

Нелинейные рэлеевские волны в среде с моноатомным нелинейным покрытием

А.С. Ковалев, Е.С. Соколова

*Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины
пр. Ленина, 47, г. Харьков, 61103, Украина
E-mail: kovalev@ilt.kharkov.ua*

А.П. Майер

Institut für Theoretische Physik, Universität Regensburg, D-93040, Regensburg, Germany

Ж.А. Можен

Laboratoire de Modélisation en Mécanique, Université Pierre et Marie Curie, 75252, Paris, France

Статья поступила в редакцию 3 марта 2003 г.

Исследована нелинейная динамика поверхностных акустических волн у поверхности линейного упругого полупространства, покрытого монослоем нелинейного материала. Получено одномерное нелинейное интегро-дифференциальное уравнение, описывающее динамику такой системы. В предложенной модели изучены рэлеевские солитоны стационарного профиля. Обсуждаются возможные феноменологические обобщения выведенных уравнений и их точные солитонные решения.

Досліджено нелінійну динаміку поверхневих акустичних хвиль біля поверхні лінійного пружного напівпростору, вкритого моношаром нелінійного матеріалу. Отримано одновимірне нелінійне інтегро-диференціальне рівняння, яке описує динаміку цієї системи. У запропонованій моделі вивчено релєвські солітони стаціонарного профілю. Обговорюються можливі феноменологічні узагальнення виведених рівнянь і їх точні солітонні розв'язки.

PACS: 68.35.-p

Теория нелинейных акустических волн в одномерных атомных цепочках развита достаточно давно [1,2]. Проблема нелинейных акустических поверхностных волн у поверхности ангармонического полупространства намного сложнее вследствие ее двумерного характера [3–12]. Однако эта задача стала особенно актуальной после ряда экспериментов, связанных с распространением нелинейных поверхностных волн [13,14] и акустических поверхностных импульсов высокой интенсивности [15–17]. Большинство экспериментов проведено на образцах, представляющих собой подложку, покрытую пленкой другого материала. Наличие пленочного покрытия очень существенно, поскольку оно приводит к появлению дополнительной сильной дисперсии линейных волн, а конкуренция этой дисперсии с нелинейностью обуславливает существование по-

верхностных стационарных нелинейных волн и поверхностных солитонов стационарного профиля. Аналитическое исследование этих нелинейных волн несколько упрощается в случае, когда подложка может быть рассмотрена в линейном приближении [18]. При этом двумерная задача для подложки может быть решена точно. Важно подчеркнуть, что такая постановка задачи (линейное полупространство с нелинейным покрытием) вполне осуществима экспериментально. Например, в [19] приводятся экспериментальные данные ангармонических поверхностных фононных эффектов в системах с металлической подложкой, покрытой монослоем атомов благородных газов (Ar или Xe). Аналогичная ситуация возникает в случае монослоя благородного газа на поверхности графита.

1. Формулировка модели

Рассмотрим распространение нелинейной поверхностной акустической волны в направлении X вдоль поверхности полупространства ($Z < 0$), покрытого моноатомным слоем. (Смещения не зависят от координаты Y , и задача является эффективно двумерной.) Ограничимся частным случаем, когда нелинейное взаимодействие атомов поверхностного монослоя между собой и с атомами поверхности подложки носит характер центрального взаимодействия. Каждый атом монослоя взаимодействует со своими ближайшими соседями в направлении оси X в монослое, с ближайшим соседом и двумя соседними атомами поверхности подложки (см. рис. 1). Принимая во внимание только первые нелинейные слагаемые в выражении для энергии взаимодействия атомов поверхностной пленки между собой и с атомами подложки, получаем следующее выражение для полной энергии моноатомного покрытия:

$$E = \sum_n \frac{M}{2} \left[\left(\frac{dU_n}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dV_n}{dt} \right)^2 \right] + \sum_n \left\{ \frac{\alpha}{2} \xi_{n,n+1}^2 - \frac{\beta}{3} \xi_{n,n+1}^3 + \frac{\gamma}{2} \eta_n^2 - \frac{\delta}{3} \eta_n^3 + \frac{\lambda}{2} \zeta_{n,n+1}^2 - \frac{\mu}{3} \zeta_{n,n+1}^3 + \frac{\lambda}{2} \zeta_{n,n-1}^2 - \frac{\mu}{3} \zeta_{n,n-1}^3 \right\}, \quad (1)$$

где U_n и V_n — смещения n -го атома монослоя в X - и Z -направлениях;

$$\xi_{n,n+1} = \sqrt{(U_n - U_{n+1} - a)^2 + (V_n - V_{n+1})^2} - a = \tilde{\xi}_{n,n+1} - a$$

— отклонение расстояний между соседями в поверхностной пленке от их значений a в равновесии; M — масса атома монослоя;

$$\eta_n = \sqrt{(U_n - u_n)^2 + (V_n - v_n + a)^2} - a = \tilde{\eta}_n - a$$

и

$$\zeta_{n,n\pm 1} = \sqrt{(U_n - u_{n\pm 1} \mp a)^2 + (V_n - v_{n\pm 1} + a)^2} - a\sqrt{2} = \tilde{\zeta}_{n,n\pm 1} - a\sqrt{2}$$

— отклонения от равновесных расстояний между атомом монослоя и соседними атомами на поверхности подложки (ближайшего и двух соседних соответственно); величины u_n и v_n отвечают смещениям поверхностных атомов в подложке в X - и Z -направлениях; $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu$ — линейные и нелинейные упругие модули. Для простоты полагаем, что межатомные расстояния равны a во всех направ-

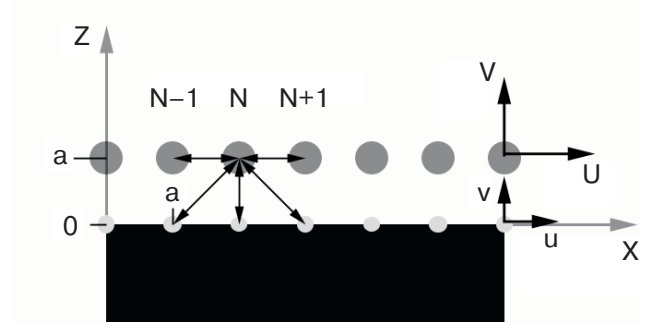


Рис. 1. Геометрия задачи.

лениях. Как будет показано ниже, в основном приближении важно нелинейное взаимодействие только между соседними атомами в покрывающем монослое.

Динамические уравнения для атомов монослоя имеют следующий вид:

$$M \frac{d^2 U_n}{dt^2} + \left\{ \frac{\xi_{n,n+1}}{\tilde{\xi}_{n,n+1}} (U_n - U_{n+1} - a)(\alpha - \beta \xi_{n,n+1}) + \frac{\xi_{n,n-1}}{\tilde{\xi}_{n,n-1}} (U_n - U_{n-1} + a)(\alpha - \beta \xi_{n,n-1}) \right\} + \left\{ \frac{\zeta_{n,n+1}}{\tilde{\zeta}_{n,n+1}} (U_n - u_{n+1} - a)(\lambda - \mu \zeta_{n,n+1}) + \frac{\zeta_{n,n-1}}{\tilde{\zeta}_{n,n-1}} (U_n - u_{n-1} + a)(\lambda - \mu \zeta_{n,n-1}) \right\} + \left\{ \frac{\eta_n}{\tilde{\eta}_n} (U_n - u_n)(\gamma - \delta \eta_n) \right\} = 0; \quad (2)$$

$$M \frac{d^2 V_n}{dt^2} + \left\{ \frac{\xi_{n,n+1}}{\tilde{\xi}_{n,n+1}} (V_n - V_{n+1})(\alpha - \beta \xi_{n,n+1}) + \frac{\xi_{n,n-1}}{\tilde{\xi}_{n,n-1}} (V_n - V_{n-1})(\alpha - \beta \xi_{n,n-1}) \right\} + \left\{ \frac{\zeta_{n,n+1}}{\tilde{\zeta}_{n,n+1}} (V_n - v_{n+1} + a)(\lambda - \mu \zeta_{n,n+1}) + \frac{\zeta_{n,n-1}}{\tilde{\zeta}_{n,n-1}} (V_n - v_{n-1} + a)(\lambda - \mu \zeta_{n,n-1}) \right\} + \left\{ \frac{\eta_n}{\tilde{\eta}_n} (V_n - v_n + a)(\gamma - \delta \eta_n) \right\} = 0. \quad (3)$$

При описании упругих свойств подложки и монослоя ограничимся ниже континуальным приближением. Однако при этом учтем дискретность описания относительных смещений атомов на поверхности подложки и в покрывающем монослое. (Хотя, как будет показано ниже, в основном приближении эти смещения совпадают.) В длинноволновом приближении сохраняем в динамиче-

ческих уравнениях линейные слагаемые с пространственными производными до четвертого порядка и основные нелинейные члены, квадратичные по смещениям среды. В этом приближении уравнения (2), (3) имеют вид

$$\begin{aligned}
 MU_{tt} - \alpha \left(U_{xx} + \frac{1}{12} U_{xxxx} \right) + 2\beta U_x U_{xx} - \alpha V_x V_{xx} = \\
 = \lambda(u - U) - \left(\gamma - \frac{\lambda}{2} + \sqrt{2\mu} \right) (u - U)(v - V) + \\
 + \lambda \left(-v_x + \frac{1}{2} u_{xx} - \frac{1}{6} v_{xxx} + \frac{1}{24} u_{xxxx} \right) + \\
 + \left(\frac{\lambda}{2} - \sqrt{2\mu} \right) u_x v_x + \left(\frac{3\lambda}{2} - \sqrt{2\mu} \right) (u - U) u_x - \\
 - \left(\frac{\lambda}{2} + \sqrt{2\mu} \right) (v - V) v_x - \frac{\mu}{\sqrt{2}} (u_x u_{xx} + v_x v_{xx}); \quad (4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 MV_{tt} - \alpha(V_x U_{xx} + U_x V_{xx}) = (\lambda - \gamma)(v - V) + \\
 + \left(\frac{\lambda}{4} - \frac{\gamma}{2} + \frac{\mu}{\sqrt{2}} \right) (u - U)^2 + \left(\delta - \frac{3\lambda}{4} + \frac{\mu}{\sqrt{2}} \right) (v - V)^2 + \\
 + \lambda \left(-u_x + \frac{1}{2} v_{xx} - \frac{1}{6} u_{xxx} + \frac{1}{24} v_{xxxx} \right) + \\
 + \left(\frac{\lambda}{4} + \frac{\mu}{\sqrt{2}} \right) u_x^2 + \left(-\frac{3\lambda}{4} + \frac{\mu}{\sqrt{2}} \right) v_x^2 - \\
 - \left(\frac{\lambda}{2} + \sqrt{2\mu} \right) (v - V) u_x - \left(\frac{\lambda}{2} + \sqrt{2\mu} \right) (u - U) v_x. \quad (5)
 \end{aligned}$$

Уравнения для смещений атомов покрывающего монослоя должны быть дополнены динамическими уравнениями для смещений в объеме подложки. Для простоты предполагаем, что среда полупространства подложки линейна и изотропна, и соответствующие уравнения движения имеют следующий вид:

$$\rho \mathbf{y}_{tt} = \rho c_t^2 \Delta \mathbf{y} + \rho (c_l^2 - c_t^2) \text{grad div } \mathbf{y}, \quad (6)$$

где $\mathbf{y} = (u, v)$ — смещения в сагиттальной плоскости объема подложки (плоскости XZ); c_l и c_t — продольная и поперечная скорости звука в подложке; ρ — ее плотность. Отличные от нуля компоненты тензора напряжений равны

$$\sigma_{xz} = \rho (c_l^2 - 2c_t^2) u_x + \rho c_l^2 v_z, \quad (7)$$

$$\sigma_{zz} = \rho c_t^2 (u_z + v_x). \quad (8)$$

Правые части уравнений (4), (5) представляют собой силы, действующие на монослой со стороны подложки, которые находятся из выражений (7), (8). Таким образом, система уравнений (4)–(8) полностью описывает поставленную задачу.

2. Вывод эффективных одномерных уравнений динамики рэлеевских волн стационарного профиля

Удобно представить вектор смещения \mathbf{y} как сумму поперечной \mathbf{y}_t и продольной \mathbf{y}_l компонент, каждая из которых для волн стационарного профиля $\mathbf{y} = \mathbf{y}(x - ct, z)$ удовлетворяет двумерному уравнению Лапласа. Пространственные производные всех компонент \mathbf{y}_t и \mathbf{y}_l на поверхности полупространства (в плоскости $Z = 0$) связаны соотношением (см., например, [20])

$$\left. \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial z} \right|_s = \sqrt{1 - \frac{c^2}{b^2}} \hat{H} \left. \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x} \right|_s, \quad (9)$$

где $b = c_l$ и $b = c_t$ для продольных и поперечных компонент соответственно и \hat{H} — интегральный оператор преобразования Гильберта (см. Приложение, ч. 1). Используя очевидные соотношения между компонентами смещений $\partial u^t / \partial x = -\partial v^t / \partial z$, $\partial u^l / \partial z = \partial v^l / \partial x$, легко выразить все компоненты деформации в терминах u_x^l и v_x^t (см. Приложение, ч. 2). Используя эти соотношения в (7), (8), перепишем уравнения (4), (5) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 M(1 - c_f^2/c^2) U_{xx} - \alpha (U_{xxxx}/12 + V_x V_{xx}) + \\
 + 2\beta U_x U_{xx} = 2\rho a^3 c_t^2 [(s^2 - 1)u^l + \kappa_t \hat{H} v^t]_x, \quad (10)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 MV_{xx} - \alpha (U_x V_{xx} + U_{xx} V_x) = \\
 \rho a^3 [(2c_t^2 - c^2)v^t + 2c_t^2 \kappa_l \hat{H} u^l]_x, \quad (11)
 \end{aligned}$$

где u и v — смещения на поверхности подложки (далее считаем, что $a = 1$), $M = Mc^2$, $\kappa_t = \sqrt{1 - c^2/c_t^2}$, $\kappa_l = \sqrt{1 - c^2/c_l^2}$, $s = c^2/2c_t^2$, а $c_f = \sqrt{\alpha/M}$ — скорость звука в монослое. После интегрирования уравнений (10), (11) по x получаем окончательные выражения для смещений u и v на поверхности подложки в терминах смещений атомов покрывающего монослоя:

$$\begin{aligned}
 u = \frac{1}{\varepsilon} \left\{ A [V_x - c_f^2/c^2 U_x V_x] + \right. \\
 \left. + B \hat{H} \left[U_x - \frac{\alpha/2V_x^2 + \beta U_x^2}{M(1 - c_f^2/c^2)} \right] \right\}, \quad (12)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v = \frac{1}{\varepsilon} \left\{ C \left[U_x - \frac{\alpha/2V_x^2 + \beta U_x^2}{M(1 - c_f^2/c^2)} \right] + D \hat{H} \left[V_x - \frac{c_f^2}{c^2 U_x V_x} \right] \right\}, \quad (13)
 \end{aligned}$$

где

$$\varepsilon = (1 - s)^2 - \kappa_t \kappa_l, \quad (14)$$

$$A = -[(1 - s) - \kappa_t \kappa_l]s(M/\rho), \quad C = -A(1 - c_f^2/c^2),$$

$$D = s^2 \kappa_l (M/\rho), \quad B = s^2 \kappa_t (M/\rho)(1 - c_f^2/c^2).$$

Из (14) следует, что

$$AC + BD = \varepsilon s^2 (M/\rho)^2 (1 - c_f^2/c^2) (\kappa_l \kappa_t - 1) \sim \varepsilon.$$

Из определения параметра ε видно, что при слабом отклонении скорости поверхностной волны от таковой для линейной рэлеевской волны в полупространстве без пленочного покрытия этот параметр является малым. Соотношение (14) дает выражение для скорости рэлеевской волны $c = c_R$ в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$. Далее будем рассматривать нелинейные поверхностные волны со скоростями, близкими к скорости Рэля, и при выводе эффективных динамических уравнений воспользуемся величиной ε как малым параметром. Используя соотношения (12), (13) для зависимостей $u = u(U, V)$ и $v = v(U, V)$ в правых частях (4), (5), получаем окончательные замкнутые уравнения для функций $U(x - ct)$ и $V(x - ct)$.

Прежде всего рассмотрим линейные волны Рэля в полупространстве, покрытом монослоем. В длинноволновом пределе в (4), (5) можно ограничиться только линейными членами с наименьшими показателями производных. Тогда из (4), (5) следует связь

$$U \approx u - v_x, \quad V \approx v - \frac{\lambda}{\lambda + \gamma} u_x. \quad (15)$$

После подстановки соотношений (15) в линеаризованные выражения (12), (13) получаем следующую замкнутую систему линейных уравнений для u и v :

$$\varepsilon u - B \hat{H} u_x = A v_x, \quad \varepsilon v - D \hat{H} v_x = C u_x, \quad (16)$$

которая может быть переписана в виде

$$\varepsilon u - (B + D) \hat{H} u_x - B D u_{xx} / (1 - s)^2 = 0. \quad (17)$$

В отсутствие монослоя (при $M = A = B = C = D = 0$) из (17) следует соотношение $\varepsilon = 0$ и из (14) получаем закон дисперсии для бездисперсионных волн Рэля вида $u = u_0 \sin(kx - \omega t)$ с $\omega = ck$, $c = c_R$. В присутствии монослоя дополнительные члены в (17) приводят к появлению дисперсии волн Рэля. В главном приближении дисперсионное соотношение имеет теперь вид

$$\omega \approx c_R k (1 - d \tilde{\beta} |k|), \quad (18)$$

где параметр $\tilde{\beta}$ равен $(s^2/c_R^2)(\kappa_t^{-1} + \kappa_l^{-1})/(\kappa_t^{-2}c_t^{-2} + \kappa_l^{-2}c_l^{-2} - 2(1 - s)^{-1}c_t^{-2})$ и совпадает по своей форме с таковым для полупространства с тонким но не моноатомным пленочным покрытием [18]. Влияние монослоя аналогично влиянию тонкой пленки с эффективной толщиной

$$d = \frac{M}{\rho} \left(1 - \frac{c_f^2}{c_R^2} \frac{\tilde{\kappa}_t}{\tilde{\kappa}_t + \tilde{\kappa}_l} \right), \quad (19)$$

где $\tilde{\kappa}_t = \sqrt{1 - c_R^2/c_t^2}$, $\tilde{\kappa}_l = \sqrt{1 - c_R^2/c_l^2}$ (т.е. $d \sim a(\rho_f/\rho)$).

Как известно, свойства нелинейных волн и солитонов в конкретной динамической системе существенно зависят от дисперсионных свойств линейных волн в ней. В рассматриваемом случае дисперсия линейных волн $D = \partial^2 \omega / \partial k^2$ в длинноволновом пределе $k \rightarrow 0$ остается конечной: $D \rightarrow -2c_R d \tilde{\beta}$, т.е. рэлеевские волны в системе с пленочным покрытием являются сильно диспергирующими. При этом очень важным становится вопрос о характере нелинейных слагаемых в динамических уравнениях.

Вернемся к нелинейным поверхностным волнам в полупространстве, покрытом монослоем материала с нелинейными свойствами. Чтобы получить эффективное одномерное динамическое уравнение для этих волн, воспользуемся малостью параметра ε и введем «медленную» координату $r = \varepsilon(x - ct)$, где c — скорость перемещения центра солитона (близкая к скорости линейной волны Рэля в полупространстве без покрывающего слоя). Тогда для новых переменных $p = u_x$, $q = v_x$, $P = U_x$ и $Q = V_x$ соотношения (12), (13) в основном приближении по малому параметру ε могут быть переписаны в форме:

$$p = \frac{\partial}{\partial r} \left\{ A Q + B \hat{H} P - A \frac{c_f^2}{c^2} P Q - \frac{B}{2} \frac{1}{c^2/c_f^2 - 1} \hat{H} \left(Q^2 - \frac{2\beta}{\alpha} P^2 \right) \right\}, \quad (20)$$

$$q = \frac{\partial}{\partial r} \left\{ C P + D \hat{H} Q - D \frac{c_f^2}{c^2} \hat{H} P Q - \frac{C}{2} \frac{1}{c^2/c_f^2 - 1} \left(Q^2 - \frac{2\beta}{\alpha} P^2 \right) \right\}, \quad (21)$$

в том же главном приближении по малому параметру ε из (4), (5) и (15) следует, что

$$q = Q + O(\varepsilon), \quad p = P + O(\varepsilon), \quad (22)$$

и можно подставить $q = Q, p = P$ в (20), (21), чтобы получить конечные замкнутые уравнения для пере-

менных P и Q . Поскольку ранее показано, что $BD + CA \sim O(\epsilon)$, в главном приближении по ϵ из (20), (21) следует выражение для связи между двумя компонентами деформации в монослое P и Q :

$$Q = -(C/B)\hat{H}P. \quad (23)$$

Воспользовавшись (23), находим окончательное уравнение для $P = P(r)$:

$$P - \eta \frac{\partial}{\partial r} \hat{H}P - \psi \frac{\partial}{\partial r} \hat{H}P^2 = 0, \quad (24)$$

где

$$\eta = (M/\rho)s^2[\tilde{\kappa}_t(1 - c_f^2/c_R^2) + \tilde{\kappa}_l],$$

$$\psi = (M/2\rho)(c_f^2s^2/c_R^2)(2\beta/\alpha\tilde{\kappa}_t + \tilde{\kappa}_l).$$

В исходных переменных это уравнение преобразуется следующим образом:

$$\epsilon U - \eta \hat{H}U_x - \psi \hat{H}U_x^2 = 0. \quad (25)$$

Уравнение (25) имеет структуру, подобную полученной в работе [18] для упругого полупространства с идеальной границей, в котором нелинейные свойства убывают с ростом расстояния от поверхности. Поскольку экспериментально обычно измеряется другая компонента деформации поверхности — $Q = \partial V/\partial x$, перепишем уравнение (24) в ее терминах:

$$Q - \eta \frac{\partial}{\partial r} \hat{H}Q - \psi \frac{B}{C} \frac{\partial}{\partial r} (\hat{H}Q)^2 = 0. \quad (26)$$

Просто сделать следующий шаг в процедуре приближения по малому параметру ϵ и найти поправки порядка ϵ к η . Но важно указать, что структура уравнений (2)–(26) при этом не изменяется и в этом приближении в уравнениях не появляются дополнительные нелинейные слагаемые другого типа.

3. Уравнения для медленно изменяющихся во времени нелинейных рэлеевских волн

До настоящего времени мы обсуждали только нелинейные поверхностные волны стационарного профиля. Теперь обобщим уравнение (24) на случай нелинейных рэлеевских волн с медленно изменяющимся профилем и введем дополнительную зависимость смещений от «медленного времени» $\tau = \xi t$ ($\xi = (c - c_R)/c_R \ll 1$) в системе отсчета, движущейся со скоростью $c = c_R$: $\mathbf{y} = \mathbf{y}(x - c_R t, z, \tau)$. Новый малый параметр ξ связан с введенным ранее малым параметром ϵ следующим образом: $\xi = \epsilon/[2(1 - \tilde{s})/c_t^2 - \tilde{\kappa}_l/(\tilde{\kappa}_t c_t^2) - \tilde{\kappa}_t/(\tilde{\kappa}_l c_l^2)]c_R^2$, $\tilde{s} = c_R^2/(2c_t^2)$. В главном приближении по малому

параметру ξ уравнения Лапласа для поперечных и продольных компонент смещений заменяются следующими уравнениями:

$$(1 - c_R^2/b^2)\mathbf{y}_{xx} + \mathbf{y}_{zz} = -\xi(2c_R/b^2)\mathbf{y}_{x\tau}, \quad (27)$$

где, как и выше, $b = c_l$ для $\mathbf{y} = \mathbf{y}_l$ и $b = c_t$ для $\mathbf{y} = \mathbf{y}_t$. Из (27) между различными компонентами деформации на поверхности следует связь, которая обобщает выражение (9):

$$\left. \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial z} \right|_s - \sqrt{1 - \frac{c_R^2}{b^2}} \hat{H} \left. \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x} \right|_s \approx \xi \frac{c_R}{b\sqrt{b^2 - c_R^2}} \hat{H} \left. \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \tau} \right|_s. \quad (28)$$

Используя соотношения $\partial u^t/\partial x = -\partial v^t/\partial z$, $\partial u^l/\partial z = \partial v^l/\partial x$, возможно, предварительно продифференцировав граничные условия (7), (8) по координате x , выразить все компоненты деформации в правых частях (7), (8) в терминах u_x^l и v_x^t (см. Приложение, ч. 3):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xz} = 2\rho \left[c_t^2(1 - \tilde{s})v_{xx}^t + c_t^2 \tilde{\kappa}_l \hat{H}u_{xx}^l + \right. \\ \left. + \xi c_R \left(\frac{c_t^2}{c_l^2 \tilde{\kappa}_l} \hat{H}u_{x\tau}^l + v_{x\tau}^t \right) \right], \quad (29) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \sigma_{zz} = 2\rho \left[-c_t^2(1 - \tilde{s})u_{xx}^l + c_t^2 \tilde{\kappa}_t \hat{H}v_{xx}^t + \right. \\ \left. + \xi c_R \left(\frac{1}{\tilde{\kappa}_l} \hat{H}v_{x\tau}^t - u_{x\tau}^l \right) \right]. \quad (30) \end{aligned}$$

Проделав вычисления, аналогичные предыдущим, и используя соотношения (15), можно выразить компоненты смещений u_x^l, v_x^t через смещения атомов монослоя:

$$\begin{aligned} v_x^t = c_t^2 c_l^2 \tilde{\kappa}_l \tilde{\kappa}_t \theta [(-\tilde{\kappa}_l + \tilde{\kappa}_l^2 \tilde{\kappa}_t) \hat{H}U_x + (1 - \tilde{\kappa}_l \tilde{\kappa}_t) V_x] + \\ + \xi c_R \theta \{ -(c_l^2 - c_t^2) \tilde{\kappa}_l + c_t^2 \tilde{\kappa}_t \} \hat{H}U_\tau + (c_l^2 + c_t^2 - 2c_R^2) V_\tau \}, \quad (31) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_x^l = c_t^2 c_l^2 \tilde{\kappa}_l \tilde{\kappa}_t \theta [(\tilde{\kappa}_t - \tilde{\kappa}_l \tilde{\kappa}_t^2) \hat{H}V_x + (1 - \tilde{\kappa}_l \tilde{\kappa}_t) U_x] + \\ + \xi c_R \theta \{ (c_t^2 - c_R^2) \tilde{\kappa}_t + c_l^2 \tilde{\kappa}_l \} \hat{H}V_\tau + (c_l^2 + c_t^2 - 2c_R^2) U_\tau \}, \quad (32) \end{aligned}$$

где $1/\theta = \tilde{\kappa}_l \tilde{\kappa}_t c_t^2 c_l^2 (1 - \tilde{\kappa}_l \tilde{\kappa}_t)^2$, что позволяет получить замкнутую систему уравнений, которая после введения переменной $\varphi = x\sqrt{\xi}$ и использования обозначений P и Q выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \sqrt{\xi} [M c_R^2 Q_{\varphi\varphi} - \alpha(PQ)_{\varphi\varphi} - \tilde{d}P_\tau - \tilde{e}\hat{H}Q_\tau] = \\ = -\tilde{a}P_\varphi + \tilde{b}\hat{H}Q_\varphi, \quad (33) \end{aligned}$$

$$\sqrt{\xi} \left[(Mc_R^2 - \alpha) P_{\varphi\varphi} - \frac{\alpha}{2} (Q^2)_{\varphi\varphi} + \beta (P^2)_{\varphi\varphi} - \tilde{g} P_\tau + \tilde{d} \hat{H} Q_\tau \right] = \tilde{c} \hat{H} P_\varphi + \tilde{a} Q_\varphi, \quad (34)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{a} &= (1 - s - \tilde{\kappa}_l \tilde{\kappa}_t) 2c_t^2 \tilde{\theta} \rho, & \tilde{b} &= c_R^2 \tilde{\kappa}_t \tilde{\theta} \rho, \\ \tilde{c} &= \tilde{b} \tilde{\kappa}_l / \tilde{\kappa}_t, & \tilde{d} &= (\tilde{\kappa}_t - \tilde{\kappa}_l)^2 c_l^2 c_t^2 \theta \rho c_R, \\ \tilde{e} &= [(3c_R^2 - 2c_t^2) c_l^2 \tilde{\kappa}_l + (2c_l^2 - c_R^2) c_t^2 \tilde{\kappa}_l^3] \theta \rho c_R, \\ \tilde{g} &= [(3c_R^2 - 2c_l^2) c_t^2 \tilde{\kappa}_t + (2c_t^2 - c_R^2) c_l^2 \tilde{\kappa}_l^3] \theta \rho c_R, \\ 1/\tilde{\theta} &= 1 - \kappa_l \kappa_t, \end{aligned}$$

причем $\tilde{a}^2 - \tilde{c}\tilde{b} = 0$. С учетом этих соотношений получаем связь между компонентами деформаций поверхностного слоя, аналогичную полученной выше: $Q = -(\tilde{a}/\tilde{b})\hat{H}P$.

Окончательное уравнение, обобщающее уравнение (24) для случая медленно эволюционирующих нелинейных волн, близких к рэлеевским, имеет вид

$$P_\tau - \eta \frac{\partial^2}{\partial m^2} \hat{H}P - \psi \frac{\partial}{\partial m} \hat{H}(PP_m) = 0, \quad (35)$$

где параметры η и ψ определены выше, а $m = x[-\xi(2\tilde{a}\tilde{d} + \tilde{b}\tilde{g} + \tilde{c}\tilde{e})/(\tilde{\theta}\rho(2c_t^2)^2)]^{1/2}$. Из уравнения (35) очевидно, что если зависимость от $(x - c_R t, \tau)$ искать в стационарном виде $f(x - c_R t, \tau) = f(x - c_R t - c_R \tau) = f(x - ct)$, то в результате приходим к уравнению (24).

Вывод уравнения (35) является основным результатом данной статьи.

4. Солитонные решения для нелинейных рэлеевских волн

В разд. 3 нами получен явный вид нелинейных слагаемых в одномерных эволюционных уравнениях, описывающих динамику нелинейных рэлеевских волн в полупространстве с моноатомным покрытием (последние слагаемые в уравнениях (24) и (35)). Как видно из уравнения (35), возникающая нелинейность весьма слаба: она квадратична по амплитуде поля и содержит такое же число пространственных производных, что и линейное дисперсионное слагаемое в этом уравнении. Обычно в «нелинейной физике» существование локализованных солитонных возмущений обусловлено конкуренцией нелинейности и дисперсии волн. В данном случае сильная дисперсия (количество пространственных производных в дисперсионном слагаемом — втором в уравнении (35)) не может быть скомпенсиро-

рована влиянием нелинейности. (Нелинейное слагаемое содержит такое же число пространственных производных.) Поэтому в общем случае уравнения (24) и (35), по-видимому, не имеют стационарных солитонных решений либо эти решения обладают такими большими градиентами, что их описание в рамках длинноволнового приближения неоправданно. Однако ситуация может измениться в частном случае, когда величина параметра η в главном дисперсионном слагаемом аномально мала. Это может иметь место при некоторых определенных соотношениях параметров полупространства подложки и покрывающего его монослоя: должно выполняться неравенство:

$$s^2(M/\rho)(\kappa_l + \kappa_t(1 - c_f^2/c^2)) \ll 1. \quad (36)$$

Поскольку все входящие в это соотношение параметры порядка единицы, то выполнение указанного неравенства в принципе возможно. В этом случае основной дисперсионный член в эволюционных уравнениях, обусловленный наличием поверхностного адсорбированного слоя, становится аномально малым и необходимо учитывать дополнительную слабую дисперсию, возникающую в следующем порядке теории возмущения по малому параметру ε . При этом соотношения (22) должны быть записаны с большей точностью:

$$q = Q - \varepsilon \frac{\lambda}{\lambda + \gamma} P_r + O(\varepsilon^2), \quad p = P - \varepsilon Q_r + O(\varepsilon^2). \quad (37)$$

В результате соотношение (23) между различными компонентами деформации станет более сложным:

$$Q = -(C/B)\hat{H}P - \varepsilon LP_r + \varepsilon N\hat{H}(P\hat{H}P)_r, \quad (38)$$

$$L = -\lambda/(\lambda + \gamma) - (C + K)/B^2, \quad N = CKc_f^2/(B^2c_R^2),$$

$$K = (M/2\rho)^2 (c_R/c_t)^4 (1 - c_f^2/c_R^2) (\tilde{\kappa}_t \tilde{\kappa}_l - 1).$$

При этом уравнение (24) модифицируется и приобретает следующий окончательный вид:

$$P - \tilde{\eta} \frac{\partial}{\partial r} \hat{H}P - \varepsilon LD \frac{B}{C} \frac{\partial^2}{\partial r^2} P - \psi \frac{\partial}{\partial r} \hat{H}P^2 = 0, \quad (39)$$

где $\tilde{\eta} = \eta - \varepsilon(C + K)/B$. Подобное уравнение обсуждалось в работе [18], но вывод уравнения с помощью некоторой асимптотической процедуры требовал определенного соотношения между малым параметром разложения (фактически амплитудой волны) и толщиной пленки, покрывающей поверхность кристалла. В предложенной модели вывод уравнений динамики свободен от этого недостатка и является точным на теорфизическом уровне.

Вернемся к рассмотрению слабо диспергирующей системы, когда параметр $\tilde{\eta}$ в уравнении (39) аномально мал и может быть опущен. При этом уравнение (39) в безразмерном виде приобретает следующую форму:

$$W - W_{\zeta\zeta} - \hat{H}(W^2)_{\zeta} = 0, \quad (40)$$

где $W = P\sqrt{C\Psi/LDB}/\sqrt{\varepsilon}$ и $\zeta = \sqrt{\varepsilon}\sqrt{C/LDB}(x - ct)$. В этом уравнении нелинейное и дисперсионное слагаемые уже могут скомпенсировать друг друга и возникает возможность существования рэлеевских солитонов стационарного профиля. К сожалению, такие решения не удалось найти в аналитическом виде. Однако из вида уравнения (40) сразу же следуют некоторые необычные свойства этих солитонов. Проинтегрировав уравнение (40) по ζ в бесконечных пределах и предположив нулевые условия для деформации на бесконечности, находим, что полная продольная деформация в рэлеевском солитоне должна быть нулевой:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx P(x) = 0,$$

и, следовательно, профиль солитона должен быть знакопеременным. Действительно, полученное нами численное решение уравнения (40) для такого солитона имеет вид «мексиканской шляпы» (см. рис. 2.) Необходимо заметить, что фактически численный расчет проведен для нелинейной периодической волны Рэля, состоящей из цуга рэлеевских солитонов. Однако с ростом периода l этой волны она действительно превращалась в периодическую структуру разнесенных на большое расстояние и сильно локализованных солитонов. На рис. 2 изображено решение уравнения (40) для нелинейной рэлеевской волны с длиной $l = 2\pi/\sqrt{0,15} \approx 16$. При этом ширина отдельного солитона Δ (расстояние между минимумами профиля солитона) была примерно в 10 раз меньше периода волны.

Возможные феноменологические обобщения уравнения (39), допускающие аналитические решения для рэлеевских солитонов, обсуждены в Приложении, ч. 4.

Приложение

1. Преобразование Гильберта определяется следующим образом:

$$\hat{H}f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x'-x} f(x') \quad (П.1)$$

и обладает такими используемыми нами в статье свойствами:

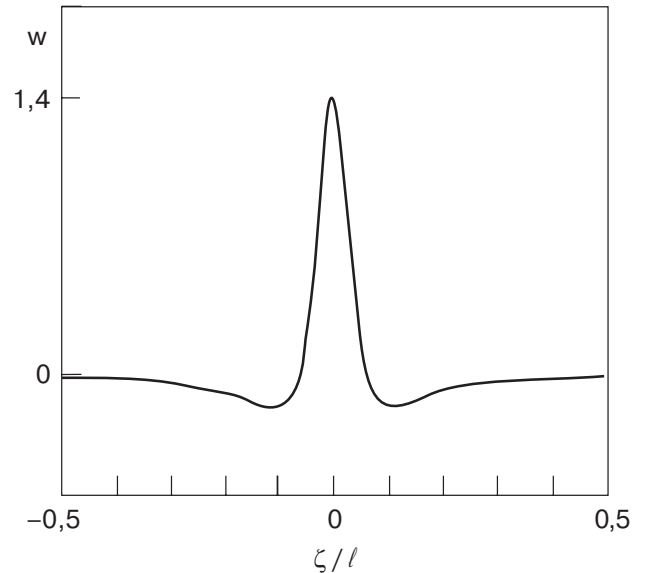


Рис. 2. Численное решение уравнения (40) для одного периода профиля нелинейной рэлеевской волны с длиной волны $l \approx 16$.

$$\hat{H}\hat{H}f(x) = -f(x), \quad (П.2)$$

$$\hat{H}(fg) = f\hat{H}g + g\hat{H}f + \hat{H}((\hat{H}f)(\hat{H}g)). \quad (П.3)$$

2. Связь различных компонент деформации на поверхности линейного изотропного полупространства:

$$\begin{aligned} u_x^t &= -\kappa_t \hat{H}v_x^t, & u_z^l &= -\kappa_l \hat{H}u_x^l, & u_z^t &= \kappa_t^2 v_x^t, \\ v_x^l &= \kappa_l \hat{H}u_x^l, & v_z^l &= -\kappa_l^2 u_x^l, & v_z^t &= \kappa_t \hat{H}v_x^t. \end{aligned} \quad (П.4)$$

3. Связь компонент деформации для медленно изменяющихся волн:

$$\begin{aligned} u_x^t &= -\tilde{\kappa}_t \hat{H}v_x^t - \xi \frac{c_R}{c_t^2 \tilde{\kappa}_t} \hat{H}v_\tau^t, \\ u_z^l &= \tilde{\kappa}_l \hat{H}u_x^l + \xi \frac{c_R}{c_l^2 \tilde{\kappa}_l} \hat{H}u_\tau^l, \\ u_z^t &= \tilde{\kappa}_t^2 v_x^t + 2\xi \frac{c_R}{c_t^2} v_\tau^t, \\ v_x^l &= \tilde{\kappa}_l \hat{H}u_x^l + \xi \frac{c_R}{c_l^2 \tilde{\kappa}_l} \hat{H}u_\tau^l, & v_z^l &= -\tilde{\kappa}_l^2 u_x^l - 2\xi \frac{c_R}{c_l^2} u_\tau^l, \\ v_z^t &= \tilde{\kappa}_t \hat{H}v_x^t + \xi \frac{c_R}{c_t^2 \tilde{\kappa}_t} \hat{H}v_\tau^t. \end{aligned} \quad (П.5)$$

4. Вернемся к уравнению (24), строго выведенному нами в основном приближении по малому параметру ε , и перепишем его в безразмерном виде:

$$F - \hat{H}F_\chi - \hat{H}(FF_\chi) = 0, \quad (П.6)$$

введем новую полевую переменную $F = 2\psi P/\eta$ и координату $\chi = r/\eta$. Можно поставить вопрос о возможных обобщениях этого уравнения. Линейное дисперсионное слагаемое представляет единственную возможную комбинацию, линейную по полевой переменной и содержащую одну пространственную производную и одно преобразование Гильберта. Однако независимые нелинейные слагаемые, квадратичные по полевой переменной и содержащие одно преобразование Гильберта и одну пространственную производную, возможны, в принципе, трех типов. Используя соотношения (П.2) и (П.3), легко показать, что независимыми являются следующие комбинации: $\hat{H}(FF_\chi)$, $F\hat{H}F_\chi$ и $F_\chi\hat{H}F$. Поэтому в качестве феноменологического уравнения, обобщающего уравнение (П.6), предлагаем рассмотреть уравнение, содержащее все три возможных типа нелокальных нелинейных слагаемых, поскольку такое рассмотрение приводит к интересным математическим результатам. Мы надеемся, что в других физических постановках задачи такие уравнения также могут возникнуть. Обобщенное феноменологическое уравнение будет иметь вид

$$F - \hat{H}F_\chi - \alpha_1 F_\chi \hat{H}F - \alpha_2 F \hat{H}F_\chi - \alpha_3 \hat{H}(FF_\chi) = 0, \quad (\text{П.7})$$

где α_i — произвольные константы. Это уравнение выглядит существенно сложнее уравнения (П.6), однако при некоторых определенных соотношениях между параметрами α_i оно допускает точные аналитические решения для поверхностных солитонов.

Прежде всего рассмотрим случай $\alpha_3 = 0, \alpha_1 = -\alpha_2$. (Перенормируя амплитуду решения, можно положить $\alpha_1 = -\alpha_2 = 1$.) При этом получающееся уравнение

$$F - \hat{H}F_\chi - F_\chi \hat{H}F + F \hat{H}F_\chi = 0 \quad (\text{П.8})$$

имеет точное солитонное решение

$$F = \frac{2}{1 + \chi^2}, \quad (\text{П.9})$$

имеющее вид известного решения уравнения Бенджамина—Оно для нелинейных волн на поверхности бесконечно глубокой жидкости [21]. Заметим, что в этом решении, в отличие от приведенного на рис. 2, деформация всюду положительна и полная деформация в кристалле отлична от нуля. Несложно найти и обобщение решения (П.9) для периодического цуга солитонов:

$$F = \frac{1 - b^2}{1 - b \cos(\chi/\tilde{l})}, \quad (\text{П.10})$$

где $\tilde{l} = b^2/\sqrt{1 - b^2}$ и $b \leq 1$.

Более интересен случай, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = -\alpha_3/2$ и возникает уравнение

$$F - \hat{H}F_\chi - F_\chi \hat{H}F - F \hat{H}F_\chi + 2\hat{H}(FF_\chi) = 0, \quad (\text{П.11})$$

которое так же имеет точные солитонные решения, причем бесконечный набор таких решений. Первое и наиболее простое солитонное решение уравнения (П.11) имеет вид

$$F = \frac{8}{(1 + \chi^2)^2} - \frac{4}{1 + \chi^2}. \quad (\text{П.12})$$

Это решение имеет качественно такой же вид, что и решение выведенного выше уравнения (40), изображенного на рис. 2, и полная деформация, соответствующая этому решению, также строго равна нулю. Однако в данном случае солитон не имеет такого узкого профиля, как решение уравнения (40).

Наиболее интересным обстоятельством является наличие других более сложных решений уравнения (П.11) для поверхностных рэлеевских солитонов. Например, следующие по степени сложности решения (П.11) имеют вид

$$F^{(2,3)} = \lambda_1^{(1,2)} \left\{ \frac{2\beta^{(1,2)2}}{(\chi^2 + \beta^{(1,2)2})^2} - \frac{1}{\chi^2 + \beta^{(1,2)2}} \right\} + \lambda_2^{(1,2)} \left\{ \frac{8\beta^{(1,2)3}}{(\chi^2 + \beta^{(1,2)2})^3} - \frac{6\beta^{(1,2)}}{(\chi^2 + \beta^{(1,2)2})^2} \right\} \quad (\text{П.13})$$

с $\lambda_1^{(1)} = 3(3 + \sqrt{3})$, $\lambda_2^{(1)} = 3(3 + 2\sqrt{3})$, $\beta^{(1)} = (3 + \sqrt{3})/2$ для решения $F^{(2)}$ и $\lambda_1^{(2)} = 3(3 - \sqrt{3})$, $\lambda_2^{(2)} = 3(3 - 2\sqrt{3})$, $\beta^{(2)} = (3 - \sqrt{3})/2$ для решения $F^{(3)}$. Если решение $F^{(2)}$ имеет профиль, аналогичный профилю решения (П.12), то решение $F^{(3)}$ имеет уже профиль с двумя большими максимумами и тремя минимумами. Профили решений для F , $F^{(2)}$ и $F^{(3)}$ приведены на рис. 3.

Более сложные солитонные решения могут быть записаны в едином виде

$$F^{(N)}(\chi) = \sum_{n=1}^N \lambda_n^{(N)} \left(-\hat{H} \frac{d}{d\chi} \right)^n \frac{\beta^{(N)}}{\chi^2 + \beta^{(N)2}}, \quad (\text{П.14})$$

где параметры $\lambda_n^{(N)}$ и $\beta^{(N)}$ для каждого N находятся как решения системы алгебраических уравнений. Конечно, при больших N эти решения могут быть найдены лишь численно, но с произвольной точностью. При этом решения (П.11) с этой точностью являются строгими. Возможно, эволюционный аналог уравнения (П.11) с временной пространственной производной вместо первого слагаемого и с дополнительным дифференцированием всех остальных слагаемых по координате является точно интегрируемым.

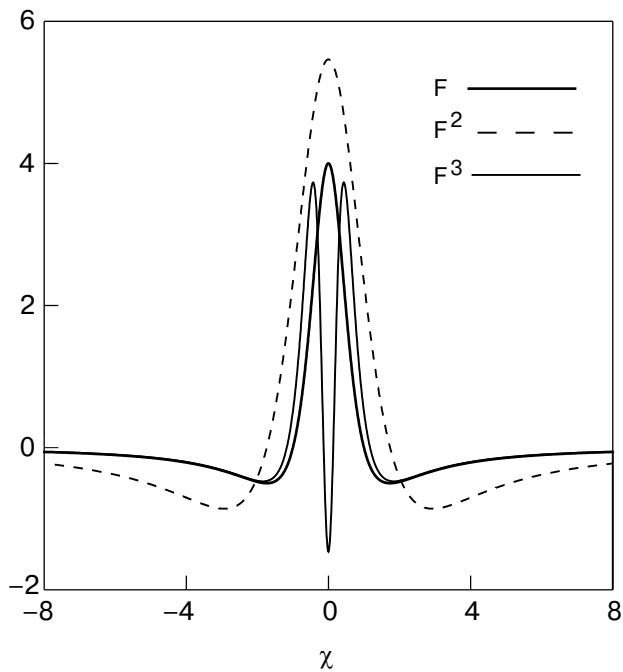


Рис. 3. Профили солитонных решений (П.12) (F) и (П.13) ($F^{(2)}$ и $F^{(3)}$).

Работа выполнена при поддержке проекта INTAS-99 (грант № 167).

1. A.D. Navaco, *Phys. Rev.* **B19**, 6493 (1979); *ibid.* **B46**, 8178 (1992).
2. T.M. Hakim, M.F. Bertino, F. Hofmann, J.P. Toennies, and Ch. Woll, *J. Chem. Phys.* **106**, 6194 (1997); *ibid.* **107**, 4445 (1997).
3. D.F. Parker and F.M. Talbot, *J. Elast.* **15**, 389 (1985).
4. M.F. Hamilton, Yu.A. Il'insky, and E.A. Zabolotskaya, *J. Acoust. Soc. Am.* **93**, 3089 (1993).
5. D. Bonart, A.P. Mayer, and V.G. Mozhaev, *Il Vuoto, Scienza e Tecnologia* **3/96**, 21 (1996).
6. J.K. Hunter, *Contemp. Math.* **100**, 185 (1989).
7. V.G. Mozhaev, *Phys. Lett.* **A139**, 333 (1989).
8. H. Hadouaj and G.A. Maugin, *C. R. Acad. Sci. Paris* **2-309**, 1877 (1989); *J. Phys. (Paris)*, suppl. **51**, C2-57 (1989); *Wave Motion* **16**, 115 (1992).

9. A.S. Kovalev and E.S. Syrkin, *Surf. Sci.* **346**, 337 (1996).
10. А.С. Ковалев, Е.С. Сыркин, Ж.А. Можен, *ФНТ* **28**, 635 (2002).
11. C. Eckl, A.P. Mayer, and A.S. Kovalev, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 983 (1998).
12. V.E. Gusev, W. Lauriks, and J. Thoen, *Phys. Rev.* **B55**, 9344 (1997).
13. V.I. Nayanov, *JETP Lett.* **44**, 314 (1986).
14. V. Kavalerov, T. Fujii, and M. Inoue, *J. Appl. Phys.* **87**, 907 (2000).
15. A.I. Kolomenskii, A.M. Lomonosov, R. Kischnerreit, P. Hess, and V.E. Gusev, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 1325 (1997).
16. A.M. Lomonosov and P. Hess, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 3876 (1999).
17. A.M. Lomonosov, P. Hess, and A.P. Mayer, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 076104 (2002).
18. A.S. Kovalev, A.P. Mayer, C. Eckl, and G.A. Maugin, *Phys. Rev.* **E66**, 036615 (2002).
19. L.W. Bruch and A.D. Novaco, *Phys. Rev.* **B61**, 5786 (2000).
20. H.D. Greenberg, *Application of Green's Functions in Science and Engineering*, New Jersey (1971).
21. H. Ono, *J. Phys. Soc. Jpn.* **39**, 1082 (1975).

Nonlinear Rayleigh waves in half space covered with atomic monolayer

A.S. Kovalev, E.S. Sokolova,
A.P. Mayer, and G.A. Maugin

The nonlinear dynamics of surface acoustic waves near the surface of linear elastic half space coated with a nonlinear material monolayer is investigated. A nonlinear one-dimensional integro-differential equation, which describes the dynamics of this system, is derived. Rayleigh stationary shape solitons are studied in the framework of the proposed model. Possible phenomenological generalizations of the derived equations and their exact soliton solutions are discussed.