\neg\Psi)_{\boldsymbol{A}}(\delta)\downarrow$. Із $(\neg\Psi)_{\boldsymbol{A}}(\delta)\downarrow$ випливає $\Psi_{\boldsymbol{A}}(\delta)\downarrow$, звідки за припущенням індукції $\Psi_{\boldsymbol{B}}(\delta)\downarrow = \Psi_{\boldsymbol{A}}(\delta)$. Звідси $(\neg\Psi)_{\boldsymbol{B}}(\delta)\downarrow = (\neg\Psi)_{\boldsymbol{A}}(\delta)$, тобто $\Phi_{\boldsymbol{B}}(\delta)\downarrow = \Phi_{\boldsymbol{A}}(\delta)$.

Нехай $\Phi$ має вигляд $\vee\Psi\Xi$. Тоді $\Phi_{\boldsymbol{A}}(\delta)\downarrow$ означає $(\vee\Psi\Xi)_{\boldsymbol{A}}(\delta)\downarrow$. Можливі два випадки: 1) $\Psi_{\boldsymbol{A}}(\delta) = \Xi_{\boldsymbol{A}}(\delta) = F$; 2) $\Psi_{\boldsymbol{A}}(\delta) = T$ або $\Xi_{\boldsymbol{A}}(\delta) = T$.

У випадку 1) за припущенням індукції $\Psi_{\boldsymbol{B}}(\delta)\downarrow = \Psi_{\boldsymbol{A}}(\delta) = F$ та $\Xi_{\boldsymbol{B}}(\delta)\downarrow = \Xi_{\boldsymbol{A}}(\delta) = F$, звідси $(\vee\Psi\Xi)_{\boldsymbol{B}}(\delta)\downarrow = (\vee\Psi\Xi)_{\boldsymbol{A}}(\delta) = F$. У випадку 2) за припущенням індукції $\Psi_{\boldsymbol{B}}(\delta)\downarrow = \Psi_{\boldsymbol{A}}(\delta) = T$ або $\Xi_{\boldsymbol{B}}(\delta)\downarrow = \Xi_{\boldsymbol{A}}(\delta) = T$, звідки $(\vee\Psi\Xi)_{\boldsymbol{B}}(\delta)\downarrow = (\vee\Psi\Xi)_{\boldsymbol{A}}(\delta) = T$. В обох випадках $\Phi_{\boldsymbol{B}}(\delta)\downarrow = \Phi_{\boldsymbol{A}}(\delta)$.

Нехай $\Phi$ має вигляд $R^{v_1,\ldots,v_n}_{x_1,\ldots,x_n}\Psi$. Тоді $\Phi_{\boldsymbol{A}}(\delta)\downarrow$ означає $(R^{v_1,\ldots,v_n}_{x_1,\ldots,x_n}\Psi)_{\boldsymbol{A}}(\delta)\downarrow$, звідси $\Psi_{\boldsymbol{A}}(\delta \nabla v_1 \mapsto \delta(x_1) \nabla\ldots\nabla v_n \mapsto \delta(x_n))\downarrow$. Якщо $\delta \in {}^X F_d$, то $\delta \nabla v_1 \mapsto \delta(x_1) \nabla\ldots\nabla v_n \mapsto (x_n) \in {}^X F_d$. Тепер за припущенням індукції $\Psi_{\boldsymbol{B}}(\delta \nabla v_1 \mapsto \delta(x_1) \nabla\ldots\nabla v_n \mapsto \delta(x_n))\downarrow = \Psi_{\boldsymbol{A}}(\delta \nabla v_1 \mapsto \delta(x_1) \nabla\ldots\nabla v_n \mapsto \delta(x_n))$, тому $(R^{v_1,\ldots,v_n}_{x_1,\ldots,x_n}\Psi)_{\boldsymbol{B}}(\delta)\downarrow = (R^{v_1,\ldots,v_n}_{x_1,\ldots,x_n}\Psi)_{\boldsymbol{A}}(\delta)$. Отже $\Phi_{\boldsymbol{B}}(\delta)\downarrow = \Phi_{\boldsymbol{A}}(\delta)$.

Нехай $\Phi$ має вигляд $\exists x\Psi$. Тоді $\Phi_{\boldsymbol{A}}(\delta)\downarrow$ означає $(\exists x\Psi)_{\boldsymbol{A}}(\delta)\downarrow$. Можливі два випадки: 1) $\Psi_{\boldsymbol{A}}(\delta \nabla x \mapsto a) = T$ для деякого $a \in A$; 2) $\Psi_{\boldsymbol{A}}(\delta \nabla x \mapsto c) = F$ для всіх $c \in A$. Якщо $\delta \in {}^X F_d$, то для всіх $b \in A$ $\delta \nabla x \mapsto b \in {}^X F_d$.

У випадку 1) за припущенням індукції $\Psi_{\boldsymbol{B}}(\delta \nabla x \mapsto a)\downarrow = \Psi_{\boldsymbol{A}}(\delta \nabla x \mapsto a) = T$ для деякого $a \in A$, звідки $(\exists x\Psi)_{\boldsymbol{B}}(\delta)\downarrow = (\exists x\Psi)_{\boldsymbol{A}}(\delta)$. У випадку 2) за припущенням індукції для всіх $c \in A$ маємо $\Psi_{\boldsymbol{B}}(\delta \nabla x \mapsto c)\downarrow = \Psi_{\boldsymbol{A}}(\delta \nabla x \mapsto c) = F$, звідси $(\exists x\Psi)_{\boldsymbol{B}}(\delta)\downarrow = (\exists x\Psi)_{\boldsymbol{A}}(\delta)$. Отже $\Phi_{\boldsymbol{B}}(\delta)\downarrow = \Phi_{\boldsymbol{A}}(\delta)$.

**Наслідок.** Нехай $AC$ одної сигнатури $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I_A})$ і $\boldsymbol{B} = (A, \boldsymbol{I_B})$ та формула $\Phi$ такі, що для всіх $p \in \sigma(\Phi)$ для всіх $\delta \in {}^V A$ із умови $p_{\boldsymbol{A}}(\delta)\downarrow$ випливає $p_{\boldsymbol{B}}(\delta)\downarrow = p_{\boldsymbol{A}}(\delta)$. Тоді для довільного $\delta \in {}^V A$ із умови $\Phi_{\boldsymbol{A}}(\delta)\downarrow$ випливає $\Phi_{\boldsymbol{B}}(\delta)\downarrow = \Phi_{\boldsymbol{A}}(\delta)$.

**Теорема 8.** Нехай $\Phi$ — формула, $y \in V$ тотально неістотне та $y \notin nm(\Phi)$, $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I_A})$ — $AC$. Тоді існує $AC$ $\boldsymbol{B} = (A, \boldsymbol{I_B})$ така, що з умови $\Phi_{\boldsymbol{A}}(d)\downarrow$ випливає $\Phi_{\boldsymbol{B}}(d\|\text{-}y)\downarrow = \Phi_{\boldsymbol{B}}(d)\downarrow = \Phi_{\boldsymbol{A}}(d)$.

Для кожного $p \in \sigma(\Phi)$ визначимо $p_{\boldsymbol{B}}$ наступним чином. Для кожного $\delta \in {}^V A\|\text{-}y$ при умові $p_{\boldsymbol{A}}(\delta)\downarrow$ покладемо

$p_B(\delta) = p_A(\delta)$ та $p_B(\delta \nabla y \mapsto a) = p_A(\delta)$ для всіх $a \in A$. Якщо $p_A(\delta)\uparrow$ та $p_A(\delta \nabla y \mapsto a)\uparrow$ для всіх $a \in A$, то покладемо $p_B(\delta)\uparrow$ та $p_B(\delta \nabla y \mapsto a)\uparrow$ для всіх $a \in A$. Якщо $p_A(\delta)\uparrow$ та $p_A(\delta \nabla y \mapsto b)\downarrow$ для деякого $b \in A$, то покладемо $p_B(\delta) = p_A(\delta)$ та $p_B(\delta \nabla y \mapsto a) = p_A(\delta \nabla x \mapsto b)$ для всіх $a \in A$. Коректність такого визначення випливає із умов локально-еквітонності $p_A$ та $p_B$ і тотальної неістотності імені $y$.

Далі доводимо індукцією за побудовою формули $\Phi$.

**Наслідок.** Нехай $\Sigma$ — множина формул, $y$ тотально неістотне та $y \notin nm(\Sigma)$, $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I_A})$ — $AC$. Тоді існує $AC$ $\boldsymbol{B} = (A, \boldsymbol{I_B})$ така, що для довільної $\Phi \in \Sigma$ з умови $\Phi_A(d)\downarrow$ випливає $\Phi_B(d \| \text{-}y)\downarrow = \Phi_B(d)\downarrow = \Phi_A(d)$.

Справді, достатньо для кожного $p \in \sigma(\Sigma)$ визначити $p_B$ так, як описано в теоремі.

**Теорема 9.** Нехай $\Sigma$ — множина формул, $\Psi \sim \Phi$. Нехай $AC$ $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I_A})$ та $d \in {}^V\!A$ такі, що для всіх $\Xi \in \Sigma$ $\Xi_A(d)\downarrow$, $\Psi_A(d)\downarrow$ та $\Phi_A(d)\uparrow$. Тоді існують $AC$ $\boldsymbol{B} = (A, \boldsymbol{I_B})$ та $\delta \in A^V$ такі, що для всіх $\Xi \in \Sigma$ $\Xi_B(\delta)\downarrow = \Xi_A(d)$, $\Psi_B(\delta)\downarrow = \Psi_A(d)$ та $\Phi_B(\delta)\downarrow = \Psi_B(\delta)$.

Нехай $E_d = \bigcup_{\alpha \in F_d} \{\delta \supseteq \alpha \text{ та } \delta \in A^V\}$ — множина всіх $V$-повних розширень ІМ із $F_d$. Для кожного $p \in \sigma(\Sigma \cup \{\Phi, \Psi\})$ та кожної $\delta \in E_d$ визначимо $p_B(\delta)$ таким чином.

1. Нехай існує $\alpha \in F_d$ таке, що $\alpha \subseteq \delta$ та $p_A(\delta)\downarrow$. Тоді покладемо $p_B(\delta) = p_A(\alpha)$. Таке визначення коректне: неможливе існування $\beta \subseteq \delta$ та $\eta \subseteq \delta$ таких, що $\beta \in F_d$, $\eta \in F_d$ та $p_A(\beta) \neq p_A(\eta)$. Справді, якщо $\beta \in F_d$ та $\eta \in F_d$, то $\beta \backslash \eta$ та $\eta \backslash \beta$ скінченні, тому, за твердженням 1, існує ІМ $\varphi \subseteq \delta$ така, що $\beta \subseteq \varphi$, $\eta \subseteq \varphi$ та $\varphi \backslash \beta$ і $\varphi \backslash \eta$ скінченні. За локально-еквітонністю $p_A(\varphi)\downarrow = p_A(\beta)$ та $p_A(\varphi)\downarrow = p_A(\eta)$, що неможливо в силу $p_A(\beta) \neq p_A(\eta)$.

2. Нехай для кожного $\alpha \in F_d$ такого, що $\alpha \subseteq \delta$, маємо $p_A(\delta)\uparrow$. Тоді значення $p_B(\delta)$ визначаємо довільним чином. Оскільки неможливо одночасно 1 та 2, то для випадку 2 неможливо одночасно визначити $p_B(\delta)$ як $p_A(\alpha)$ для деякого $\alpha \in F_d$ такого, що $\alpha \subseteq \delta$.

Візьмемо довільне $\alpha \in F_d$. Нехай $p_A(\delta)\downarrow$. Згідно 1 для кожного $\delta \in E_d$ такого, що $\alpha \subseteq \delta$, маємо $p_B(\delta) = p_A(\alpha)\downarrow$.

При обчисленні $\Theta_B$ для довільної $\Theta \in \Sigma \cup \{\Phi, \Psi\}$ на $d \in {}^V\!A$ обчислюються тільки $p_B(\beta)$ для $p \in \sigma(\Theta)$ на певних $\beta \in F_d$. Згідно теореми 7, звідси при $\delta \supseteq d$ для всіх $\Xi \in \Sigma$ маємо $\Xi_B(\delta)\downarrow = \Xi_A(d)$ та $\Psi_B(\delta)\downarrow = \Psi_A(d)$. Але $p_B(\varphi)\downarrow$ для кожних $p \in \sigma(\Phi)$ та $\varphi \in E_d$, тому $\Phi_B(\delta)\downarrow$. В силу $\Psi \sim \Phi$ маємо $\Phi_B(\delta) = \Psi_B(\delta)$.

### *2. Відношення логічного наслідку для множин формул*

Нехай $\Gamma$ та $\Delta$ — множини формул певної мови сигнатури $Ps$; $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I})$ — АС $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I})$ сигнатури $Ps$.

Скажемо, що *в* АС $\boldsymbol{A}$ із $\Gamma$ випливає $\Delta$, або $\Delta$ є логічним наслідком $\Gamma$ в АС $\boldsymbol{A}$, якщо для всіх $d \in {}^V\!A$ з того, що $\Phi_A(d) = T$ для всіх $\Phi \in \Gamma$, випливає наступне: неможливо $\Psi_A(d) = F$ для всіх $\Psi \in \Delta$. Те, що $\Delta$ є логічним наслідком $\Gamma$ в АС $\boldsymbol{A}$, позначаємо $\Gamma \models_A \Delta$.

Скажемо, що із $\Gamma$ випливає $\Delta$, або $\Delta$ є логічним наслідком $\Gamma$, якщо $\Gamma \models_A \Delta$ для всіх АС $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I})$ сигнатури $Ps$. Те, що $\Delta$ є логічним наслідком $\Gamma$, позначаємо $\Gamma \models \Delta$.

Отже, $\Gamma \not\models \Delta \Leftrightarrow$ існують АС $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I})$ та $d \in {}^V\!A$ такі, що для всіх $\Phi \in \Gamma$ маємо $\Phi_A(d) = T$ та для всіх $\Psi \in \Delta$ маємо $\Psi_A(d) = F$.

Для спрощення запису замість $\{\Phi\} \cup \Gamma$ будемо звичайно писати $\Phi, \Gamma$ або $\Gamma, \Phi$.

Зауважимо, що відношення логічного наслідку для множин формул рефлексивне, але нетранзитивне. Справді, очевидно $\Delta \models \Delta$, але з $\Gamma \models \Delta$ та $\Delta \models \Sigma$ не мусить випливати $\Gamma \models \Sigma$. Останнє засвідчує такий приклад. Маємо $\{x=0 \vee x=1 \vee x=2\} |= \{x=0 \vee x=1, x=1 \vee \vee x=2\}$ та $\{x=0 \vee x=1, x=1 \vee x=2\} |= \{x=1\}$, але $\{x=0 \vee x=1 \vee x=2\} |\neq \{x=1\}$.

Розглянемо властивості логічного наслідку для множин формул на пропозиційному рівні. Вказані властивості цілком аналогічні відповідним властивостям відношення $|=$ класичної логіки предикатів [11]. Для їх доведення використовуються визначення пропозиційних композицій [2] та наведене вище визначення відношення $|=$.

G1) Якщо $\Gamma \cap \Delta \neq \varnothing$, то $\Gamma |= \Delta$ .

G2) Нехай $\Gamma |= \Delta$ та $\Delta \subseteq \Sigma$. Тоді $\Gamma |= \Sigma$.

$\neg_{|-}$) $\neg\Phi, \Gamma |= \Delta \Leftrightarrow \Gamma |= \Delta, \Phi$.

$\neg_{-|}$) $\Gamma |= \Delta, \neg\Phi \Leftrightarrow \Phi, \Gamma |= \Delta$.

$\vee_{|-}$) $\Phi \vee \Psi, \Gamma |= \Delta \Leftrightarrow \Phi, \Gamma |= \Delta$ та $\Psi, \Gamma |= \Delta$.

$\vee_{-|}$) $\Gamma |= \Delta, \Phi \vee \Psi \Leftrightarrow \Gamma |= \Delta, \Phi, \Psi$.

$\&_{|-}$) $\Phi \& \Psi, \Gamma |= \Delta \Leftrightarrow \Phi, \Psi, \Gamma |= \Delta$.

$\&_{-|}$) $\Gamma |= \Delta, \Phi \& \Psi \Leftrightarrow \Gamma |= \Delta, \Phi$ та $\Gamma |= \Delta, \Psi$.

$\to_{|-}$) $\Phi \to \Psi, \Gamma |= \Delta \Leftrightarrow \Gamma |= \Delta, \Phi$ та $\Psi, \Gamma |= \Delta$.

$\to_{-|}$) $\Gamma |= \Delta, \Phi \to \Psi \Leftrightarrow \Phi, \Gamma |= \Delta, \Psi$.

$\leftrightarrow_{|-}$) $\Phi \leftrightarrow \Psi, \Gamma |= \Delta \Leftrightarrow \Phi, \Psi, \Gamma |= \Delta$ та $\Gamma |= \Delta, \Phi, \Psi$.

$\leftrightarrow_{-|}$) $\Gamma |= \Delta, \Phi \leftrightarrow \Psi \Leftrightarrow \Phi, \Gamma |= \Delta, \Psi$ та $\Psi, \Gamma |= \Delta, \Phi$.

**Теорема 10.** Нехай $\Phi \sim \Psi$. Тоді $\Phi, \Gamma |= \Delta \Leftrightarrow \Psi, \Gamma |= \Delta$ та $\Gamma |= \Delta, \Phi \Leftrightarrow \Gamma |= \Delta, \Psi$.

Доведемо $\Phi, \Gamma |= \Delta \Leftrightarrow \Psi, \Gamma |= \Delta$. Аналогічно доводиться $\Gamma |= \Delta, \Phi \Leftrightarrow \Leftrightarrow \Gamma |= \Delta, \Psi$.

Припустимо супротивне: $\Phi, \Gamma |= \Delta$ та $\Psi, \Gamma |\neq \Delta$. Останнє означає, що існують АС $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I})$ та $d \in {}^V A$ такі: $\Psi_A(d) = T$ і $\Xi_A(d) = T$ для всіх $\Xi \in \Gamma$, та $\Theta_A(d) = F$ для всіх $\Theta \in \Delta$ (1)

Якщо $\Phi_A(d)\downarrow$, то в силу $\Phi \sim \Psi$ маємо $\Phi_A(d) = \Psi_A(d) = T$, звідки $\Phi_A(d) = T$ і $\Xi_A(d) = T$ для всіх $\Xi \in \Gamma$ та $\Theta_A(d) = F$ для всіх $\Theta \in \Delta$. Це суперечить $\Phi, \Gamma |= \Delta$. Отже, необхідно $\Phi_A(d)\uparrow$. В силу теореми 9 існують АС $\boldsymbol{B} = (A, \boldsymbol{I_B})$ та $\delta \in A^V$ такі, що для всіх $\Xi \in \Gamma$ $\Xi_B(\delta)\downarrow = \Xi_A(d) = T$, для всіх $\Theta \in \Delta$ $\Theta_B(\delta)\downarrow = \Theta_A(d) = F$, $\Psi_B(\delta)\downarrow = \Psi_A(d) = T$, $\Phi_B(\delta)\downarrow = \Psi_B(\delta) = T$. Але тоді $\Phi, \Gamma |\neq \Delta$.

Вкажемо властивості відношення $|=$ на реномінативному та кванторному рівнях. Вони безпосередньо відтворюють відповідні властивості формул, пов'язані з композицією реномінації. Згідно теореми 10, кожна така властивість розщеплюється на дві відповідні властивості для $|=$, коли еквівалентні формули знаходяться зліва від $|=$ та справа від $|=$.

RT$_{|-}$) $R^{z,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(\Phi), \Gamma |= \Delta \Leftrightarrow R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi), \Gamma |= \Delta$.

RT$_{-|}$) $\Gamma |= \Delta, R^{z,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(\Phi) \Leftrightarrow \Gamma |= \Delta, R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)$.

RR$_{|-}$) $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(R^{\bar{w}}_{\bar{y}}(\Phi)), \Gamma |= \Delta \Leftrightarrow R^{\bar{v}}_{\bar{x}} \circ {}^{\bar{w}}_{\bar{y}}(\Phi), \Gamma |= \Delta$.

RR$_{-|}$) $\Gamma |= \Delta, R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(R^{\bar{w}}_{\bar{y}}(\Phi)) \Leftrightarrow \Gamma |= \Delta, R^{\bar{v}}_{\bar{x}} \circ {}^{\bar{w}}_{\bar{y}}(\Phi)$.

R$\neg_{|-}$) $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\neg\Phi), \Gamma |= \Delta \Leftrightarrow \neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi), \Gamma |= \Delta$.

R$\neg_{-|}$) $\Gamma |= \Delta, R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\neg\Phi) \Leftrightarrow \Gamma |= \Delta, \neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)$.

R$\vee_{|-}$) $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi \vee \Psi), \Gamma |= \Delta \Leftrightarrow R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi) \vee R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Psi), \Gamma |= \Delta$.

R$\vee_{-|}$) $\Gamma |= \Delta, R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi \vee \Psi) \Leftrightarrow \Gamma |= \Delta, R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi) \vee \vee R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Psi)$.

PsN$_{|-}$) $R^{y,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(p), \Gamma |= \Delta \Leftrightarrow R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(p), \Gamma |= \Delta$.

PsN$_{-|}$) $\Gamma |= \Delta, R^{y,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(p) \Leftrightarrow \Gamma |= \Delta, R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(p)$.

$\Phi$N$_{|-}$) $R^{y,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(\Phi), \Gamma |= \Delta \Leftrightarrow R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi), \Gamma |= \Delta$.

$\Phi$N$_{-|}$) $\Gamma |= \Delta, R^{y,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(\Phi) \Leftrightarrow \Gamma |= \Delta, R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)$.

R$\exists_{|-}$) $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\exists y\Phi), \Gamma |= \Delta \Leftrightarrow \exists y R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi), \Gamma |= \Delta$.

R$\exists_{-|}$) $\Gamma |= \Delta, R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\exists y\Phi) \Leftrightarrow \Gamma |= \Delta, \exists y R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)$.

$\exists\exists$R$_{|-}$) $\exists x\Phi, \Gamma |= \Delta \Leftrightarrow \exists y R^{x}_{y}(\Phi), \Gamma |= \Delta$.

$\exists\exists$R$_{-|}$) $\Gamma |= \Delta, \exists x\Phi \Leftrightarrow \Gamma |= \Delta, \exists y R^{x}_{y}(\Phi)$.

Для PsN$_{|-}$ та PsN$_{-|}$ умова $y \in \mu(p)$, де $p \in Ps$. Для $\Phi$N$_{|-}$ та $\Phi$N$_{-|}$ умова $y \in \mu(\Phi)$. Для R$\exists_{|-}$ та R$\exists_{-|}$ умова $y \notin \{\bar{v}, \bar{x}\}$. Для $\exists\exists$R$_{|-}$ та $\exists\exists$R$_{-|}$ умова $y \in \mu(\Phi)$, яку можна ослабити до умови $|= \Phi \to \forall y\Phi$.

Властивості R$\exists_{|-}$, R$\exists_{-|}$, $\exists\exists$R$_{|-}$, $\exists\exists$R$_{-|}$ нескладно переформулювати для $\forall x$.

Якщо формула $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi)$ різнокванторна, то вже за визначенням $y\notin\{\bar{v}, \bar{x}\}$. Тому для різнокванторних та нормальних формул $R\exists_{|-}$ і $R\exists_{-|}$ формулюються без обмежень.

Для довільної множини формул $\Sigma$ позначимо $\Sigma_{\mathbf{P}}$ множину субнормалізант всіх формул множини $\Sigma$ та позначимо $\Sigma_{\mathbf{H}}$ множину нормалізант всіх формул множини $\Sigma$. Враховуючи теореми 5, 6 та 10, отримуємо такий результат:

**Теорема 11.** $\Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \Gamma_{\mathbf{P}} \models \Delta_{\mathbf{P}}$ та $\Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \Gamma_{\mathbf{H}} \models \Delta_{\mathbf{H}}$.

В подальшому викладі $\Gamma$, $\Delta$ — множини формул, $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I})$ — АС такої ж сигнатури.

**Теорема 12.** $\Gamma \models_{\boldsymbol{A}} \Delta, R_{y_1}^{x}(\Phi), \ldots, R_{y_n}^{x}(\Phi), \exists x\Phi \Leftrightarrow \Gamma \models_{\boldsymbol{A}} \Delta, \exists x\Phi$.

**Теорема 13.** З умови $\exists x\Phi, \Gamma \models_{\boldsymbol{A}} \Delta$ випливає $R_{y}^{x}(\Phi), \Gamma \models_{\boldsymbol{A}} \Delta$.

**Теорема 14.** Нехай $y$ тотально неістотне та $y\notin nm(\Gamma, \Delta, \Phi)$. Тоді з $R_{y}^{x}(\Phi)$, $\Gamma \models \Delta$ випливає $\exists x\Phi, \Gamma \models \Delta$.

Доведення відповідних тверджень для випадку неокласичних логік наведені в [7]. При доведенні по суті використовується тільки умова локальної еквітонності, тому зазначені доведення переносяться на випадок ЛЕ-логік.

На основі теорем 12—14 отримуємо наступні властивості відношення $\models$:

$\exists_{-|}$) $\Gamma \models \Delta, R_{y_1}^{x}(\Phi), \ldots, R_{y_n}^{x}(\Phi), \exists x\Phi \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \exists x\Phi$.

$\exists_{|-}$) $\exists x\Phi, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow R_{y}^{x}(\Phi), \Gamma \models \Delta$ (тут $y$ тотально неістотне та $y\notin nm(\Gamma, \Delta, \Phi)$.

Властивості $\neg_{|-}$, $\neg_{-|}$, $\vee_{|-}$, $\vee_{-|}$, $RT_{|-}$, $RT_{-|}$, $RR_{|-}$, $RR_{-|}$, $R\neg_{|-}$, $R\neg_{-|}$, $R\vee_{|-}$, $R\vee_{-|}$, $PsN_{|-}$, $PsN_{-|}$ назвемо базовими властивостями відношення $\models$ на реномінативному рівні. Додавши $R\exists_{|-}$, $R\exists_{-|}$, $\exists_{-|}$, $\exists_{|-}$, отримуємо базові властивості відношення $\models$ на кванторному рівні.

Базові властивості відношення $\models$ дозволяють звести логічний наслідок складної формули (разом з множиною інших формул) до логічних наслідків простіших формул, що утворюють складнішу. Тому питання про відношення логічного наслідку між двома множинами формул, в одну з яких входить складна формула, зводиться до питання про відношення логічного наслідку між двома множинами формул, в які вже входять компоненти складної формули (з точністю до перейменування предметних імен).

### *3. Секвенційні числення ЛЕ-логік*

Формально-аксіоматичні системи, які формалізують відношення логічного наслідку між двома множинами формул ЛЕ-логік реномінативного та кванторного рівнів, назвемо *реномінативними* та *кванторними* секвенційними ЛЕ-численнями.

В класичному, генценівському варіанті [9], *секвенціями* називають об'єкти вигляду $\Gamma \rightarrow \Delta$, де $\Gamma$ та $\Delta$ — множини формул, $\rightarrow$ — новий символ, що не входить до алфавіту мови логіки. Секвенційне числення будується так, що секвенція $\Gamma \rightarrow \Delta$ вивідна $\Leftrightarrow$ $\Gamma \models \Delta$. Тому базовим властивостям відношення $\models$ співставимо їх синтаксичні аналоги — *секвенційні форми*. Секвенційні форми є правилами виведення секвенційних числень.

Секвенції $\Gamma \rightarrow \Delta$ такі, що $\Gamma \cap \Delta \neq \varnothing$, називають *замкненими*. Але з умови $\Gamma \cap \Delta \neq \varnothing$ випливає $\Gamma \models \Delta$. Тому якщо секвенція $\Gamma \rightarrow \Delta$ замкнена, то $\Gamma \models \Delta$. Замкнені секвенції грають роль аксіом секвенційних числень.

Секвенційні форми традиційно записують у вигляді $\dfrac{\Sigma}{\Omega}$ або $\dfrac{\Sigma \quad \Lambda}{\Omega}$. Тут $\Sigma$, $\Lambda$, $\Omega$ — секвенції. Секвенції над рискою — засновки, під рискою — висновки. В нашому випадку засновки — це секвенції, співставлені лівим частинам відповідних семантичних властивостей, висновки — це секвенції, співставлені їх правим частинам. Можна вважати, що секвенційні форми застосовуються незалежно від порядку входження формул.

Форма запису секвенцій з використанням символу $\to$ традиційна [9], вона відповідає записам логічного наслідку для множин формул. Проте для нас зручнішою є модифікована форма запису секвенцій, подібна до форми запису семантичних таблиць Бета [11, 12].

Кожну формулу секвенції відмітимо (специфікуємо) зліва одним з двох символів: $|\!-$ чи $-\!|$. Якщо формула знаходиться зліва від $\to$, відмічаємо її символом $|\!-$, якщо справа — символом $-\!|$. Тепер кожна формула секвенції набуває вигляду $|\!-\Phi$ або $-\!|\Phi$, причому відмітка однозначно вказує на місце формули в секвенції — зліва чи справа від $\to$. Тому в записі секвенції символ $\to$ можна опустити.

Секвенцію, утворену з секвенції $\Gamma\to\Delta$ описаною вище відміткою формул, позначимо $|\!-\Gamma\,-\!|\,\Delta$. Не деталізуючи, секвенції відмічених формул будемо також позначати $\Sigma$ .

Секвенція $\Sigma$ замкнена, якщо існує формула $\Phi$ така, що $|\!-\Phi\in\Sigma$ та $-\!|\Phi\in\Sigma$.

Відповідно до базових властивостей відношення $|=$ вводимо такі базові секвенційні форми реномінативного рівня (зліва записуємо назву форми):

$$|\!-\neg\ \frac{-\!|\,A,\Sigma}{|\!-\neg A,\Sigma} \qquad -\!|\neg\ \frac{|\!-A,\Sigma}{-\!|\neg A,\Sigma}$$

$$|\!-\vee\ \frac{|\!-A,\Sigma \qquad |\!-B,\Sigma}{|\!-A\vee B,\Sigma} \qquad -\!|\vee\ \frac{-\!|A,-\!|B,\Sigma}{-\!|A\vee B,\Sigma}$$

$$|\!-\mathbf{RT}\ \frac{|\!-R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A),\Sigma}{|\!-R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(A),\Sigma} \qquad -\!|\mathbf{RT}\ \frac{-\!|R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A),\Sigma}{-\!|R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(A),\Sigma}$$

$$|\!-\mathbf{RR}\ \frac{|\!-R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\circ_{\bar{y}}^{\bar{w}}(A),\Sigma}{|\!-R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(A)),\Sigma} \qquad -\!|\mathbf{RR}\ \frac{-\!|R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\circ_{\bar{y}}^{\bar{w}}(A),\Sigma}{-\!|R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(A)),\Sigma}$$

$$|\!-\mathbf{R}\neg\ \frac{|\!-\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A),\Sigma}{|\!-R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg A),\Sigma} \qquad -\!|\mathbf{R}\neg\ \frac{-\!|\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A),\Sigma}{-\!|R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg A),\Sigma}$$

$$|\!-\mathbf{R}\vee\ \frac{|\!-R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A)\vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(B),\Sigma}{|\!-R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A\vee B),\Sigma} \qquad -\!|\mathbf{R}\vee\ \frac{-\!|R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A)\vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(B),\Sigma}{-\!|R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A\vee B),\Sigma}$$

$$|\!-\mathbf{PsN}\ \frac{|\!-R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(p),\Sigma}{|\!-R_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(p),\Sigma}\ \text{при } y\in\mu(p) \qquad -\!|\mathbf{PsN}\ \frac{-\!|R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(p),\Sigma}{-\!|R_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(p),\Sigma}\ \text{при } y\in\mu(p)$$

На кванторному рівні додаємо такі базові секвенційні форми:

$$|\!-\mathbf{R}\exists\ \frac{|\!-\exists yR_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A),\Sigma}{|\!-R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists yA),\Sigma}\ \text{при } y\notin\{\bar{v},\bar{x}\} \qquad -\!|\mathbf{R}\exists\ \frac{-\!|\exists yR_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A),\Sigma}{-\!|R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists yA),\Sigma}\ \text{при } y\notin\{\bar{v},\bar{x}\}$$

$$|\!-\exists\ \frac{|\!-R_y^x(A),\Sigma}{|\!-\exists xA,\Sigma}\ \text{при умові } y \text{ тотально неістотне та } y\notin nm(\Sigma, A)$$

$$-\!|\exists\ \frac{-\!|R_{z_1}^x(A),\ldots,-\!|R_{z_m}^x(A),\Sigma,-\!|\exists xA}{-\!|\exists xA,\Sigma},\ \text{де } \{z_1,\ldots,z_m\}= nq(\Sigma,\exists xA)$$

Для різнокванторних формул властивості $R\exists_{|-}$ та $R\exists_{-|}$ формулюються без обмежень, тому в секвенційних формах $|\!-\mathbf{R}\exists$ та $-\!|\mathbf{R}\exists$ виконання умови $y\notin\{\bar{v},\bar{x}\}$ гарантоване.

Враховуючи семантичні властивості $\neg_{|-}$, $\neg_{-|}$, $\vee_{|-}$, $\vee_{-|}$, $RT_{|-}$, $RT_{-|}$, $RR_{|-}$, $RR_{-|}$, $R\neg_{|-}$, $R\neg_{-|}$, $R\vee_{|-}$, $R\vee_{-|}$, $PsN_{|-}$, $PsN_{-|}$, $R\exists_{|-}$, $R\exists_{-|}$, $\exists_{-|}$, $\exists_{|-}$ отримуємо наступний результат:

**Теорема 15.** Нехай $\dfrac{\Sigma}{\Omega}$ та $\dfrac{\Sigma\ \ \Upsilon}{\Omega}$ — секвенційні форми, $\Sigma$ = $|\!-\Lambda\,-\!|\,\mathrm{K}$, $\Upsilon$ = $|\!-\mathrm{X}\,-\!|\,\mathrm{Z}$ та $\Omega$ = $|\!-\Gamma\,-\!|\,\Delta$. Тоді 1) якщо

$\Lambda \models K$, то $\Gamma \models \Delta$; 2) якщо $\Lambda \models K$ та $X \models Z$, то $\Gamma \models \Delta$.

Секвенційні числення ЛЕ-логік з наведеними вище базовими секвенційними формами реномінативного/кванторного рівня назвемо реномінативними/кванторними ЛЕ-численнями.

Поняття виведення для секвенційних ЛЕ-числень введемо традиційним чином, аналогічно класичним секвенційним численням [9, 11, 12]. Виведення в секвенційних численнях має вигляд дерева, вершинами якого є секвенції. Такі дерева називають секвенційними. Наведемо індуктивне визначення секвенційного дерева.

1. Секвенція $\Sigma$ утворює тривіальне секвенційне дерево з єдиною вершиною $\Sigma$, яка є коренем дерева.

2. Нехай $\alpha$ — секвенційне дерево з коренем $\Sigma$; $\beta$ — секвенційне дерево з коренем $Y$; $\frac{\Sigma}{\Omega}$ та $\frac{\Sigma \quad Y}{\Omega}$ — секвенційні форми. Тоді $\begin{array}{c}\alpha\\ |\\ \Omega\end{array}$ та $\begin{array}{c}\alpha \ \ \beta\\ \backslash\,/\\ \Omega\end{array}$ — секвенційні дерева з коренем $\Omega$.

Секвенційне дерево з коренем $\Sigma$ називають секвенційним деревом секвенції $\Sigma$.

Тривіальне секвенційне дерево *замкнене*, якщо це замкнена секвенція. Нетривіальне секвенційне дерево *замкнене*, якщо кожний його лист (кінцева вершина, відмінна від кореня) — замкнена секвенція. Секвенція $\Sigma$ *вивідна* (*має виведення*), якщо існує замкнене секвенційне дерево з коренем $\Sigma$. Таке дерево назвемо *виведенням* секвенції $\Sigma$.

Сформулюємо теорему коректності для ЛЕ-числень. Теорема доводиться індукцією за побудовою замкненого секвенційного дерева для секвенції $\vdash\Gamma\dashv\Delta$.

**Теорема 16.** Нехай секвенція $\vdash\Gamma\dashv\Delta$ вивідна. Тоді $\Gamma \models \Delta$.

Для доведення повноти секвенційних ЛЕ-числень природно використати метод модельних (хінтікківських) множин. Доведення теореми повноти з використанням модельних множин для неокласичних секвенційних числень реномінативного та кванторного рівнів наведені в [7, 8]. Враховуючи розглянуті вище семантичні властивості та той факт, що з синтаксичної точки зору мови ЛЕ-логіки та НКЛ не відрізняються, такі доведення переносяться на випадок реномінативних та кванторних ЛЕ-числень.

Множину $\boldsymbol{H}$ відмічених формул кванторної неокласичної логіки із $W = nq(\boldsymbol{H})$ назвемо *модельною*, якщо виконуються наступні умови:

1) для кожної примітивної $\Phi$ лише одна з формул $\vdash\Phi$ чи $\dashv\Phi$ може належати до $\boldsymbol{H}$;

2) якщо $y\in\mu(p)$ та $\vdash R^{y,\bar{\boldsymbol{v}}}_{z,\bar{\boldsymbol{x}}}(p)\in\boldsymbol{H}$, то $\vdash R^{\bar{\boldsymbol{v}}}_{\bar{\boldsymbol{x}}}(p)\in\boldsymbol{H}$; якщо $\dashv R^{y,\bar{\boldsymbol{v}}}_{z,\bar{\boldsymbol{x}}}(p)\in\boldsymbol{H}$, то $\dashv R^{\bar{\boldsymbol{v}}}_{\bar{\boldsymbol{x}}}(p)\in\boldsymbol{H}$;

3) якщо $\vdash\neg\Phi\in\boldsymbol{H}$, то $\dashv\Phi\in\boldsymbol{H}$; якщо $\dashv\neg\Phi\in\boldsymbol{H}$, то $\vdash\Phi\in\boldsymbol{H}$;

4) якщо $\vdash\Phi\vee\Psi\in\boldsymbol{H}$, то $\vdash\Phi\in\boldsymbol{H}$ або $\vdash\Psi\in\boldsymbol{H}$; якщо $\dashv\Phi\vee\Psi\in\boldsymbol{H}$, то $\dashv\Phi\in\boldsymbol{H}$ та $\dashv\Psi\in\boldsymbol{H}$;

5) якщо $\vdash R^{z,\bar{\boldsymbol{v}}}_{z,\bar{\boldsymbol{x}}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$, то $\vdash R^{\bar{\boldsymbol{v}}}_{\bar{\boldsymbol{x}}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$; якщо $\dashv R^{z,\bar{\boldsymbol{v}}}_{z,\bar{\boldsymbol{x}}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$, то $\dashv R^{\bar{\boldsymbol{v}}}_{\bar{\boldsymbol{x}}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$;

6) якщо $\vdash R^{\bar{\boldsymbol{v}}}_{\bar{\boldsymbol{x}}}(R^{\bar{\boldsymbol{w}}}_{\bar{\boldsymbol{y}}}(\Phi))\in\boldsymbol{H}$, то $\vdash R^{\bar{\boldsymbol{v}}}_{\bar{\boldsymbol{x}}}\circ^{\bar{\boldsymbol{w}}}_{\bar{\boldsymbol{y}}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$; якщо $\dashv R^{\bar{\boldsymbol{v}}}_{\bar{\boldsymbol{x}}}(R^{\bar{\boldsymbol{w}}}_{\bar{\boldsymbol{y}}}(\Phi))\in\boldsymbol{H}$, то $\dashv R^{\bar{\boldsymbol{v}}}_{\bar{\boldsymbol{x}}}\circ^{\bar{\boldsymbol{w}}}_{\bar{\boldsymbol{y}}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$;

7) якщо $\vdash R^{\bar{\boldsymbol{v}}}_{\bar{\boldsymbol{x}}}(\neg\Phi)\in\boldsymbol{H}$, то $\vdash\neg R^{\bar{\boldsymbol{v}}}_{\bar{\boldsymbol{x}}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$; якщо $\dashv R^{\bar{\boldsymbol{v}}}_{\bar{\boldsymbol{x}}}(\neg\Phi)\in\boldsymbol{H}$, то $\dashv\neg R^{\bar{\boldsymbol{v}}}_{\bar{\boldsymbol{x}}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$;

8) якщо $\vdash R^{\bar{\boldsymbol{v}}}_{\bar{\boldsymbol{x}}}(\Phi\vee\Psi)\in\boldsymbol{H}$, то $\vdash R^{\bar{\boldsymbol{v}}}_{\bar{\boldsymbol{x}}}(\Phi)\vee R^{\bar{\boldsymbol{v}}}_{\bar{\boldsymbol{x}}}(\Psi)\in\boldsymbol{H}$; якщо $\dashv R^{\bar{\boldsymbol{v}}}_{\bar{\boldsymbol{x}}}(\Phi\vee\Psi)\in\boldsymbol{H}$, то $\dashv R^{\bar{\boldsymbol{v}}}_{\bar{\boldsymbol{x}}}(\Phi)\vee R^{\bar{\boldsymbol{v}}}_{\bar{\boldsymbol{x}}}(\Psi)\in\boldsymbol{H}$;

9) при $y\notin\{\bar{\boldsymbol{v}},\bar{\boldsymbol{x}}\}$ якщо $\vdash R^{\bar{\boldsymbol{v}}}_{\bar{\boldsymbol{x}}}(\exists y\Phi)\in\boldsymbol{H}$, то $\vdash\exists y R^{\bar{\boldsymbol{v}}}_{\bar{\boldsymbol{x}}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$; якщо $\dashv R^{\bar{\boldsymbol{v}}}_{\bar{\boldsymbol{x}}}(\exists y\Phi)\in\boldsymbol{H}$, то $\dashv\exists y R^{\bar{\boldsymbol{v}}}_{\bar{\boldsymbol{x}}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$;

10) якщо $\vdash\exists x\Phi\in\boldsymbol{H}$, то існує $y\in nq(\boldsymbol{H})$ таке, що $\vdash R^{x}_{y}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$; якщо $\dashv\exists x\Phi\in\boldsymbol{H}$, то для всіх $y\in nq(\boldsymbol{H})$ маємо $\dashv R^{x}_{y}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$.

Якщо формули множини $\boldsymbol{H}$ різнокванторні, то умова $y \notin \{\bar{\boldsymbol{v}}, \bar{\boldsymbol{x}}\}$ із п.9 виконується гарантовано, тому її можна не вказувати.

Для кожної формули ЛЕ-логіки можна збудувати (теорема 5) еквівалентну їй різнокванторну формулу. Доводиться [7], що застосування базових секвенційних форм зберігає умову різнокванторності. Згідно теореми 10, не обмежуючи загальності, будемо надалі вважати, що формули в секвенціях знаходяться в різнокванторній формі.

Процедура пошуку виведення для секвенції $\Sigma$ — це процедура побудови секвенційного дерева для $\Sigma$. Такі процедури для неокласичних секвенційних числень описані в [7, 8]. Розглянемо в загальних рисах процедуру побудови дерева для секвенції $\Sigma$ з різнокванторних формул, наведену в [8]. Вона придатна як для скінченних, так і для зліченно-нескінченних секвенцій ЛЕ-логіки. Кожне застосування секвенційної форми проводиться до скінченної множини *доступних* формул. На початку кожного етапу виконується *крок доступу*: до списку доступних формул додається по одній формулі з $\vdash$-списку та $\dashv$-списку. Якщо недоступних $\vdash$-формул чи $\dashv$-формул немає (відповідний список вичерпаний), то на подальших кроках доступу додаємо по одній формулі з невичерпаного списку. Зафіксуємо деякий нескінченний список *TN* тотально неістотних імен такий, що $TN \cap nm(\Sigma) = \varnothing$.

На початку побудови доступна лише пара перших формул списків (або єдина формула, якщо один із списків порожній). Нехай виконано $\boldsymbol{k}$ етапів процедури. На етапі $\boldsymbol{k}$+**1** перевіряємо, чи буде кожен з листів дерева замкненою секвенцією. Якщо всі листи замкнені, то процедура завершена позитивно, отримане замкнене секвенційне дерево. Якщо ні, то для кожного незамкненого листа $\xi$ робимо наступний крок доступу, після чого добудовуємо скінченне піддерево з вершиною $\xi$ так. Активізуємо всі доступні непримітивні формули $\xi$. По черзі до кожної активної формули застосовуємо відповідну секвенційну форму. Перед застосуванням однієї з форм $\vdash$**RR**, $\vdash$**R**$\neg$, $\vdash$**R**$\vee$, $\vdash$**R**$\exists$ чи $\dashv$**RR**, $\dashv$**R**$\neg$, $\dashv$**R**$\vee$, $\dashv$**R**$\exists$ усуваємо в разі наявності тотожні перейменування, застосовуючи допоміжні форми $\vdash$**RT** та $\dashv$**RT**. При застосуванні $\dashv\exists$ множина $\{z_1, \ldots, z_m\}$ складається з усіх некванторних імен доступних формул листа. При застосуванні $\vdash\exists$ беремо *y* як перше незадіяне на шляху від кореня до даного листа ім'я списку *TN*. Після застосування недопоміжної форми формула дезактивується.

При побудові секвенційного дерева можливі такі випадки:

1. Процедура завершена позитивно, маємо скінченне замкнене дерево.

2. Процедура завершена негативно, маємо скінченне незамкнене дерево. Тоді дерево має незамкнений лист, до якого жодна секвенційна форма незастосовна, він складається тільки з примітивних формул. Отже, в дереві існує скінченний шлях $\Sigma = \Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$, всі вершини якого — незамкнені секвенції. Такий шлях назвемо незамкненим.

3. Процедура не завершується, маємо нескінченне дерево. За лемою Кеніга [9], в дереві існує нескінченний шлях $\Sigma = \Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n, \ldots$, всі вершини якого — незамкнені секвенції (при появі замкненої секвенції побудова шляху обривається). Такий шлях теж назвемо незамкненим. Кожна з формул секвенції $\Sigma$ зустрінеться на цьому шляху і стане доступною.

**Теорема 17.** Нехай $\wp$ — незамкнений шлях в секвенційному дереві, $\boldsymbol{H}$ — множина всіх відмічених формул секвенцій цього шляху. Тоді $\boldsymbol{H}$ — модельна множина.

Для переходу від нижчої вершини шляху до вищої використовується одна з базових секвенційних форм, але переходи згідно таких форм точно відповідають визначенню модельної множини.

**Теорема 18.** Нехай $\boldsymbol{H}$ — модельна множина, $W = nq(\boldsymbol{H})$. Тоді існують $AC$ $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I})$ з $|A| = |W|$ та ін'єктивна $\delta \in {}^{V}A$ з $im(\delta) = W$ такі, що 1) з умови $\vdash \Phi \in \boldsymbol{H}$ випливає $\Phi_A(\delta) = T$; 2) з умови $\dashv \Phi \in \boldsymbol{H}$ випливає $\Phi_A(\delta) = F$.

Доведення теореми для випадку ЛЕ-числень аналогічне доведенню відповідної теореми для неокласичних числень [7]. Візьмемо деяку множину $A$ таку, що $|A| = |W|$, та ін'єктивну $\delta \in {}^{V}A$ з $im(\delta) = W$. Фактично $A$ продубльовує множину $W$ всіх предметних імен, що фігурують в $\boldsymbol{H}$. Задамо значення базових предикатів на $d \in {}^{W}A$, які продовжимо за еквітонністю на довільні $h \in {}^{V}A$ такі, що $d \subset h$. Якщо $\vdash p \in \boldsymbol{H}$, то покладемо $p_A(\delta) = T$ ; якщо $\dashv p \in \boldsymbol{H}$, то покладемо $p_A(\delta) = F$. Якщо $\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(p) \in \boldsymbol{H}$, то покладемо $p_A(\mathbf{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\delta)) = T$; якщо $\dashv R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(p) \in \boldsymbol{H}$, то покладемо $p_A(\mathbf{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\delta)) = F$. В усіх інших випадках $d \in {}^{W}A$ значення $p_A(d)$ задаємо довільним чином, враховуючи обмеження: для всіх $d$, $h \in {}^{W}A$ таких, що $d \| \mu(p) = h \| \mu(p)$, необхідно $p_A(d) = p_A(h)$. Тоді значення $p_A$ задані однозначно, враховано неістотність для $p_A$ імен $y \in \mu(p)$. Отже, значення базових предикатів визначені коректно. Далі доводимо індукцією за складністю формули згідно побудови модельної множини.

Використовуючи теорему 18, отримаємо теореми повноти для секвенційних ЛЕ-числень. Формулювання теорем повноти однакове для числень реномінативного та кванторного рівнів.

**Теорема 19.** Нехай $\Gamma \models \Delta$. Тоді секвенція $\vdash \Gamma \dashv \Delta$ вивідна.

Припустимо супротивне: $\Gamma \models \Delta$ та секвенція $\vdash \Gamma \dashv \Delta$ невивідна. Тоді секвенційне дерево для $\Sigma = \vdash \Gamma \dashv \Delta$ незамкнене. Отже, в ньому існує (скінченний чи нескінченний) незамкнений шлях $\wp$. Нехай $\boldsymbol{H}$ — це множина всіх відмічених формул секвенцій цього шляху. За теоремою 17, $\boldsymbol{H}$ — модельна множина. За теоремою 18, існують $AC$ $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I})$ та $\delta \in {}^{V}A$ такі: з $\vdash \Phi \in \boldsymbol{H}$ випливає $\Phi_A(\delta) = T$ та з $\dashv \Phi \in \boldsymbol{H}$ випливає $\Phi_A(\delta) = F$. Це, зокрема, вірно і для формул з $\Sigma = \vdash \Gamma \dashv \Delta$, бо $\Sigma \subseteq \boldsymbol{H}$. Але це суперечить умові $\Gamma \models \Delta$.

Для випадку ЛЕ-логік, як і для неокласичних логік, справджуються важливі властивості, що випливають з теореми повноти, зокрема принцип компактності. Доведення цих властивостей, проведені [8] для НКЛ, переносяться на випадок ЛЕ-логік.

**Висновки.** Досліджені семантичні та синтаксичні властивості ЛЕ-логік реномінативного та кванторного рівнів. Вивчаються семантичні властивості відношення логічного наслідку для множин формул таких логік, пропонуються та досліджуються аксіоматичні системи секвенційного типу — секвенційні ЛЕ-числення. На основі цих числень пропонуються теореми повноти ЛЕ-логік реномінативного та кванторного рівнів.


1. *Никитченко Н.С.* Композиционно-номинативный подход к уточнению понятия программы // Проблемы программирования. — 1999. — №1. — С. 16−31.
2. *Нікітченко М.С., Шкільняк С.С.* Композиційно-номінативні логіки еквітонних предикатів // Вісник Київського ун-ту. Сер.: фіз.-мат. науки. — 2000. — Вип. 2. — С. 300−314.
3. *Никитченко Н.С., Шкильняк С.С.* Неоклассические логики предикатов // Проблемы программирования. — 2000. — № 3−4. — С. 3−17.
4. *Шкільняк С.С.* Нормальні форми в неокласичній логіці // Там же. — 2001, № 3−4. — С. 14−22.
5. *Шкільняк С.С.* Безкванторні неокласичні логіки // Вісник Київського ун-ту. Сер.: фіз.-мат. науки. — 2001. — Вип. 4. — С. 323−331.
6. *Нікітченко М.С., Шкільняк С.С.* Семантичні аспекти постккласичних логік // Проблемы программирования. — 2001. — № 1−2. — С. 3−12.
7. *Нікітченко М.С., Шкільняк С.С.* Неокласичні логіки та секвенційні числення // Деп. в ДНТБ України 22.07.2002, № 114-Ук2002. — 46 с.
8. *Шкільняк С.С.* Неокласичні секвенційні числення // Вісник Київського ун-ту. Сер.: фіз.-мат. науки. — 2002. — Вип. 4. — С. 261−274.

9. *Клини С.* Математическая логика. — М.: Наука, 1973. — 480 с.
10. *Шенфилд Дж.* Математическая логика. — М.: Наука, 1975. — 527 с.
11. *Смирнова Е.Д.* Логика и философия. — М.: РОССПЕН, 1996. — 304 с.
12. *Непейвода Н.Н.* Прикладная логика. — Новосибирск: НГУ, 2000. — 521 с.

*Отримано 14.05.03*

## Про авторів

*Нікітченко Микола Степанович*
доктор фіз.-мат. наук, зав. кафедрою теорії програмування

*Шкільняк Степан Степанович*
канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри теорії програмування

*Місце роботи авторів:*
Київський національний університет ім. Тараса Шевченка

вул. Володимирська, 60,
Київ,
Україна

Тел. (044) 259 0519

E-mail: nikitchenko@unicyb.kiev.ua
sssh@unicyb.kiev.ua