

## Импеданс тонкой металлической пленки в режиме сильной магнитодинамической нелинейности

С. А. Деревянко, Г. Б. Ткачев, В. А. Ямпольский

*Институт радиофизики и электроники им. А. Я. Усикова НАН Украины,  
Украина, 61085, г. Харьков, ул. Акад. Проскуры, 12  
E-mail: stanislav@ire.kharkov.ua*

Статья поступила в редакцию 25 апреля 2000 г.

Теоретически исследован нелинейный отклик металлической пленки на собственное магнитное поле переменного транспортного тока. Нелинейность обусловлена магнитодинамическим механизмом, связанным с влиянием магнитного поля тока на динамику электронов проводимости и наиболее типичным для чистых металлов при низких температурах. Нелинейность приводит к зависимости поверхностного импеданса от амплитуды переменного тока. Показано, что вещественная часть поверхностного импеданса, отвечающая за джоулевы потери, как функция амплитуды характеризуется наличием плавного максимума. Мнимая часть поверхностного импеданса также является монотонной функцией амплитуды и имеет минимум.

Теоретично досліджено нелінійний відгук металевої плівки на власне магнітне поле змінного транспортного струму. Нелінійність зумовлена магнітодинамічним механізмом, який пов'язаний із впливом магнітного поля струму на динаміку електронів провідності і є найбільш типовим для чистих металів при низьких температурах. Нелінійність призводить до залежності поверхневого імпедансу від амплітуди змінного струму. Показано, що дійсна частина поверхневого імпедансу, що відповідає за джоулеві втрати, як функція амплітуди характеризується наявністю плавного максимуму. Уявна частина поверхневого імпедансу також є монотонною функцією амплітуди і має мінімум.

PACS: 72.15.-v, 72.15.Gd

### 1. Введение

Известно, что чистые металлы при низких температурах обладают рядом своеобразных нелинейных свойств. Нелинейность обусловлена воздействием магнитной компоненты волны или собственного магнитного поля транспортного тока на динамику носителей тока в металле и, следовательно, на проводимость образца. Такой механизм нелинейности получил название магнитодинамического. Явлениям, связанным с этим механизмом, посвящен ряд публикаций (см., например, обзоры [1,2] и цитированную в них литературу). Одним из примеров таких явлений может служить генерация так называемых токовых состояний — своеобразный гистерезисный эффект выпрямления радиочастотного тока и возбуждения собственного магнитного момента образца [3]. Эффекты магнитодинамической нели-

нейности ярко проявляются в тонких образцах, толщина которых  $d$  много меньше длины свободного пробега  $l$  носителей тока,  $d \ll l$ .

В работе [4] было показано, что магнитодинамический механизм вызывает увеличение статической проводимости металлической пленки, что приводит к отклонению вольт-амперной характеристики (ВАХ) от закона Ома в сторону уменьшения сопротивления. В работе [5] проанализировано взаимодействие постоянного транспортного тока, протекающего по металлической пленке, с внешней низкочастотной электромагнитной волной. Оказалось, что такое взаимодействие, возникающее вследствие магнитодинамической нелинейности, приводит к необычному неаналитическому поведению электрического поля на поверхности металла и к своеобразному эффекту усиления электромагнитного сигнала по сравнению с сигналом в отсутствие тока.

Целью данной работы является теоретический анализ ситуации, в которой по пленке протекает переменный низкочастотный транспортный ток  $I(t)$ . Как было показано в работе [4], основные особенности нелинейного отклика пленки при наличии сильного транспортного тока связаны с тем, что собственное магнитное поле тока распределено антисимметрично по толщине образца. В середине пленки оно равно нулю, а на границах принимает равные по величине и противоположные по знаку значения. Такое знакопеременное распределение магнитного поля порождает новый по характеру движения тип частиц — захваченные частицы, траектории которых выются вокруг плоскости перемены знака магнитного поля тока. Мы считаем, что величина тока такова, что характерный радиус кривизны  $R(I)$  электронных траекторий в собственном поле тока  $H(I)$  много больше толщины пленки:

$$d \ll R(I), \quad R(I) = cp_F/eH(I) \propto I^{-1} \quad (1)$$

( $-e$  и  $p_F$  — заряд и фермиевский импульс электрона,  $c$  — скорость света в вакууме). Тогда относительное число захваченных электронов, которое по порядку величины совпадает с углом  $(d/R)^{1/2}$  их подлета к этой плоскости, мало. Однако такие частицы не испытывают соударений с границами образца и взаимодействуют с переменным полем в металле на всей длине свободного пробега  $l$ . Согласно концепции неэффективности [1,6,7], их проводимость  $\sigma_{tr}$  может быть оценена следующим образом:

$$\sigma_{tr} \sim \sigma_0(d/R)^{1/2} \propto I^{1/2}, \quad (2)$$

где  $\sigma_0$  — проводимость массивного образца. В то же время в условиях диффузного отражения электронов от поверхности образца так называемые пролетные частицы, которые сталкиваются с границами пленки, имеют проводимость порядка  $\sigma_0(d/l)$ . Отсюда видно, что существует режим достаточно сильных токов, когда выполняется неравенство

$$[dR(I)]^{1/2} < l \quad (3)$$

и главный вклад в проводимость дает именно группа захваченных электронов. Это приводит к отклонению ВАХ от закона Ома и к корневой зависимости напряжения от тока. Неравенство (3) означает, что характерная длина дуги траектории захваченного электрона много меньше длины свободного пробега, и электрон успевает совершить много осцилляций вокруг плоскости

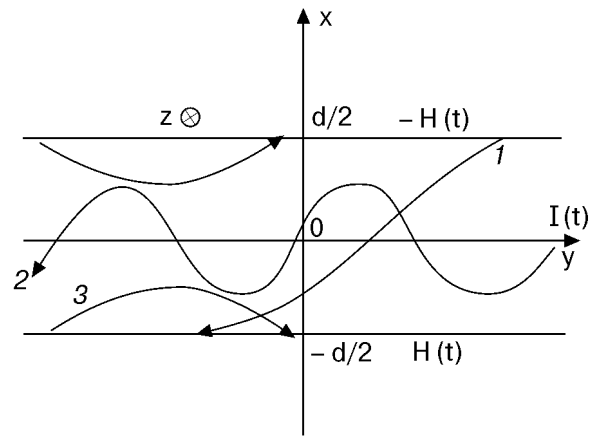


Рис. 1. Геометрия задачи: траектории пролетных (1), захваченных (2) и поверхностных (3) электронов.

перемены знака до того, как произойдет рассеяние (рис. 1).

Если по пластине протекает переменный ток, то за период колебаний тока проводимость образца может претерпевать значительные изменения. Это связано с тем, что при больших значениях тока имеет место режим сильной нелинейности, обусловленной доминирующим вкладом захваченных частиц. В настоящей работе теоретически изучена временная зависимость напряжения в пленке, по которой протекает транспортный ток, представляющий собой сумму постоянной и низкочастотной переменной составляющих и удовлетворяющий условиям (1), (3). При этом постоянная компонента обеспечивает выход системы в нелинейный режим, а переменная составляющая определяет динамический отклик. Показано, что нелинейность приводит к немонотонным зависимостям вещественной и мнимой частей поверхностного импеданса от амплитуды переменной составляющей тока, что обусловлено выходом ВАХ на нелинейный участок. При больших значениях постоянной компоненты тока вещественная часть поверхностного импеданса, отвечающая за джоулевые потери, имеет плавный максимум как функция амплитуды переменной сдвигки, приходящийся на значения амплитуды, близкие к величине постоянной составляющей тока. При уменьшении значения постоянной компоненты зависимость становится более сложной и помимо максимума на ней появляется еще дополнительный минимум. Мнимая часть поверхностного импеданса имеет один минимум как функция амплитуды переменного тока, слегка изменяющийся при уменьшении постоянной компоненты и расположенный в той же области значений амплитуды, что и максимум вещественной части. В работе получен также ряд

асимптотик, описывающих различные стадии выхода на нелинейную ВАХ.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим металлическую пластину, по которой протекает переменный ток  $I(t)$ , представляющий собой сумму постоянной и гармонической переменной составляющих:

$$I(t) = I_0 + I_1 \cos \omega t. \quad (4)$$

Введем систему координат, ось  $x$  которой направлена по нормали к граням пленки. Плоскость  $x = 0$  соответствует середине образца (см. рис. 1). Ось  $y$  выберем коллинеарно току, а ось  $z$  — параллельно вектору магнитного поля  $\mathbf{H}(x, t)$ . Размеры пленки вдоль осей  $y$  и  $z$  ( $L$  и  $D$  соответственно) предполагаются много большими толщины  $d$ .

Уравнения Максвелла в данной геометрии имеют вид

$$-\frac{\partial H(x, t)}{\partial x} = \frac{4\pi}{c} j(x, t), \quad \frac{\partial E(x, t)}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial H(x, t)}{\partial t}. \quad (5)$$

Здесь  $j(x, t)$  и  $E(x, t)$  представляют собой  $y$ -компоненты плотности тока и электрического поля. Уравнения (5) необходимо решать совместно с граничными условиями

$$H(\pm d/2, t) = \mp 2\pi I(t)/cD \equiv \mp H(t). \quad (6)$$

Нас интересует квазистатический случай, когда частота волны  $\omega$  много меньше частоты релаксации  $\nu$  носителей заряда,  $\omega \ll \nu$ .

Кроме того, считаем, что характерный радиус кривизны электронных траекторий  $R(x, t)$  много больше толщины пленки  $d$ :

$$d \ll R(x, t), \quad R(x, t) = cp_F/e |H(x, t)|. \quad (7)$$

## 3. Основные группы носителей тока. ВАХ пленки

Рассмотрим динамику электронов в пространственно-знакопеременном магнитном поле  $H(x, t)$ . Калибровку векторного потенциала удобно выбрать в виде

$$\mathbf{A}(x, t) = \{0, A(x, t), 0\}, \quad A(x, t) = \int_0^x dx' H(x', t). \quad (8)$$

Интегралами движения электрона в неоднородном магнитном поле  $H(x, t)$  являются полная энергия (равная фермиевской) и обобщенные импульсы  $p_z = mv_z$  и  $p_y = mv_y - eA(x, t)/c$  ( $m$  — масса электрона). Траектория электрона в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, определяется скоростями  $v_x(x, t)$  и  $v_y(x, t)$ . Для ферми-сферы радиусом  $p_F = mv$  имеем

$$|v_x(x, t)| = (v_{\perp}^2 - v_y^2)^{1/2}, \quad v_{\perp} = (v^2 - v_z^2)^{1/2}, \quad (9)$$

$$v_y(x, t) = [p_y + eA(x, t)/c]/m.$$

Классически допустимые области движения электрона по оси  $x$  находятся из неравенств

$$-p_y - mv_{\perp} \leq eA(x, t)/c \leq -p_y + mv_{\perp}. \quad (10)$$

Они обеспечивают положительность подкоренного выражения в формуле (9) для  $|v_x(x, t)|$ .

На рис. 2 изображены области движения электронов в плоскости переменных  $(x, p_y)$ . Для определенности выбран момент времени, когда полный ток  $I(t)$  через образец положителен. Верхняя граница на фазовой плоскости описывается кривой  $p_y = mv_{\perp} - eA(x, t)/c$ , а нижняя — кривой  $p_y = -mv_{\perp} - eA(x, t)/c$ . На рис. 2 видно, что по характеру движения электроны разделяются на несколько групп в зависимости от величины и знака интеграла движения  $p_y$ .

1) *Пролетные электроны*. Область их существования определяется неравенствами

$$p_y^* = -mv_{\perp} - eA(d/2, t) \operatorname{sgn} I(t)/c \leq p_y \operatorname{sgn} I(t) \leq mv_{\perp}. \quad (11)$$

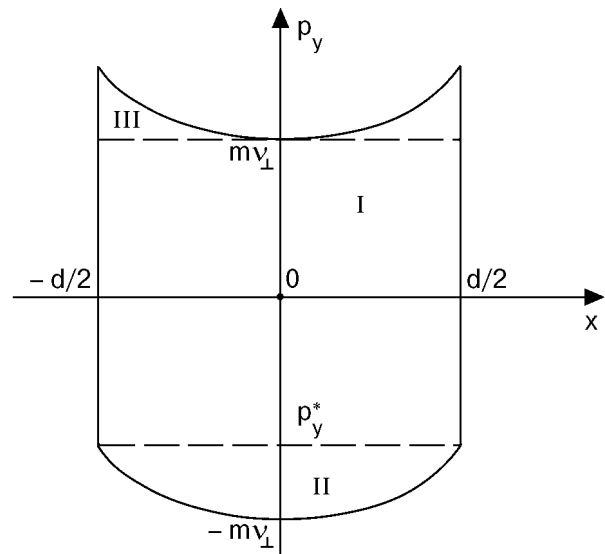


Рис. 2. Фазовая плоскость  $(p_y, x)$ : области существования пролетных (I), захваченных (II) и поверхностных (III) частиц.

Пролетные электроны испытывают соударения с обеими границами пленки. Траектории таких частиц в силу (7) почти не искривляются магнитным полем тока.

2) *Захваченные электроны.* Они существуют в области

$$-mv_{\perp} \leq p_y \operatorname{sgn} I(t) \leq p_y^* . \quad (12)$$

Траектории таких частиц представляют собой почти плоские осциллирующие кривые, вьющиеся вокруг плоскости  $x = 0$  перемены знака магнитного поля. Период этих осцилляций равен  $2T$ , где величина  $T$  определяется соотношением

$$T = \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \frac{dx}{|v_x(x, t)|} . \quad (13)$$

Границы промежутка интегрирования есть точки поворота частицы ( $x_1(t) < 0 < x_2(t) = -x_1(t)$ ), которые являются корнями уравнения

$$eA(x_{1,2}, t)/c = -mv_{\perp} - p_y . \quad (14)$$

3) *Поверхностные электроны.* Эта группа частиц испытывает соударения только с одной из границ пленки. Можно показать, что при диффузном отражении электронов границами их вклад в проводимость металла определяет несущественную константу порядка единицы в аргументе логарифма, содержащегося в асимптотике проводимости пролетных электронов. В дальнейшем мы не учитываем поверхностных электронов.

Приведенное здесь описание электронных групп аналогично тому, что дано в [5]. Отличие состоит в том, что в данном случае плоскость перемены знака существует во все моменты времени и совпадает с серединой образца. Вследствие этого изменяются границы областей существования электронных групп.

Для вычисления плотности тока пролетных и захваченных частиц применяется стандартный метод, использующий кинетическое уравнение Больцмана. Кинетическое уравнение линейризуется по электрическому полю  $E(x, t)$ , представляющему собой сумму однородной потенциальной  $E_0(t)$  и неоднородной вихревой  $\mathbf{E}(x, t)$  компонент:

$$E(x, t) = E_0(t) + \mathbf{E}(x, t) ,$$

$$\mathbf{E}(x, t) = -\frac{1}{c} \left( \frac{\partial A(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial \bar{A}(t)}{\partial t} \right) . \quad (15)$$

Величина  $\bar{A}(t)$  представляет собой усредненную по толщине образца величину векторного потенциала:

$$\bar{A}(t) = \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} A(x', t) dx' . \quad (16)$$

Нелинейность в задаче связана с неоднородным магнитным полем тока  $H(x, t)$ , входящим в силу Лоренца. Мы рассматриваем диапазон низких частот, когда в выражении (15) первое слагаемое является доминирующим (соответствующее неравенство приведено в заключении). Для этого случая (т.е. случая квазиоднородного электрического поля) асимптотические выражения для плотности тока в условиях (3) и (7) можно взять из работы [4]:

$$j_{\text{fl}} = \sigma_{\text{fl}} E_0(t) , \quad (17)$$

$$\sigma_{\text{fl}}(t) = \frac{3}{8} \sigma_0 \frac{d}{l} \ln \frac{R(t)}{d} , \quad R(t) = \frac{cp_F}{e|H(t)|} ,$$

$$j_{\text{tr}} = \sigma_{\text{tr}} E_0(t) , \quad (18)$$

$$\sigma_{\text{tr}}(t) = \frac{36\pi^{1/2}}{5\Gamma^2(1/4)} \sigma_0 \left[ \frac{e}{cp_F} |A(x, t) - A(d/2, t)| \right]^{1/2} .$$

Эти формулы допускают очевидный предельный переход к результатам работы [4] при  $\omega \rightarrow 0$ . Полученные асимптотические выражения (17), (18) необходимо подставить в уравнения Максвелла (5). Введем безразмерные координату и векторный потенциал:

$$\xi = 2x/d , \quad a(\xi, t) = A(x, t)/A(d/2, t) . \quad (19)$$

Уравнение для  $a(\xi, t)$  имеет вид

$$\frac{\partial^2 a(\xi, t)}{\partial \xi^2} \operatorname{sgn} I(t) = u \{ r [1 - a(\xi, t)]^{1/2} + 1 \} . \quad (20)$$

Входящая в (20) величина  $r$  представляет собой отношение максимального значения проводимости захваченных носителей к проводимости пролетных частиц:

$$r = \frac{\sigma_{\text{tr}}(0)}{\sigma_{\text{fl}}} = \frac{96\pi^{1/2}}{5\Gamma^2(1/4)} \frac{l}{d} \left[ \frac{e}{cp_F} |A(d/2, t)| \right]^{1/2} \times \ln^{-1}(R/d) , \quad (21)$$

а параметр  $u$  связан с напряжением на образце  $U = E_0 L$  соотношением

$$u = \frac{U\pi\sigma_{fl}d^2}{cL|A(d/2, t)|} \quad (22)$$

Граничными условиями к уравнению (20) служат безразмерные соотношения (6):

$$\left. \frac{\partial a}{\partial \xi} \right|_{\xi=1} = -\frac{d}{2} \frac{H(t)}{A(d/2, t)}, \quad (23)$$

$$\left. \frac{\partial a}{\partial \xi} \right|_{\xi=-1} = \frac{d}{2} \frac{H(t)}{A(d/2, t)}, \quad a(1, t) = 1.$$

Последнее, дополнительное условие в (23) — следствие нормировки (19) векторного потенциала.

Краевая задача (20), (23) во многом аналогична рассмотренной в [5]. Отличия состоят в том, что магнитное поле  $H_0 + H_1 \cos \omega t$  на поверхности пленки теперь обусловлено переменным собственным полем тока (см. (4), (6)), а не гармоническим полем падающей волны. Знакопеременность во временной зависимости тока в пленке учитывается в уравнении (20) множителем  $\text{sgn } I(t)$ . Кроме того, как уже было сказано выше, плоскость перемены знака магнитного поля неподвижна и во все моменты времени совпадает с серединой образца.

Решение полученной краевой задачи (20) является четной функцией безразмерной координаты  $\xi$  и задается формулой

$$|\xi| = \left( \frac{3}{4ru \text{sgn } I(t)} \right)^{1/2} \times \int_0^{a(\xi, t)} d\zeta [1 - (1 - \zeta)^{3/2} + 3\zeta/2r]^{-1/2}. \quad (24)$$

С помощью (24) нельзя найти явный вид зависимости  $a(\xi, t)$ , но можно определить среднее по толщине образца значение проводимости захваченных электронов:

$$\frac{\bar{\sigma}_{tr}}{\sigma_{fl}} = r \int_0^1 d\zeta (1 - \zeta)^{1/2} [1 - (1 - \zeta)^{3/2} + 3\zeta/2r]^{-1/2} \times \left[ \int_0^1 d\zeta [1 - (1 - \zeta)^{3/2} + 3\zeta/2r]^{-1/2} \right]^{-1}. \quad (25)$$

Для определения напряжения  $U$  проинтегрируем обе части уравнения (20) по  $\xi$  от  $-1$  до  $1$  с учетом

граничных условий (23). С помощью формулы (22) после простых преобразований получаем

$$U(t) = \frac{cL}{2\pi d\sigma_{fl}(t)} \frac{H(t)}{1 + \bar{\sigma}_{tr}/\sigma_{fl}}. \quad (26)$$

Отношение проводимостей  $\bar{\sigma}_{tr}/\sigma_{fl}$  зависит от параметра  $r$  (см. (25)). Учитывая (22) и связь (21) между  $A(d/2, t)$  и  $r$ , из первого граничного условия (23) с помощью (24) мы приходим к алгебраическому уравнению для  $r$ :

$$r^2(1 + 2r/3) = \text{sgn } I(t) \left( \frac{H(t)}{\tilde{H}} \right)^2 \frac{\tilde{U}}{U \ln^3(R/d)}. \quad (27)$$

Здесь введены обозначения:

$$\tilde{H} = \frac{25\Gamma^4(5/4)}{9\pi} \frac{cp_F d}{e l^2}, \quad \tilde{U} = \frac{4cL\tilde{H}}{3\pi\sigma_0 d^2}. \quad (28)$$

Физический смысл введенных величин состоит в том, что при таких значениях магнитного поля и напряжения характерная длина дуги траекторий захваченных электронов  $(Rd)^{1/2}$  становится порядка длины свободного пробега  $l$ . Удобно также ввести характерный ток  $\tilde{I}$ , соответствующий магнитному полю  $\tilde{H}$ . Согласно (7),

$$\tilde{I} = \frac{cD\tilde{H}}{2\pi}. \quad (29)$$

Соотношения (26) и (27), строго говоря, описывают вольт-амперную характеристику только в области больших токов, что соответствует выполнению условия  $H(t) \gg \tilde{H}$  (т. е. условию (3)). Но анализ показывает, что полученные выражения являются хорошими интерполяционными формулами для всех моментов времени, даже когда условие (3) не выполняется.

#### 4. Поверхностный импеданс пленки в однородном приближении

Как уже говорилось в предыдущем разделе, в настоящей работе изучен случай низких частот, когда в выражении (15) преобладает потенциальное слагаемое  $E_0(t)$ . В данном разделе мы найдем поверхностный импеданс пленки в главном (однородном) приближении, в котором неоднородная вихревая добавка  $\mathbf{E}$  в (15) равна нулю. Для вычисления поверхностного импеданса нам необходимо знать временную зависимость электрического поля на поверхности пленки. В рассматриваемом случае электрическое поле в пленке является однородным и содержит только потенциальную компоненту  $E_0(t)$ , которая однозначно оп-

ределяется через напряжение  $U$  на образце. В свою очередь, зависимость напряжения от времени (при заданной зависимости от времени полного тока  $I(t)$ ) дается формулами (26), (27). Таким образом, с помощью выражений (26), (27) можно найти поверхностный импеданс пленки, определяемый как отношение фурье-гармоник электрического и магнитного полей на поверхности металла:

$$Z_{\omega} = \frac{4\pi}{c} \frac{E_{0,\omega}}{H_{\omega}}$$

Переходя от полей к напряжению и току с использованием (6), получаем

$$Z_{\omega} = 2 \frac{D}{L} \frac{U_{\omega}}{I_{\omega}}, \quad (30)$$

где  $U_{\omega}$  и  $I_{\omega}$  представляют собой фурье-гармоники напряжения и тока:

$$U_{\omega} = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} dt U(t) e^{i\omega t}, \quad I_{\omega} = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} dt I(t) e^{i\omega t}. \quad (31)$$

Из формул (4), (26) и (27) видно, что напряжение зависит от времени только через  $\cos \omega t$ . Поэтому поверхностный импеданс является вещественной величиной:

$$Z_{\omega} = R_{\omega} = \frac{4\omega}{\pi} \frac{D}{L} \frac{1}{I_1} \int_0^{\pi/\omega} U(t) \cos \omega t dt. \quad (32)$$

На рис. 3 приведен результат численного расчета зависимости поверхностного импеданса от безразмерной амплитуды переменной компоненты тока  $I_1/\tilde{I}$ . Импеданс дан в единицах

$$\tilde{R} = \frac{D}{L} \frac{\tilde{U}}{\tilde{I}} = \frac{8l}{3\sigma_0 d^2}.$$

Рисунок 3,а иллюстрирует случай, когда постоянная компонента тока достаточно велика,  $I_0/\tilde{I} = 100 \gg 1$ , и мы изначально находимся в режиме сильной нелинейности. Немонотонная зависимость импеданса, которая имеет место в данной ситуации, может быть легко объяснена следующим образом. Если амплитуда переменной компоненты тока  $I_1$  мала по сравнению с постоянной сдвижкой  $I_0$ , то суммарный ток не слишком сильно отличается от  $I_0$  в течение всего периода колебаний. Поэтому в любой момент времени мы находимся в режиме сильной нелинейности, когда

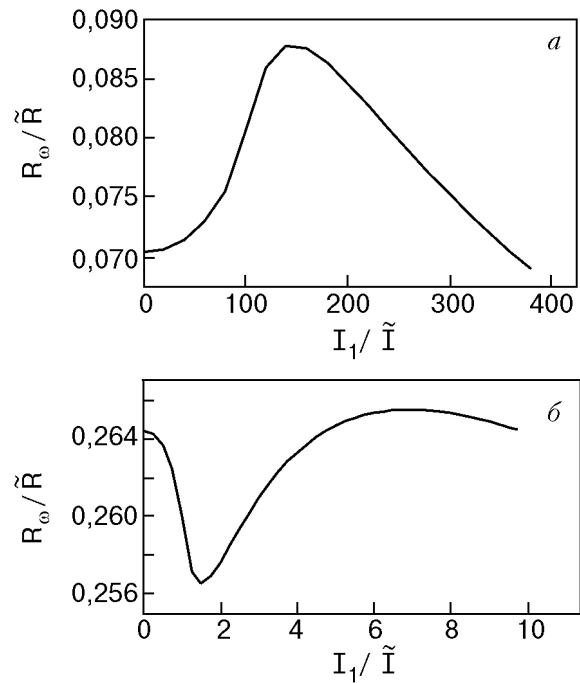


Рис. 3. Зависимость вещественной части поверхностного импеданса  $R_{\omega}$  от амплитуды переменной составляющей тока  $I_1$  при  $I_0/\tilde{I} = 100$  (а) и 1 (б).

суммарный ток велик и радиус кривизны электронных траекторий  $R$  мал настолько, что выполняется неравенство (3). В таких условиях проводимость образца всегда определяется группой захваченных электронов и характеризуется большим параметром  $\bar{\sigma}_{tr}/\sigma_{fl} \sim r \sim I/\tilde{I} \sim l/(Rd)^{1/2} \gg 1$ , из-за чего поверхностный импеданс оказывается малым. В противоположном предельном случае, когда относительная амплитуда тока велика,  $I_1 \gg I_0$ , вклад постоянной сдвижки  $I_0$  становится несущественным и мы фактически имеем дело с гармоническим сигналом большой амплитуды. В силу большой величины амплитуды сигнала подавляющую часть периода образец находится в режиме сильной нелинейности и импеданс опять мал. И, наконец, в промежуточной области амплитуд  $I_1 \sim I_0$ , когда значительная часть периода тока соответствует линейному участку ВАХ, вклад линейной области с относительно малой проводимостью в зависимость импеданса от амплитуды становится заметным. Поэтому на кривой  $R_{\omega}(I_1)$  появляется плавный максимум в окрестности  $I_1 \sim I_0$ . Из-за того, что проводимость захваченных электронов зависит от тока слабым корневым образом (см. (2)), относительная величина этого максимума невелика ( $\sim 10$ – $15\%$  на рис. 3,а).

Интересно проследить, как меняется описанная выше зависимость при уменьшении по-

стоянной сдвигки  $I_0$ . На рис. 3,б приведена зависимость вещественной части поверхностного импеданса при  $I_0/\tilde{I} = 1$ . При небольших значениях амплитуды  $I_1 \sim I_0 \sim \tilde{I}$  реализуется слабонелинейный участок ВАХ. Параметр  $\bar{\sigma}_{tr}/\sigma_{fl}$ , определяющий относительный вклад в проводимость захваченных и пролетных электронов, оказывается в данном случае порядка единицы (в отличие от ситуации на рис. 3,а, соответствующей  $\bar{\sigma}_{tr}/\sigma_{fl} \gg 1$ ). При относительно больших значениях амплитуды  $I_1 \gg I_0$ , как и в случае сильной постоянной сдвигки, импеданс начинает убывать из-за выхода на нелинейный участок, но во всей области амплитуд, меньших или порядка  $I_0$ , вклад захваченных электронов становится малым и нелинейность слаба. В этом случае, как видно на рис. 3,б, на кривой  $R_\omega(I_1)$  кроме максимума появляется минимум. Так же, как и для случая  $I_0 \gg \tilde{I}$ , относительный масштаб изменения импеданса невелик.

С помощью выражений (26), (27) можно получить полезные асимптотики напряжения  $U(t)$ , параметра нелинейности  $r(t)$  и импеданса  $R_\omega(I_1)$  для случая достаточно больших токов  $I(t) \gg \tilde{I}$ . Разлагая вольт-амперную характеристику (26) в ряд по степеням  $\tilde{I}/I(t)$  с учетом (25) и (27), получаем

$$U(t)/\tilde{U} = \text{sgn}[I(t)] \frac{|I(t)/\tilde{I}|^{1/2}}{(3b_1^3/2)^{1/2}} + O(1), \quad (33)$$

$$r(t) = \frac{|I(t)/\tilde{I}|^{1/2} b_1^{1/2}}{\ln(R/d)} + O(1), \quad (34)$$

$$b_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(7/6)}{\Gamma(2/3)} \approx 0,77. \quad (35)$$

Асимптотики (33), (34) реализуются, например, при большой постоянной сдвигке  $I_0 \gg \tilde{I}$  (см. рис. 3,а) в условиях, когда амплитуда переменной составляющей  $I_1$  либо очень велика ( $I_1 \gg \tilde{I}_0$ ), либо сравнительно мала ( $I_1 \ll \tilde{I}_0$ ). В первом случае асимптотика импеданса имеет вид

$$\frac{R_\omega}{\bar{R}} = \frac{64}{(27\pi^3 b_1^3)^{1/2}} \Gamma^2(5/4) \left(\frac{\tilde{I}}{I_1}\right)^{1/2} \approx 2,69 \left(\frac{\tilde{I}}{I_1}\right)^{1/2}. \quad (36)$$

Для второго случая, в пределе  $I_1 \rightarrow 0$ , получаем

$$\left. \frac{R_\omega}{\bar{R}} \right|_{I_1 \rightarrow 0} = \left(\frac{2}{3b_1^3}\right)^{1/2} \left(\frac{\tilde{I}}{I_0}\right)^{1/2}. \quad (37)$$

## 5. Неоднородная составляющая электрического поля. Мнимая часть поверхностного импеданса

В предыдущем разделе была получена зависимость электрического поля на поверхности образца в пренебрежении неоднородной (вихревой) составляющей  $\mathbf{E}$ . В рассмотренном приближении поверхностный импеданс оказался вещественной величиной. Для того чтобы получить отличную от нуля мнимую часть импеданса, необходимо учесть члены более высокого порядка по частоте, а именно вихревую компоненту электрического поля в (15). Поле  $\mathbf{E}(x, t)$  распределено симметрично по толщине пленки, и поэтому для нахождения поверхностного импеданса достаточно вычислить поле  $\mathbf{E}$  только на верхней грани пленки  $x = d/2$ . Используя формулу (15), получаем следующее выражение для поправки  $\Delta Z_\omega$  к импедансу:

$$\begin{aligned} \Delta Z_\omega &= \frac{4\pi}{c} \frac{\mathbf{E}_\omega(d/2)}{H_\omega} = -\frac{4\pi}{c} \frac{cD}{2\pi I_1} \frac{2}{2\pi c} \times \\ &\quad \times \int_0^{2\pi/\omega} [\dot{A}(d/2, t) - \dot{\bar{A}}(t)] e^{i\omega t} dt = \\ &= i \frac{2D\omega^2}{\pi c I_1} \int_0^{2\pi/\omega} [A(d/2, t) - \bar{A}(t)] e^{i\omega t} dt. \quad (38) \end{aligned}$$

Точно так же, как и в предыдущем разделе, можно показать, что, поскольку время входит в формулу (38) только в комбинации  $\cos \omega t$ , интеграл в правой части является чисто вещественной величиной и сводится к интегралу по половине периода. Поэтому окончательно имеем

$$\Delta Z_\omega = i \frac{4D\omega}{\pi c I_1} \int_0^\pi [A(d/2, \tau) - \bar{A}(\tau)] \cos \tau d\tau. \quad (39)$$

Здесь произведена замена переменных  $\tau = \omega t$ . Таким образом, первая поправка к импедансу оказывается чисто мнимой. Она целиком определяет мнимую часть импеданса.

Согласно (39), для вычисления поправки к импедансу необходимо знать величины  $A(d/2, \tau)$  и  $\bar{A}(\tau)$ . Значение  $A(d/2, \tau)$  легко найти из выражения (21)

$$A(d/2, \tau) = -\text{sgn} I(\tau) \tilde{H} d \ln^2(R/d) r^2/4. \quad (40)$$

Здесь  $r$  — решение уравнения, полученного из (27) подстановкой  $U$  из формулы для ВАХ (26).

Для нахождения среднего по толщине пленки значения векторного потенциала  $\bar{A}$  необходимо воспользоваться решением (24) уравнений Максвелла:

$$\bar{A}(\tau) = A(d/2, \tau) \frac{1}{2} \int_{-1}^1 a(\xi, \tau) d\xi = A(d/2, \tau) \times \left( \frac{3}{4ru \operatorname{sgn} I(\tau)} \right)^{1/2} \int_0^1 \frac{\zeta d\zeta}{[1 - (1 - \zeta)^{3/2} + 3\zeta/2r]^{1/2}} = A(d/2, \tau) f(\tau), \quad (41)$$

где функция  $f(\tau)$  задается выражением

$$f(\tau) = \left( \int_0^1 \frac{\zeta d\zeta}{[1 - (1 - \zeta)^{3/2} + 3\zeta/2r(\tau)]^{1/2}} \right) \times \left( \int_0^1 \frac{d\zeta}{[1 - (1 - \zeta)^{3/2} + 3\zeta/2r(\tau)]^{1/2}} \right)^{-1}. \quad (42)$$

Окончательная формула для импеданса находится с помощью (40) и (41). Она записывается в виде

$$X_\omega = -\operatorname{Im} \Delta Z_\omega = i \frac{2\omega d}{c^2} \frac{\tilde{I}}{I_1} \int_0^\pi \operatorname{sgn} [I(\tau)] r^2(\tau) \times \ln^2 [R(\tau)/d] [1 - f(\tau)] \cos \tau d\tau. \quad (43)$$

Нетрудно получить асимптотику величины  $X_\omega$  при больших значениях амплитуды тока  $I_1 \gg \tilde{I}$ . С помощью формулы (34) приходим к следующему выражению для мнимой части импеданса:

$$X_\omega = \frac{4\pi}{c} b_2 \frac{\omega d}{c}, \quad (44)$$

$$b_2 = \frac{1}{60\pi^{1/2}} \left( \frac{\Gamma(1/6) \Gamma(1/3)}{2\pi} \right)^3 \approx 0,13.$$

Точно такая же формула получается и для случая  $I_0 \gg \tilde{I}$ ,  $I_1 \rightarrow 0$ . Интересное следствие из полученных результатов состоит в том, что при больших значениях постоянной компоненты  $I_0$  для

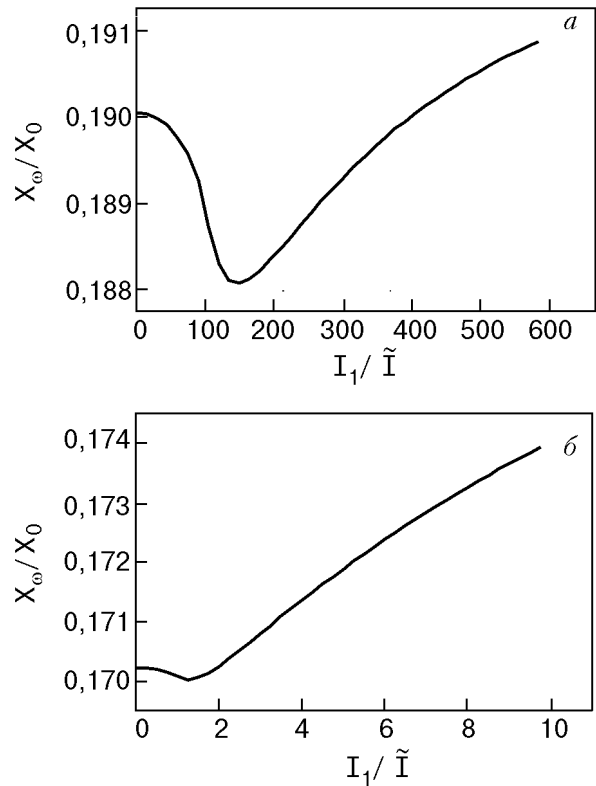


Рис. 4. Зависимость мнимой части поверхностного импеданса  $X_\omega$  от амплитуды переменной составляющей тока  $I_1$  при  $I_0/\tilde{I} = 100$  (а) и 1 (б). Импеданс нормирован на величину  $X_0 \equiv (4\pi/c) (\omega d/c)$ .

малых и больших значений амплитуды переменной компоненты  $I_1$  мнимая часть поверхностного импеданса оказывается величиной, не зависящей от постоянной сдвигки  $I_0$ , и совпадает с импедансом вакуума, ослабленным параметром  $\omega d/c$ . Более точный численный расчет, результат которого приведен на рис. 4 для случаев сильной и слабой нелинейности (при больших и малых значениях величины  $I_0$ ), показывает, что в широком интервале изменения амплитуды импеданс по порядку величины совпадает с (44). Кроме того, как видно на рис. 4, мнимая часть импеданса, так же как и вещественная, немонотонно зависит от амплитуды. Отметим, что относительный масштаб изменения мнимой части импеданса оказывается еще меньше, чем масштаб изменения вещественной части, и составляет лишь 1–2%.

## 6. Заключение

В данной работе исследовано новое проявление магнитодинамической нелинейности в пленке, по которой протекает переменный ток. Изучен нелинейный отклик образца на собственное магнитное поле транспортного тока вида  $I_0 + I_1 \cos \omega t$ . По-



казано, что магнитодинамическая нелинейность приводит к немонотонным зависимостям вещественной и мнимой частей импеданса от амплитуды  $I_1$ .

Полученные результаты справедливы в предположении, что неоднородная составляющая электрического поля в (15) много меньше потенциальной. Проведем оценку обеих компонент электрического поля для наиболее интересного режима сильной нелинейности (когда суммарный ток в системе много больше  $\tilde{I}$ ). Из формулы (33) для потенциальной составляющей получаем

$$E_0 \sim \frac{c\tilde{H}}{\sigma_0 d^2} \left| \frac{I}{\tilde{I}} \right|^{1/2} \sim \frac{c\tilde{H}}{\sigma_0 d^2} \frac{l}{(Rd)^{1/2}}. \quad (45)$$

Для оценки вихревого поля  $\mathbf{E}$  воспользуемся тем, что в режиме сильной нелинейности величины  $\bar{A}(\tau)$  и  $A(d/2, \tau)$  отличаются только численным множителем. Это следует из формул (41) и (42). С помощью (15) и (40), а также асимптотики (34) получаем оценку

$$\mathbf{E} \sim \frac{\omega d I_1}{c \tilde{I}} \tilde{H}. \quad (46)$$

Теперь условие применимости полученных результатов можно записать в виде следующего неравенства:

$$\frac{d^3 I_1}{l \tilde{I}} \frac{(Rd)^{1/2}}{l} \ll \delta_n^2(\omega), \quad \delta_n^2(\omega) = \frac{c^2}{4\pi\sigma_0\omega}, \quad (47)$$

где  $\delta_n(\omega)$  — глубина проникновения сигнала в условиях нормального скин-эффекта. При фиксированной длине свободного пробега  $l$  неравенство (47) фактически представляет собой ограничение на частоту сигнала.

Оценим характерные частоты, при которых рассмотренные в данной работе немонотонные зависимости импеданса от амплитуды могут наблюдаться в эксперименте. Для образцов с толщиной

$d = 10^{-2}$  см, шириной  $D = 0,5$  см, длиной свободного пробега носителей  $l = 10^{-1}$  см, концентрацией электронов  $N = 10^{23}$  см $^{-3}$  и фермиевским импульсом  $p_F = 10^{-19}$  г-см/с режим сильной нелинейности наступает при значениях тока  $I_0 \sim \sim I_1 \sim 10$  А. Из (47) следует, что при таких значениях параметров частота  $\omega$  должна быть меньше  $10^3$  с $^{-1}$ .

1. В. Т. Долгополов, *УФН* **130**, 241 (1980).
2. Н. М. Макаров, В. А. Ямпольский, *ФНТ* **17**, 547 (1991).
3. G. I. Babkin and V. T. Dolgoplov, *Solid State Commun.* **18**, 713 (1976).
4. Э. А. Канер, Н. М. Макаров, И. Б. Снапиро, В. А. Ямпольский, *ЖЭТФ* **87**, 2166 (1984).
5. С. А. Деревяно, Г. Б. Ткачев, В. А. Ямпольский, *ФНТ* **26**, 86 (2000).
6. A. B. Pippard, *Proc. Roy. Soc. A* **191**, 385 (1947).
7. A. B. Pippard, *Proc. Roy. Soc. A* **224**, 273 (1954).

### The impedance of a thin metallic film in the regime of a strong magnetodynamic nonlinearity

S. A. Derev'anko, G. B. Tkachev,  
and V. A. Yampol'skii

The nonlinear response of a metal film to the self magnetic field of an ac transport current is studied theoretically. The nonlinearity is due to the magnetodynamic mechanism which is connected to the influence of the magnetic field of the current on the dynamics of conduction electrons. This mechanism is typical for pure metals at low temperatures. The nonlinearity leads to the dependence of the surface impedance on the amplitude of the ac current. We show that the real part of the surface impedance which is responsible for heat losses, when treated as a function of amplitude is characterized by a smooth maximum. The imaginary part of the surface impedance is also a non-monotonic function of amplitude and features a minimum.