

Свойства динамических солитонов нелинейных систем, определяемые линеаризованным уравнением

А. М. Косевич

*Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина НАН Украины
Украина, 61164, г. Харьков, пр. Ленина, 47
E-mail: kosevich@ilt.kharkov.ua*

Статья поступила в редакцию 9 февраля 2000 г.

Обсуждены особенности динамических солитонов в нелинейных системах разной размерности, описываемых дифференциальными уравнениями с пространственными производными четвертого порядка. Сформулированы условия существования безызлучательного солитона в случае, когда его внутренняя частота попадает в сплошной спектр гармонических колебаний изучаемой системы. Эти условия определяются видом закона дисперсии линейных колебаний. Продемонстрировано использование сформулированных условий для определения параметров $1D$ солитонов.

Обговорено особливості динамічних солітонів у нелінійних системах різної розмірності, які описуються диференціальними рівняннями з просторовими похідними четвертого порядку. Сформульовано умови існування солітона без випромінювання в тому випадку, коли його внутрішня частота знаходиться у суцільному спектрі гармонічних коливань в системі, що вивчається. Ці умови залежать від вигляду закону дисперсії лінійних коливань. Продемонстровано, як можна використати умови, що сформульовані, для визначення параметрів $1D$ солітонів.

PACS: 05.45.+b

Введение

Мы намерены обсудить свойства динамических солитонов в некоторых нелинейных системах с точки зрения линейной динамики этих систем. Под динамическим солитоном понимается нелинейное пространственно локализованное возмущение изучаемой системы, стабильность которого обеспечивается наличием простых аддитивных интегралов движения. Примерами таких солитонов могут служить солитон нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) или магнитный солитон [1].

Динамический солитон обычно характеризуется внутренней частотой, значение которой является одним из основных параметров солитона. Традиционно динамические солитоны в физике конденсированного состояния изучались на основе нелинейных дифференциальных уравнений с пространственными производными второго порядка. В случае скалярного поля динамический оператор обладает частотами локальных состоя-

ний, расположенными обязательно вне интервала сплошного спектра. Поэтому собственная частота динамического солитона подобного физического поля, как частота любого локализованного возбуждения, обязана находиться вне спектра (в случае НУШ или магнитного солитона — ниже сплошного спектра).

Ситуация меняется при изучении динамики дискретной системы или динамики континуальной системы, описываемой дифференциальными уравнениями более высокого (чем второй) порядка пространственных производных [2]. В этом случае может оказаться, что частота солитона падает в сплошной спектр гармонических колебаний, и возникнут проблемы существования солитона при наличии излучения линейных волн, а также радиационного взаимодействия солитонов (см., например, [3,4]). В работе [5] построены подобные солитоны в модельных $1D$ системах и обсуждены их свойства. Мы хотим показать, что большинство возникающих при этом эффектов связано со свойствами линеаризованных уравне-

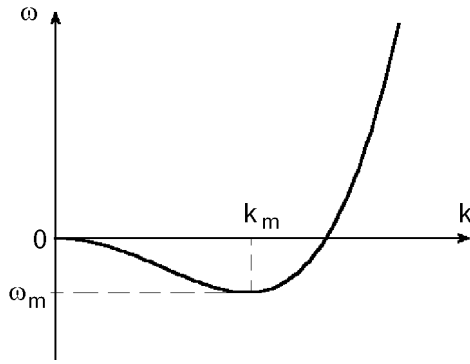


Рис. 1. График закона дисперсии линейризованного уравнения (зависимость частоты ω от волнового числа k).

ний, описывающих гармонические колебания изучаемой системы, в частности с законом дисперсии малых колебаний. Эти уравнения определяют асимптотики поля на больших расстояниях от солитона и содержат богатую информацию о возможных солитонных решениях нелинейных уравнений.

1. Одномерные нелинейные системы

Ограничимся простой нелинейной моделью, учитывающей высшую дисперсию и позволяющей описать разнообразные ситуации, возникающие в солитонной динамике:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + F(\psi) = 0, \quad (1)$$

$$F(\psi) = |\psi|^2 \psi + \gamma_1 \left| \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|^2 \psi + \gamma_2 |\psi|^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \gamma_3 |\psi|^4 \psi.$$

Будем интересоваться только стационарными состояниями $\psi(x, t) = \varphi(x)e^{i\omega t}$, т.е. свойствами нелинейного уравнения

$$\omega \varphi = \varphi_{xx} + \varphi_{xxxx} + F(\varphi). \quad (2)$$

Линейризованное уравнение, получающееся при отбрасывании слагаемого $F(\varphi)$ в (2), имеет закон дисперсии (см. рис. 1)

$$\omega = -k^2 + k^4. \quad (3)$$

В точке, где $k^2 = k_m^2 = 1/2$, частота ω достигает наименьшего значения $\omega_m = -1/4$. Следовательно, имеем непрерывный спектр собственных частот гармонических колебаний $\omega_m < \omega < \infty$.

Нетрудно вычислить функцию Грина линейризованного уравнения, отвечающую стационарным колебаниям с определенной частотой ω и описы-

вающую расходящуюся на бесконечности волну. В интервале частот $0 < \omega < \infty$ она имеет вид

$$G_\omega(x) = \frac{1}{4\sqrt{\omega - \omega_m}} \left(\frac{i}{k} e^{-ik|x|} + \frac{1}{\kappa} e^{-\kappa|x|} \right), \quad (4)$$

где

$$k^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{1 + 4\omega} + 1), \quad \kappa^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{1 + 4\omega} - 1). \quad (5)$$

В интервале частот сплошного спектра $\omega_m < \omega < 0$ функция Грина не имеет экспоненциально спадающих слагаемых:

$$G_\omega(x) = \frac{1}{4\sqrt{\omega - \omega_m}} \left(\frac{e^{-ik_1|x|}}{k_1} + \frac{e^{-ik_2|x|}}{k_2} \right), \quad (6)$$

где

$$k_1^2 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4\omega}), \quad k_2^2 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 + 4\omega}). \quad (7)$$

Наконец, если частота лежит ниже сплошного спектра ($\omega < -1/4$), то функция Грина приобретает иную форму:

$$G_\omega(x) = \frac{1}{4\kappa k} e^{-\kappa x} \sin(kx + \varphi), \quad (8)$$

где

$$k^2 - \kappa^2 = 1, \quad 2\kappa k = \sqrt{\omega_m - \omega}. \quad (9)$$

Анализ вида функций Грина (4), (6) и (8), независимо от структуры нелинейного слагаемого в уравнении (1), позволяет сделать следующие очевидные заключения о возможных солитонных решениях этого и подобных ему уравнений.

1. Динамические солитоны с частотами $\omega < \omega_m$ обладают экспоненциально спадающими осциллирующими «хвостами», и если они являются точными решениями (1), то не могут излучать линейных волн. Наличие немонотонно спадающих «хвостов» имеет существенное значение при изучении взаимодействия солитонов, и, по-видимому, было впервые обсуждено в работах [6,7].

2. Частотам $\omega_m < \omega < 0$ в принципе не могут отвечать солитонные решения, так как отсутствуют спадающие асимптотики у соответствующих стационарных состояний.

3. Типичное линейное стационарное состояние в интервале частот $\omega > 0$ — это квазилокализованное колебание, одна составляющая которого локализована в пространстве, а другая имеет вид стоячей волны неизменной амплитуды. Особенности процессов рассеяния при наличии таких состояний обсуждены в [8].

Наличие указанных асимптотик означает, что возможные солитонные решения уравнения (1) с частотами $\omega > 0$, как правило, сопровождаются излучением гармонических волн. Имеются разные объяснения физических причин и условий существования в этом интервале частот солитонов без излучения.

Для выяснения необходимых условий, при которых излучение отсутствует, рассмотрим вынужденное решение линеаризованного уравнения, порожденное распределенной силой $f(x)$, сосредоточенной на малом интервале x вблизи $x = 0$. Пусть $f(x)$ убывает с расстоянием быстрее, чем $\exp(-\kappa|x|)$. Тогда решение вне области приложения силы равно

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \int G(x-x')f(x')dx' = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{1+4\omega}} (iQ(k)e^{-ik|x|} + P(\kappa)e^{-\kappa|x|}), \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\kappa Q(k) = \int f(x)e^{ikx}dx, \quad \kappa P(\kappa) = \int f(x)e^{\kappa x}dx. \quad (11)$$

Если при некотором значении $k = k_0$ компонента Фурье распределения силы обращается в нуль ($Q(k_0) = 0$), то вынужденное колебание с частотой $\omega = \omega(k_0)$ не возбуждает излучения на бесконечности. Происходит полное гашение линейных колебаний вдали от источника за счет интерференции волн. При симметричном распределении силы ($f(x) = f(-x)$) указанное условие имеет вид

$$\int f(x) \cos kx dx = 0, \quad (12)$$

а при антисимметричном распределении ($f(-x) = -f(x)$)

$$\int f(x) \sin kx dx = 0. \quad (13)$$

Однако следует помнить, что поскольку частоты такого колебания попадают в квазинепрерывный спектр, его вес в линейной динамике очень мал, порядка $1/\sqrt{N}$, где N — число атомов в изучаемой $1D$ цепочке. Но известно, что в нелинейной динамике вес подобных выделенных стационарных состояний может оказаться совсем иным.

Очевидное математическое условие (12) или (13) разрешимости неоднородного дифференци-

ального уравнения позволяет получить параметры стационарных динамических солитонов, не сопровождающихся излучением.

Анализируя структуру уравнения (2), следует ожидать, что оно имеет солитонное решение вида

$$\varphi_s(x) = \frac{A}{\operatorname{ch} \kappa x}, \quad A = \text{const}, \quad (14)$$

где κ связано с частотой ω соотношением (5).

Подставляя решение (14) в нелинейное слагаемое уравнения (1), можем рассматривать его в качестве внешней силы $f(x) = f(-x)$. В соответствии с (12) солитон (14) не будет сопровождаться излучением при условии

$$\int F(\varphi_s(x)) \cos kx dx = 0. \quad (15)$$

Чтобы исключить громоздкие выкладки, проведем вычисления отдельно для нескольких случаев: (1) $\gamma_1 \neq 0, \gamma_2 = \gamma_3 = 0$, (2) $\gamma_2 \neq 0, \gamma_1 = \gamma_3 = 0$ и (3) $\gamma_3 \neq 0, \gamma_1 = \gamma_2 = 0$.

В первом случае из (5) и (15) следует, что

$$k^2 = \frac{3\gamma_1 - 12}{2\gamma_1}, \quad \kappa^2 = \frac{\gamma_1 - 12}{2\gamma_1}, \quad \omega = \left(\frac{\gamma_1 - 6}{\gamma_1} \right)^2 - \frac{1}{4}. \quad (16)$$

Мы видим, что при $\gamma_1 > 12$ всегда существует единственный солитон типа (14), не излучающий линейных волн. Все параметры амплитуды этого солитона, кроме амплитуды A , получаются из анализа линеаризованного уравнения. Легко убедиться, что точное решение уравнения (2) соответствует

$$A^2 = \frac{24}{\gamma_1} \kappa^2 = \frac{12(\gamma_1 - 12)}{\gamma_1^2}.$$

Во втором случае ($\gamma_1 = \gamma_3 = 0$) имеем

$$k^2 = 3 \frac{\gamma_2 - 4}{2\gamma_2}, \quad \kappa^2 = \frac{\gamma_2 - 12}{2\gamma_2}, \quad (17)$$

$$\omega = \frac{3}{4} \frac{(\gamma_2 - 4)(\gamma_2 - 12)}{\gamma_2^2}.$$

Из (2) следует амплитуда

$$A^2 = \frac{24\kappa^2}{\gamma_2} = \frac{12}{\gamma_2^2} (\gamma_2 - 12).$$

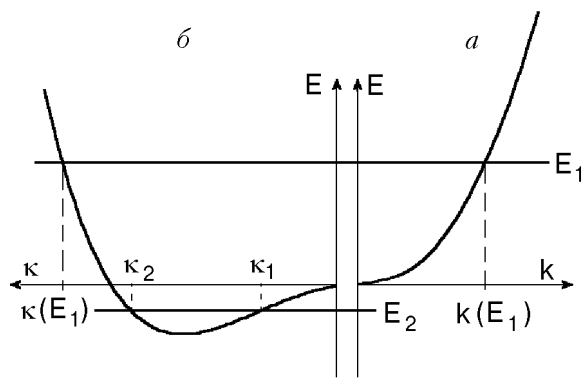


Рис. 2. Зависимости энергии элементарных возбуждений E от вещественного (k) (а) и чисто мнимого ($k = ik$) (б) волнового вектора.

Таким образом, солитон (14) существует в системе с $\gamma_2 > 12$.

Наконец, в случае $\gamma_3 \neq 0$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ из (5) и (15) вытекает

$$\kappa^2 = \frac{\gamma_3}{2(6 - 5\gamma_3)}, \quad k^2 = \frac{3(4 - 3\gamma_3)}{2(6 - 5\gamma_3)},$$

$$\omega = \frac{3\gamma_3(4 - 3\gamma_3)}{4(6 - 5\gamma_3)^2}. \quad (18)$$

Амплитуда солитона получается из (2):

$$A^2 = \frac{24\kappa^2}{\gamma_3} = \frac{12}{6 - 5\gamma_3}.$$

Интересно, что солитон возможен только при $0 < \gamma_3 < 6/5 = 1,2$.

Применим изложенные соображения к анализу более сложного солитонного решения упрощенного уравнения (2) при $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0$. В этом случае следует ожидать наличие солитона типа

$$\varphi(x) = A \frac{\text{sh } \kappa x}{\text{ch}^2 \kappa x}. \quad (19)$$

Поскольку в данном случае $\varphi(-x) = -\varphi(x)$, следует воспользоваться условием (13):

$$\int \left(\frac{\text{sh } \kappa x}{\text{ch}^2 \kappa x} \right)^3 \sin \kappa x dx = 0. \quad (20)$$

Требование (20) определяет $k^2 = k_0^2 \equiv 11\kappa^2$. Используя (5), находим $\kappa^2 = 0,1$ и $\omega = 0,11$. Эти параметры соответствуют единственному решению типа (19), не дающему излучения. В точном решении, представленном в работе [9], имеем $A = \sqrt{6/5}$.

Ясно, что сформулированные условия существования безызлучательного динамического солитона и их демонстрация в конкретных случаях не являются конструктивными рекомендациями по отысканию аналитического солитонного решения. Однако они показывают, что структура динамического солитона определяется свойствами закона дисперсии линеаризованного уравнения не в меньшей степени, чем видом нелинейных слагаемых в динамических уравнениях.

2. Двумерные нелинейные уравнения

Переходя к анализу двумерной ситуации, изменим соотношение знаков перед второй и четвертой пространственной производной, чтобы подчеркнуть независимость общих выводов от этого соотношения. Кроме того, ориентируясь на нелинейное уравнение Шредингера, обозначим собственное значение (энергию) буквой E :

$$E\Psi + \frac{1}{2}\Delta\Psi - \frac{1}{2}\beta\Delta\Delta\Psi = F(\Psi), \quad (21)$$

где Δ — двумерный оператор Лапласа,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2},$$

а $F(\Psi)$ — регулярная функция Ψ и пространственных производных $\Delta\Psi$ типа

$$F(\Psi) = \alpha|\Psi|^2\Psi + \gamma|\nabla\Psi|^2\Psi + \dots \quad (22)$$

Линеаризованное уравнение описывает элементарные возбуждения изучаемой системы $\Psi = \exp(ikx - iEt)$ с законом дисперсии ($E > 0$)

$$E = \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{2}\beta k^4, \quad (23)$$

график которого изображен на рис. 2,а. Линеаризованное уравнение при положительных значениях E обладает также решениями иного типа: $\Psi(x) = \exp(\pm \kappa x)$, отвечающими чисто мнимым $k = i\kappa$. «Закон дисперсии» таких локализованных решений имеет вид

$$E = \frac{1}{2}\beta\kappa^4 - \frac{1}{2}\kappa^2, \quad (24)$$

его график приведен на рис. 2,б.

Экспоненциально (и монотонно) зависящие от расстояния решения линеаризованного уравнения существуют также в интервале $E_m < E < 0$, где имеется два значения параметра κ :

$$\kappa_{1,2}^2 = \frac{1}{2\beta} (1 \pm \sqrt{1 - 8|E|}). \quad (25)$$

Следуя схеме, предложенной в разд. 1, построим функции Грина линеаризованного уравнения при $E > 0$:

$$G(r) = i\pi H_0^{(1)}(kr) - 2K_0(\kappa r), \quad (26)$$

где $H_0^{(1)}(kr)$, $K_0(\kappa r)$ — стандартные функции Хенкеля вещественного и мнимого аргументов, параметры k и κ определяются соотношениями, аналогичными (5):

$$k^2 = \frac{1}{2\beta} (\sqrt{1 + 8E} - 1), \quad (27)$$

$$\kappa^2 = \frac{1}{2\beta} (\sqrt{1 + 8E} + 1).$$

Асимптотика функции Грина на больших расстояниях описывает расходящуюся цилиндрическую волну и экспоненциально спадающую амплитуду локализованной компоненты. Такое асимптотическое поведение функции Грина означает, что солитон нелинейного уравнения с $E > 0$, как правило, сопровождается излучением. И только при $E < 0$ солитонные решения, если они существуют, не порождают излучения. Например, в интервале $E_m < E < 0$ функция Грина имеет вид

$$G(r) = K_0(\kappa_1 r) - K_0(\kappa_2 r), \quad (28)$$

где определение параметров κ_1 и κ_2 очевидно (см. рис. 2). Следовательно, солитон с подобными E является стабильным по отношению к излучению.

Однако при $E > 0$ также могут существовать стабильные солитоны при дискретных значениях E , определяемых специальными условиями, типа обсужденных в разд. 1 применительно к одномерной ситуации.

Полезно проследить за выводом указанных специальных условий в $2D$ случае. Рассмотрим вынужденное решение линеаризованного уравнения под действием цилиндрически симметричной внешней осциллирующей силы $f(\rho) e^{-iEt}$, сосредоточенной вблизи начала координат в малой области радиусом $r \sim \rho_0 \lesssim 1/(\kappa(E))$, при условии, что E попадает в непрерывный спектр ($E > 0$):

$$E\Psi + \frac{1}{2}\Delta\Psi - \frac{1}{2}\beta\Delta\Delta\Psi = f(\rho). \quad (29)$$

Имея функцию Грина (26), можем сразу записать осциллирующую часть вынужденного решения:

$$\Psi_{\text{osc}} \sim \int H_0^{(1)}[k(r - \rho \cos \theta)] f(\rho) \rho d\rho d\theta. \quad (30)$$

Асимптотика (30) на больших расстояниях ($r\kappa(E) \gg 1$) имеет вид

$$\begin{aligned} \Psi_{\text{osc}} &\sim \frac{e^{ikr}}{2\pi\sqrt{r}} \int f(\rho) \exp(-ik\rho \cos \theta) \rho d\rho d\theta = \\ &= \frac{e^{ikr}}{r} \int_0^\infty f(\rho) J_0(k\rho) \rho d\rho, \end{aligned} \quad (31)$$

где $J_0(k\rho)$ — функция Бесселя нулевого порядка. Очевидно, что осцилляции исчезают при условии

$$\int_0^\infty f(\rho) J_0(k\rho) \rho d\rho = 0. \quad (32)$$

Ясно, что условие (32) может выполняться только при некотором дискретном наборе k (или E).

Допустим теперь, что исходное нелинейное уравнение (21) допускает солитонное решение

$$\Psi_s = \Phi_s(\rho) e^{-iEt}, \quad (33)$$

имеющее E внутри сплошного спектра, но не излучающее линейных расходящихся волн.

Подставим (33) в правую часть уравнения (21). Тогда на больших расстояниях ($\kappa r \gg 1$) с помощью функции Грина можно записать следующее представление:

$$\Phi_s(r) = \int G(r - \rho \cos \theta) F\{\Phi_s(\rho)\} \rho d\rho d\theta. \quad (34)$$

Теперь очевидно, что радиационное поле вдали от солитона исчезнет, если

$$\int_0^\infty F\{\Phi_s(\rho)\} J_0(k\rho) \rho d\rho = 0. \quad (35)$$

Соотношение (35), как и в одномерном случае, может выполняться только для дискретного набора возможных k или E .

К сожалению, нам неизвестно точное аналитическое решение для солитона в какой-либо $2D$ модели, описываемой уравнением типа (21), поэтому мы не можем проиллюстрировать использование соотношения (35), как это было сделано в разд. 1.

3. Трехмерные нелинейные уравнения

После обсуждения двумерной ситуации анализ 3D случая очевиден. Поэтому сформулируем некие выводы, связанные с возможностью существования безызлучательного динамического солитона уравнения типа (21), где Δ – трехмерный лапласиан.

Закон дисперсии линейных колебаний по-прежнему определяется формулой (23), а функция Грина, отвечающая положительным энергиям ($E > 0$), очевидна (она приведена в Приложении работы [2]):

$$G(r) = \frac{1}{4\pi\beta} \frac{e^{ikr} - e^{-kr}}{(k^2 + \kappa^2) r}, \quad (36)$$

где параметры k и κ заданы выражениями (27).

Допустим, что уравнение (21) обладает солитонным решением вида ($E > 0$)

$$\Psi_s = \Phi_s(r)e^{-iEt}, \quad (37)$$

локализованным в объеме с радиусом порядка $1/(\kappa(E))$. Тогда на больших расстояниях ($\kappa r \gg 1$) имеем представление, аналогичное (34), а именно:

$$\Phi_s(r) = \int G(r - \rho \cos \theta) F\{\Phi_s(\rho)\} \sin \theta d\theta d\varphi \rho^2 d\rho. \quad (38)$$

Оставляя только осциллирующую часть функции Грина, получаем условия отсутствия радиационного поля вдали от солитона

$$\int_0^\infty F\{\Phi_s(\rho)\} \frac{\sin(k\rho)}{k\rho} \rho^2 d\rho = 0. \quad (39)$$

Соотношение (39) может выполняться только при некотором избранном дискретном ряде значений величины волнового вектора (или величины E).

В заключение еще раз подчеркнем, что динамические солитоны с частотами (или энергиями E), лежащими внутри непрерывного спектра элементарных возбуждений изучаемой системы, могут существовать только как решения динамических уравнений, эффективно включающих высшую дисперсию в линеаризованную часть уравне-

ний. Слово «эффективно» означает, что формально отдельные ветви закона дисперсии для E могут быть квадратичными, однако изучаемое поле является многокомпонентным (подобно тому, как упругое поле имеет независимые продольные и поперечные компоненты). В этом случае исследуемая система с точки зрения анализируемой проблемы эффективно ведет себя как однокомпонентное поле, но с дополнительным учетом высшей дисперсии.

Автор благодарен М. М. Богдану и А. С. Ковалеву за полезные обсуждения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета по науке и технике Украины (проект № 2.4/163).

1. А. М. Косевич, Б. А. Иванов, А. С. Ковалев, *Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны*, Наукова думка, Киев (1983); А. М. Kosevich, B. A. Ivanov, and A. S. Kovalev, *Sov. Sci. Rev. A, Phys.* **6**, 161 (1985).
2. А. М. Косевич, С. Е. Савотченко, *ФНТ* **25**, 737 (1999).
3. A. V. Buryak and N. N. Akhmediev, *Phys. Rev.* **E52**, 3572 (1995).
4. Alexander V. Buryak, *Phys. Rev.* **E52**, 1156 (1995).
5. J. Yang, B. A. Malomed, and D. J. Kaup, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 1958 (1999).
6. К. А. Горшков, Л. А. Островский, В. В. Папко, *ЖЭТФ* **71**, 586 (1976); K. A. Gorshkov, L. A. Ostrovsky, and V. V. Papko, *Phys. Lett.* **A74**, 177 (1979).
7. K. A. Gorshkov and L. A. Ostrovsky, *Physica* **D3**, 428 (1981).
8. А. М. Косевич, *ЖЭТФ* **115**, 306 (1999).
9. A. Höök and M. Karlsson, *Opt. Lett.* **18**, 1390 (1993).

Properties of dynamic solitons of nonlinear systems which are defined by linearized equation

A. M. Kosevich

The features of dynamical solitons in nonlinear systems of various dimensionality which are described by differential equations with spatial derivatives of the fourth order are discussed. Conditions are formulated under which a radiationless soliton can exist in the case where its inner frequency lies in the continuous spectrum of harmonic vibrations of the system under consideration. These conditions are due to a special form of the dispersion relation of linear vibrations. The parameters of 1D solitons can be found using the conditions formulated.