

Одномерная модель вихря в легкоплоскостном ферромагнетике

А.С. Ковалев, Я.Е. Прилепский

*Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина НАН Украины
пр. Ленина, 47, г. Харьков, 61103, Украина
E-mail: kovalev@ilt.kharkov.ua*

Статья поступила в редакцию 14 августа 2002 г.

Для качественного описания структуры и динамики вихря в двумерных магнитных системах предложена простая одномерная модель ферромагнетика в вихревой конфигурации. Модель описывает систему из четырех параллельных спиновых цепочек с одноионной анизотропией типа плоскость легкого намагничивания и включает в себя элементы континуального (вдоль цепочек) и дискретного (перпендикулярно цепочкам) описания. Проведено аналитическое исследование статических вихрей и движущихся вихревых решений стационарного профиля. Аналитические результаты расчета статической структуры вихрей дополнены численным анализом для аналогичных дискретных систем и находятся в хорошем соответствии с численными данными. Подход обобщен на случай описания гиротропного движения вихрей стационарного профиля в рамках метода коллективных переменных для комбинированного континуально-дискретного описания. Проведены анализ и сравнение полученных результатов с данными для двумерных магнетиков.

Для якісного опису структури і динаміки вихору у двовимірних магнітних системах запропоновано просту одновимірну модель ферромагнетика у вихровій конфігурації. Модель описує систему з чотирьох паралельних спинових ланцюжків з одноіонною анізотропією типу площина легкого намагнічування і містить у собі елементи континуального (уздовж ланцюжків) і дискретного (перпендикулярно ланцюжкам) опису. Проведено аналітичне дослідження статичних вихорів і вихрових рішень стаціонарного профілю, що рухаються. Аналітичні результати розрахунку статичної структури вихорів доповнені чисельним аналізом для аналогічних дискретних систем та знаходяться в гарній відповідності з чисельними даними. Підхід узагальнено на випадок опису гіротропного руху вихорів стаціонарного профілю у рамках методу колективних змінних для комбінованого континуально-дискретного опису. Проведено аналіз та порівняння отриманих результатів з даними для двовимірних магнетиків.

PACS: 05.45.Yv, 75.10.Nk, 75.70.Kw

Введение

Исследования структуры и динамики магнитных вихрей в двумерных ферромагнетиках с анизотропией типа плоскость легкого намагничивания в последнее время привлекли значительное внимание, поскольку магнитный фазовый переход в подобных системах происходит в соответствии с механизмом Березинского – Костерлица – Таулесса и сопровождается образованием большого количества вихрей [1]. С другой стороны, к настоящему времени получено значительное число двумерных и квазидвумерных соединений (ссылки и краткий обзор содержат-

ся в работе [2]), и, таким образом, их исследование является предметом повышенного интереса. В самые последние годы одной из наиболее интересных областей физики магнитных явлений стало экспериментальное изучение магнитных нанодотов [3,4] и двумерных искусственных решеток из таких элементов [5], которые могут стать элементарной базой для новых технологических устройств. При определенных соотношениях поперечных размеров и толщины магнитных дотов в них экспериментально наблюдаются магнитные вихри. Однако теоретическое исследование двумерных магнитных вихрей пред-

ставляет собой довольно сложную задачу. Хотя структура вихрей, их движение и внутренняя динамика были исследованы достаточно подробно в ряде работ (см., например, [2,6–9]), большинство результатов получены в рамках метода коллективных переменных (МКП) или с помощью непосредственного численного интегрирования уравнений спиновой динамики решетки. В то же время, при подобном подходе может быть потеряна важная информация, касающаяся зависимости динамических и структурных свойств вихрей от параметров системы, и поэтому модели, допускающие аналитическое рассмотрение, весьма важны для качественного понимания и объяснения результатов экспериментальных и численных исследований.

Простейшие модели подобного рода описывают малые фрагменты спиновой решетки — спиновые плакетки [10]. В последнее время теоретическое изучение спиновых плакеток приобрело дополнительное значение в связи с экспериментальным исследованием новых объектов физики магнетиков — магнитных молекул [11]. Точное аналитическое рассмотрение спиновых плакеток [10] дает достаточно ясное объяснение явлениям, связанным с внутренними модами подобных систем в вихревой конфигурации. Однако, из-за малого размера плакеток, в рамках подобных моделей нельзя рассмотреть движение вихря.

В настоящей работе предложена одномерная модель для описания вихревых свойств в анизотропном легкоплоскостном гейзенберговском ферромагнетике. Такая модель допускает решения вихревого типа и позволяет получить результаты, качественно объясняющие особенности динамики вихря в двумерной магнитной системе. Как известно, впервые одномерная модель двумерных топологических дефектов была предложена Френкелем и Конторовой [12] для описания дислокаций в кристаллической решетке. Несмотря на свой одномерный характер, эта модель достаточно адекватно описывает структуру кора дислокации и ее динамику и успешно используется на протяжении более 60 лет [13]. Позже похожая $1D$ модель была предложена для описания сложных магнитоструктурных топологических дефектов в работе [14]. В нашем случае изучение предложенной $1D$ модели имеет и важное методическое значение: она является одновременно континуальной и дискретной в зависимости от направления, и поэтому появляется возможность исследовать влияние дискретности системы на топологические

характеристики дефектов (их «топологические заряды»).

Основные особенности предложенной модели и уравнения динамики намагниченности описаны в разд. 2. Раздел 3 посвящен анализу статического плоскостного вихревого решения (ПВ) в рамках данной модели: выведены аналитические выражения для распределения спинов в ПВ и исследована стабильность данного вихревого решения. В дополнение к аналитическому рассмотрению приведены численные результаты для аналогичных дискретных систем конечного размера, касающиеся определения значения параметра анизотропии, при котором ПВ становится неустойчивым. Рассмотрено статическое внеплоскостное вихревое решение (ВВ), возникающее в предложенной модели (см. разд. 4). Аналитическое рассмотрение для случая слабой легкоплоскостной анизотропии также дополнено данными численного анализа аналогичных дискретных систем конечного размера. Изучены динамические свойства ВВ (разд. 5). Выражения для распределения намагниченности в вихре стационарного профиля получены для случаев «быстрых» и «медленных» вихрей. Подчеркнута характерная для гиротропного движения асимметрия движущегося ВВ. Предложен вариант подхода в рамках МКП [2,27] для комбинированного континуально-дискретного описания системы и выведено упрощенное эффективное уравнение движения центра вихря. Полученные результаты резюмируются и сравниваются с данными анализа двумерных систем (разд. 6).

2. Модель и уравнения спиновой динамики

Наиболее простой моделью, допускающей аналитическое рассмотрение статики и динамики магнитных вихрей, является система из двух ферромагнитных спиновых цепочек с легкоплоскостной анизотропией (рассматривается только одноионная анизотропия). Подобная модель допускает решение с вихревой конфигурацией, в которой все спины лежат в «легкой» плоскости.* Однако в рамках такой простейшей модели невозможно описание более интересного типа вихрей, в которых вектор намагниченности может выходить из «легкой» плоскости.** Поэтому необходимо использовать более сложную модель, в которой возможно существование обоих типов вихревых решений в зависимости от величины анизотропии.

* В формулах соответствующие величины отмечены индексом «IPV» — «in-plane vortex».

** В формулах «OPV» — «out-of-plane vortex».

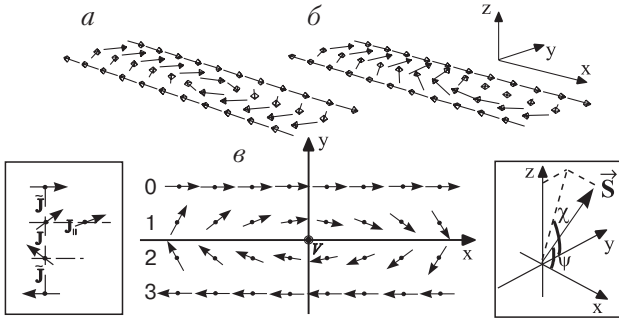


Рис. 1. Одномерная модель легкоплоскостного ферромагнетика в вихревой конфигурации: трехмерный вид статической ПВ конфигурации (а); трехмерный вид статической ВВ конфигурации (б); xy -проекция центральной части ВВ (длина стрелок соответствует величине спиновой проекции) (в). Центр вихря находится в точке V .

Самая простая модель, которая обобщает наши предыдущие плакетные модели [10] на квазиодномерный случай и допускает рассмотрение ВВ решений, приведена на рис. 1. Система включает четыре параллельные спиновые цепочки с фиксированными спинами в граничных цепочках (с номерами 0 и 3). Похожие модели уже предлагались ранее [14] для описания свойств сложных топологических магнитоструктурных дефектов. Фиксированные спиновые цепочки 0 и 3 моделируют два спиновых полупространства, окружающие цепочки 1 и 2, которые содержат ядро вихря. В нашем случае спины крайних цепочек фиксированы в легкой плоскости (плоскость xy на рис. 1) и направлены вдоль оси x для цепочки 0 и в противоположную сторону для цепочки 3 (в общепринятых обозначениях выбранное направление спинов соответствует «антивихрю»). Такое упорядочение граничных цепочек приводит к дополнительной эффективной анизотропии для внутренних цепочек 1 и 2, благодаря которой может быть устойчивым ВВ. Спины внутренних цепочек 1 и 2 свободны и могут занимать любое положение в легкой плоскости и выходить из нее. Предложенная модель позволяет описывать вихревую конфигурацию, если соответствующее статическое решение обладает следующим свойством: спины в 1 имеют положительные x - и y -проекции при $x \rightarrow -\infty$, в то время как при $x \rightarrow +\infty$ у них положительные x -, но отрицательные y -проекции. В цепочке 2 x -проекции спинов меняют свой знак (см. рис. 1). В такой конфигурации полное вращение спинового вектора вдоль замкнутого контура равняется 2π . Другими словами, у такого решения есть аналог топологического заряда вокруг центра вихря $x = y = 0$, хотя в отличие от континуальной системы при обходе вокруг центра вихря вектор намагниченности в магнитном пространстве пробегает не непрерывную

окружность, а принимает лишь шесть дискретных значений на этой единичной окружности.

В рамках классической гейзенберговской модели рассматриваемая система описывается гамильтонианом

$$\mathcal{H} = - \sum_n [J_{\parallel} (\mathbf{S}_n^1 \mathbf{S}_{n+1}^1 + \mathbf{S}_n^2 \mathbf{S}_{n+1}^2) - \frac{\beta}{2} (S_{nz}^1)^2 - \frac{\beta}{2} (S_{nz}^2)^2 + \tilde{J} S_{nx}^1 - \tilde{J} S_{nx}^2 + J S_n^1 S_n^2], \quad (1)$$

где n нумерует пару соседних спинов из первой и второй свободных цепочек вдоль оси x , \mathbf{S}_n^i — классический спиновый вектор из n -ой пары i -той цепочки с $i = 1, 2$ ($|\mathbf{S}| = 1$); J_{\parallel} — константа обменного взаимодействия между спинами каждой отдельной свободной цепочки; \tilde{J} соответствует обмену между фиксированными граничными спинами и спинами свободной цепочки и J — обмен между спинами разных свободных цепочек (все обменные константы положительны). Параметр β — константа одноионной анизотропии, для случая легкоплоскостной симметрии $\beta > 0$. В дальнейшем мы полагаем все магнитные параметры, нормированными на величину J_{\parallel} , т.е. $J_{\parallel} = 1$. Поскольку энергия одноионной анизотропии много меньше энергии обменного взаимодействия, то так называемая магнитная длина, $l = (J_{\parallel}/\beta)^{1/2}$, много больше межатомного расстояния и, таким образом, мы можем пользоваться длинноволновым континуальным описанием для распределения намагниченности вдоль цепочек. С другой стороны, в направлении оси y учитывается дискретность рассматриваемой системы, поскольку углы между спинами в этом направлении могут быть порядка π . Обычно ориентация спинового вектора описывается в терминах сферических проекций, связанных с осью симметрии (ось z в рассматриваемом случае):

$$\mathbf{S} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta). \quad (2)$$

В терминах сферических углов (φ и θ) полная энергия записывается как

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 [(\theta'_i)^2 + \sin^2 \theta_i (\varphi'_i)^2 + \beta \cos^2 \theta_i] - \tilde{J} [\sin \theta_1 \cos \varphi_1 - \sin \theta_2 \cos \varphi_2] - J [\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)] \right), \quad (3)$$

где штрих означает частную производную $\partial/\partial x$ (x — координата вдоль цепочек). Однако в разделах,

посвященных анализу ВВ решения, нам удобно пользоваться другими угловыми переменными

$$\mathbf{S} = (\cos \psi, \sin \psi \cos \chi, \sin \psi \sin \chi), \quad (4)$$

т.е. сферической координатной системой, ассоциированной с осью x (см. рис. 1). Используя такую координатную систему, выражение (3) для энергии переписывается следующим образом:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 [(\psi'_i)^2 + \sin^2 \psi_i (\chi'_i)^2 + \beta \sin^2 \psi_i \sin^2 \chi_i] - \tilde{J} [\cos \psi_1 - \cos \psi_2] - J [\cos \psi_1 \cos \psi_2 + \sin \psi_1 \sin \psi_2 \cos (\chi_1 - \chi_2)] \right). \quad (5)$$

В выражениях для плотности энергии (3), (5) опущено постоянное слагаемое $-2J_{\parallel}$. Введенные переменные (φ, θ) и (χ, ψ) связаны соотношениями

$$S_z = \cos \theta = \sin \psi \sin \chi, \quad \text{tg} \varphi = \text{tg} \psi \cos \chi. \quad (6)$$

В угловых переменных уравнения спиновой динамики (уравнения Ландау – Лифшица) выглядят следующим образом:

$$\sin \psi_{1,2} \frac{\partial \chi_{1,2}}{\partial t} = \frac{\delta E}{\delta \psi_{1,2}}, \quad \sin \psi_{1,2} \frac{\partial \psi_{1,2}}{\partial t} = -\frac{\delta E}{\delta \chi_{1,2}}, \quad (7)$$

$$\sin \theta_{1,2} \frac{\partial \varphi_{1,2}}{\partial t} = \frac{\delta E}{\delta \theta_{1,2}}, \quad \sin \theta_{1,2} \frac{\partial \theta_{1,2}}{\partial t} = -\frac{\delta E}{\delta \varphi_{1,2}}, \quad (8)$$

или в явном виде

$$\begin{cases} \psi''_{1,2} - [\beta \sin^2 \chi_{1,2} + (\chi'_{1,2})^2] \sin \psi_{1,2} \cos \psi_{1,2} \mp \\ \mp \tilde{J} \sin \psi_{1,2} - J [\sin \psi_{1,2} \cos \psi_{2,1} - \\ - \sin \psi_{2,1} \cos \psi_{1,2} \cos (\chi_{2,1} - \chi_{1,2})] + \sin \psi_{1,2} \dot{\chi}_{1,2} = 0, \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} (\sin^2 \psi_{1,2} \chi'_{1,2})' - \beta \sin^2 \psi_{1,2} \sin \chi_{1,2} \cos \chi_{1,2} - \\ - J \sin \psi_{1,2} \sin \psi_{2,1} \sin (\chi_{1,2} - \chi_{2,1}) - \sin \psi_{1,2} \dot{\psi}_{1,2} = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta''_{1,2} + [\beta - (\varphi'_{1,2})^2] \sin \theta_{1,2} \cos \theta_{1,2} \pm \\ \pm \tilde{J} \cos \theta_{1,2} \cos \varphi_{1,2} - J [\sin \theta_{1,2} \cos \theta_{2,1} - \\ - \cos \theta_{1,2} \sin \theta_{2,1} \cos (\varphi_{1,2} - \varphi_{2,1})] + \sin \theta_{1,2} \dot{\theta}_{1,2} = 0, \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} (\sin^2 \theta_{1,2} \varphi'_{1,2})' \mp \tilde{J} \sin \theta_{1,2} \sin \varphi_{1,2} - \\ - J \sin \theta_{1,2} \sin \theta_{2,1} \sin (\varphi_{1,2} - \varphi_{2,1}) - \sin \theta_{1,2} \dot{\theta}_{1,2} = 0 \end{cases}$$

Здесь нижние индексы обозначают номер свободной цепочки, а верхний из двойных знаков (\pm, \mp) отвечает первому индексу в соответствующем сла-

гаемом. Ниже рассмотрен только случай одинакового обмена между всеми цепочками $\tilde{J} = J$.

Как упоминалось ранее, в дискретном двумерном ферромагнетике с анизотропией типа плоскость легкого намагничивания существуют два типа вихрей: ПВ и ВВ. В непрерывной среде (при континуальном описании) ВВ всегда имеет энергию меньшую, чем ПВ [15]. Таким образом, в отличие от ПВ, ВВ стабилен в континуальном пределе. Однако при учете дискретности спиновой решетки существует критическое значение параметра легкоплоскостной анизотропии β_c , и для всех $\beta > \beta_c$ (сильная анизотропия) ПВ соответствует устойчивой конфигурации системы. В другом случае, когда $0 < \beta < \beta_c$, устойчив ВВ [6,7,9]. Этот эффект имеет место из-за конкуренции энергий анизотропии и обмена, или другими словами, благодаря наличию двух характерных пространственных размеров – радиуса вихря (магнитной длины) и межатомного расстояния. В настоящей работе мы в основном интересуемся случаем слабой анизотропии $0 < \beta \ll J$ (напомним, что все параметры нормированы на J_{\parallel}), что соответствует действительной физической ситуации. Благодаря этому рассмотрение можно существенно упростить из-за возможности использования теории возмущений. Однако сначала мы исследуем ПВ решение и проанализируем стабильность плоскостной вихревой конфигурации для определения критического значения параметра анизотропии.

3. Статический плоскостной вихрь

Рассматривая ПВ решения, ограничимся нахождением статической структуры и области стабильности вихря данного типа. Однако заметим, что в рассматриваемой модели сам смысл ПВ решения отличается от такового в $2D$ системе: как показано ниже, в нашей модели ПВ является солитоноподобным решением нелинейного уравнения, в то время как в $2D$ случае ПВ – это решение линейного уравнения типа Пуассона. В ПВ все спины внутренних цепочек 1 и 2 имеют нулевую z -компоненту, т.е. в терминах введенных угловых переменных $\chi_{1,2}(x) = 0$. Из (6) следует, что в этом случае $\psi_{1,2}(x) \equiv \varphi_{1,2}(x)$. Вдали от ядра вихря распределение намагниченности однородное и уравнения (9), (10) трансформируются в

$$\sin \psi_{1,2} + \sin (\psi_{1,2} - \psi_{2,1}) = 0. \quad (11)$$

Эти уравнения имеют два различных решения:

$$\psi_1 = \psi_2 = 0, \pi \quad (12)$$

и

$$\psi_1 = \pi - \psi_2 = \pm \frac{\pi}{3}. \quad (13)$$

Энергия системы, соответствующая решению (12), убывает с ростом продольного размера системы L как $E \sim -L$, а для решения (13) она убывает как $E \sim -3L/2$, и, таким образом, решение (13) описывает дважды вырожденное основное состояние системы. В нашей модели вихревое решение фактически соответствует одномерной доменной стенке [18], разделяющей «однородные домены». В то же время, как будет показано ниже, это решение проявляет вихревые свойства, и так называемая завихренность, отвечающая этому решению, отлична от нуля.

Полагая для ПВ $\psi_1(x) = \psi(x)$ и $\psi_2(x) = \pi - \psi(x)$, из уравнений (9) (или (10)) можно получить статическое уравнение, определяющее распределение намагниченности для ПВ в легкой xy -плоскости:

$$\psi_{xx} - J \sin \psi + J \sin 2\psi = 0, \quad (14)$$

которое совпадает с хорошо изученным статическим двойным синусоидальным уравнением Гордона (double SGE, см., например, [17,18]). Топологическое локализованное решение (14) с найденными вихревыми асимптотиками (13) имеет вид

$$\psi_{IPV} = \varphi_{IPV} = -2 \arctg \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{th} \left(\sqrt{\frac{3J}{8}} (x - x_0) \right) \right], \quad (15)$$

где x_0 — координата центра вихря и постоянная решетки положена равной единице. Однако необходимо отметить, что это выражение является хорошей аппроксимацией для спинового распределения в ПВ только при условии, что характерная магнитная длина $l \sim J^{-1/2}$ много больше, чем межатомное расстояние. Используя решение (15), легко получить выражение для энергии системы в ПВ конфигурации:

$$E_{IPV} = \alpha \sqrt{J} - \frac{3}{2} JL, \quad (16)$$

где первое слагаемое описывает собственную энергию вихря, а второе слагаемое соответствует основному состоянию; численное значение константы α равно

$$\alpha = \frac{2}{\sqrt{J}} \int_{-\infty}^{\infty} (\varphi'_{IPV})^2 dx = \sqrt{6} - \frac{\sqrt{2}}{3} \pi \approx 0,967.$$

Отметим, что если в двумерном случае энергия вихря расходится логарифмически при увеличении размера системы [1], то в рассматриваемой системе вихревое решение разделяет два вырожденных основных состояния и соответствует одномерной доменной стенке, энергия которой конечна [16,18,24]. В некотором смысле ситуация сходна со «схлопы-

ванием» магнитного вихря в $2D$ легкоплоскостном ферромагнетике в блоховскую линию в доменной границе при учете дополнительной анизотропии в легкой плоскости. Хорошо известно, что существование ПВ конфигурации возможно только при учете дискретности рассматриваемой системы в ядре вихря [6] (при этом снимается логарифмическая расходимость энергии вихря в центре вихревого решения). Исходя из этого, интересно исследовать вопрос о наличии ПВ–ВВ перехода в модели, в которой продольное распределение намагниченности описывается в континуальном пределе и только взаимодействие между цепочками учитывается дискретным образом. Как будет показано ниже, энергия ВВ конфигурации меньше чем энергия ПВ при условии слабой анизотропии $\beta \ll J$, и, таким образом, ВВ должен быть устойчив для малых значений β . С другой стороны, этот вывод становится неверным, если анизотропия не мала. Более того, так как энергия ПВ конфигурации растет при увеличении значения параметра анизотропии β (см. (35)), можно ожидать, что ПВ должен быть энергетически предпочтительнее при сильной анизотропии. Этот вопрос можно исследовать, применяя метод Вахитова и Колоколова [19] и проводя анализ устойчивости ПВ конфигурации.

Следуя работе [19], необходимо линеаризовать начальные уравнения (10) по малым, зависящим от времени и координаты добавкам, к статическому ПВ решению. Существуют две моды, которые необходимо проанализировать:

1) симметричная, с малыми добавками в виде

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2} - \vartheta(x,t), \quad \theta_2 = \frac{\pi}{2} - \vartheta(x,t), \quad (17)$$

$$\varphi_1 = \varphi_{IPV}(x) + \phi(x,t), \quad \varphi_2 = \pi - \varphi_{IPV}(x) + \phi(x,t);$$

2) антисимметричная, с

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2} - \vartheta(x,t), \quad \theta_2 = \frac{\pi}{2} + \vartheta(x,t), \quad (18)$$

$$\varphi_1 = \varphi_{IPV}(x) - \phi(x,t), \quad \varphi_2 = \pi - \varphi_{IPV}(x) + \phi(x,t),$$

где φ_{IPV} определяется выражением (15).

Фазовый ПВ–ВВ переход должен быть связан с неустойчивостью симметричной моды, о чем свидетельствует симметрия ВВ решения. Это утверждение также находится в согласии с предыдущими результатами [7,10] для двумерных систем с фиксированной границей. Подставляя выражения (17) в (9), в линейном по малым добавкам приближении получаем следующую систему уравнений:

$$-\phi'' + \cos \varphi_{IPV} \phi = \dot{\vartheta}, \quad (19)$$

$$-\vartheta'' + [\cos \varphi_{IPV} - 2 \cos^2 \varphi_{IPV} - (\varphi'_{IPV})^2 + \beta] \vartheta = -\dot{\phi}, \quad (20)$$

где для удобства время, координата и параметр анизотропии перенормированы следующим образом: $Jt \rightarrow t$, $J^{1/2}x \rightarrow x$, $\beta/J \rightarrow \beta (J > 0)$, а точки в правых частях обозначают $\partial/\partial t$. Для решений этой системы в виде

$$\phi(x, t) = \tilde{\phi}(x) \exp(vt), \quad \vartheta(x, t) = \tilde{\vartheta}(x) \exp(vt), \quad (21)$$

получаем связанные уравнения

$$\hat{L}_1 \tilde{\phi} = v \tilde{\vartheta}, \quad \hat{L}_2 \tilde{\vartheta} = -v \tilde{\phi}, \quad (22)$$

где \hat{L}_1 и \hat{L}_2 — эрмитовы операторы шредингеровского типа:

$$\hat{L}_1 = -\frac{d^2}{dx^2} + V_1(x), \quad (23)$$

$$\hat{L}_2 = -\frac{d^2}{dx^2} + V_2(x) + \beta, \quad (24)$$

с эффективными потенциалами $V_1(x)$ и $V_2(x)$ (см. рис. 2):

$$V_1(x) = \frac{2 + \operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)}{1 + 2\operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)}, \quad (25)$$

$$V_2(x) = -\frac{3}{2} \frac{7 + 2\operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)}{\left(1 + 2\operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)\right)^2}. \quad (26)$$

Таким образом, возникает задача на собственные значения

$$\hat{L}_1 \hat{L}_2 \tilde{\vartheta} = -v^2 \tilde{\vartheta}, \quad (27)$$

с условием ограниченности собственных функций на бесконечности. Необходимо проанализировать знак наименьшего собственного значения оператора $\hat{L}_1 \hat{L}_2$, соответствующего собственной функции основного состояния, в зависимости от величины параметра анизотропии. При положительном самом низком собственном значении оператора (27) v — мнимое, исходная задача не содержит экспоненциально нарастающих со временем решений, и ПВ устойчив. В противоположном случае появляется решение с экспоненциальным временным ростом, и ПВ неустойчив. Следовательно, необходимо найти зависимость нижайшего собственного значения от параметра анизотропии и значение параметра ани-

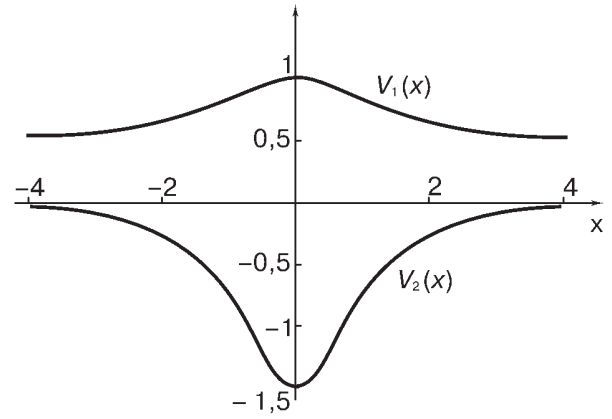


Рис. 2. Профили эффективных потенциалов $V_1(x)$ и $V_2(x)$ как функции перенормированной координаты (25) и (26).

зотропии, для которого это собственное значение меняет знак. Это значение β_c и будет являться точкой фазового ПВ — ВВ перехода.

Поскольку $V_1(x) > 0$ для любого x , оператор \hat{L}_1 невырожденный и обладает непрерывным спектром существенно положительных собственных значений. При этом обратный оператор \hat{L}_1^{-1} существует и также является положительно определенным. Учитывая это обстоятельство, вариационная задача

$$-v_0^2 = \min \frac{\langle \tilde{\vartheta} | \hat{L}_2 | \tilde{\vartheta} \rangle}{\langle \tilde{\vartheta} | \hat{L}_1^{-1} | \tilde{\vartheta} \rangle} \quad (28)$$

может быть сведена к исследованию спектра собственных значений оператора \hat{L}_2 , так как знак его собственных значений определяет сигнатуру исходного оператора из (27). В выражении (28) индекс «0» соответствует самому низкому собственному значению, и использованы обычные квантово-механические обозначения для скалярного произведения.

Как можно видеть на рис. 2, верхняя оценка для точки ПВ — ВВ перехода в рассматриваемой системе есть $\beta = -V_2(0) = 1,5$. Действительно, для всех $\beta > 1,5$ вся потенциальная яма для шредингеровского оператора \hat{L}_2 смещается выше оси x и собственное значение основного состояния положительно. Это означает, что все решения начального набора уравнений (19), (20) не являются растущими, и ПВ устойчив для любого $\beta > 1,5$. Для получения значения точки ПВ — ВВ перехода с большей точностью можно использовать приближительную вариационную процедуру для исследования наименьшего собственного значения оператора $(\hat{L}_2 - \beta)$, которое соответствует симметричной собственной функции без узлов с экспоненциально затухающими асимптотиками на бесконечности. Выбирая функцию сравнения для основного состояния в виде $\vartheta = \operatorname{sech}(\gamma x)$, где γ — вариационный параметр, мы удовлетворяем наложен-

ным условиям. Вариационная процедура приводит к критическому значению параметра анизотропии $\beta_c \approx 0,73$. Поскольку оператор $(\hat{L}_2 - \beta)$ является отрицательно определенным на многообразии функций с симметрией основного состояния, можно заключить, что истинное значение β_c для нашей системы должно быть немного меньше, чем найденное.

Для того чтобы проверить наши результаты и проследить связь предложенной системы с чисто дискретными системами, был проделан ряд численных вычислений для полностью дискретных систем конечного размера, аналогичных изображенной на рис. 1. Используя непосредственно гамильтониан дискретной системы (1), численно определяли вихревую конфигурацию с минимальной энергией для систем, включающих 40, 60 и 100 свободных спинов (во внутренних цепочках). Известно, что критическая величина параметра анизотропии для ПВ – ВВ перехода существенно зависит от размеров двумерной системы очень малого размера [7,10]. Однако при увеличении размера системы критическое значение параметра анизотропии быстро стремится к определенному предельному значению. Для всех 40-, 60- и 100-спиновых систем было обнаружено, что точка перехода лежит внутри интервала $0,695 < \beta_c < 0,7$. Этот результат находится в хорошем соответствии с полученной аналитической оценкой.

4. Статическая внеплоскостная вихревая конфигурация

Как было показано выше, ПВ устойчив, если параметр анизотропии больше критического значения $\beta_c \approx 0,7J$ (в этом разделе использован неперенормированный параметр β). ВВ устойчив в интервале значений параметра анизотропии $0 < \beta < \beta_c$. Исследования структуры ВВ намного сложнее, чем для ПВ, однако можно значительно упростить рассуждения, полагая, что $\beta \ll J$. Таким образом, в дальнейшем рассмотрении использована теория возмущений с малым возмущающим параметром β .

4.1. Распределение намагниченности в статическом внеплоскостном вихре

Воспользуемся угловыми переменными для спина в виде (4). В случае слабой анизотропии ($\beta \ll 1$) распределение для полей $\psi(x)$ и $\chi(x)$ может быть найдено в виде степенного ряда по параметру β . Для ВВ характерный пространственный масштаб (магнитная длина) порядка $\beta^{1/2}$ и, как будет показано ниже, $\partial/\partial x \sim \beta^{1/2}$. Аналогично ПВ случаю, в статическом ВВ $\psi_1 = \pi - \psi_2 = \psi$. В дополнение, для ста-

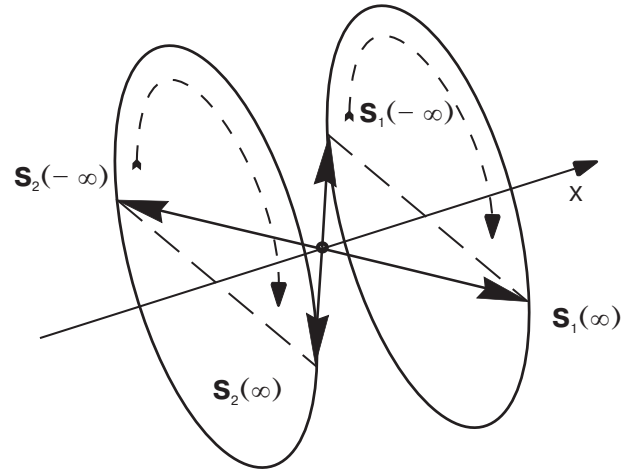


Рис. 3. Пространственное вращение спинового вектора в свободных цепочках при изменении координаты от $-\infty$ до $+\infty$.

тического вихря имеем $\chi_1 = \chi_2 = \chi$ (см. рис. 1,б,в). Учитывая эти симметричные соотношения, можно привести уравнения (9) к паре связанных нелинейных уравнений:

$$\chi'' - \frac{\beta}{2} \sin 2\chi + 2\chi'\psi' \text{ctg}\psi = 0, \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \psi'' - [\beta \sin^2 \chi + (\chi')^2] \sin \psi \cos \psi - \\ - J[\sin \psi - \sin 2\psi] = 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Вихревое решение уравнений (29), (30) соответствует пространственному вращению спинового вектора из положения $\psi = \pi/3, \chi = 0$ при $x \rightarrow -\infty$ в положение $\psi = \pi/3, \chi = \pi$ при $x \rightarrow +\infty$, спины при этом вращаются практически по конической поверхности (см. рис. 3). В соответствии с этим предположением величина χ остается порядка единицы, в то время как $\chi' \sim \beta^{1/2}$. Для второго поля: $\psi = \pi/3 + \mathcal{O}(\beta)$ и $\psi' \sim \beta^{3/2}$. В уравнении (29) в основном приближении можно опустить последний член и получить известное статическое синус-гордон уравнение (СГУ) с солитонным решением

$$\chi^{(0)} = 2 \arctg(\exp \sqrt{\beta} x). \quad (31)$$

Последний член в (30) имеет порядок β . Таким образом, этот анализ демонстрирует корректность сделанного начального предположения о порядке малости ψ' . Используя основное приближение для поля χ , находим первые поправки для ψ :

$$\psi(x) = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\beta}{J} \frac{1}{\text{ch}^2 \sqrt{\beta} x} + \mathcal{O}(\beta^2), \quad (32)$$

а пользуясь (32), получаем выражение для χ с точностью до β^2 в виде

$$\chi(x) = 2 \operatorname{arctg} \exp \sqrt{\beta} x + \frac{1}{3} \frac{\beta}{J} \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\beta} x}{\operatorname{ch}^2 \sqrt{\beta} x} + O(\beta)^2. \quad (33)$$

Из уравнений (29), (30) можно также получить асимптотическое поведение полей $\chi(x)$ и $\psi(x)$ в ВВ вихре, не делая предположения, что β мало. При $x \rightarrow \pm\infty$ можно линеаризовать эти уравнения над основным состоянием (см. (13)) и получить

$$\begin{aligned} \chi(x) &\approx C \exp(\mp \sqrt{\beta} x), \\ \psi(x) &\approx \mp \frac{\pi}{3} \pm C^2 \frac{\sqrt{3}\beta}{8\beta - 3J} \exp(\mp 2\sqrt{\beta} x), \end{aligned} \quad (34)$$

где константа интегрирования C зависит от β и J и для малых β может быть представлена в виде $C \approx 2 + \beta(3J)^{-1} + O(\beta^2)$.

Из вида решений (32), (33) и асимптотик (34) следует, что размер ядра ВВ имеет порядок $l_{OPV} \sim \beta^{-1/2}$, т.е. существенно больше в случае малых β , чем для ПВ: $l_{IPV} \sim J^{-1/2} \ll l_{OPV}$ (см. (15)).

Интересно сравнить полученные результаты с данными анализа двумерных систем. Вдали от ядра вихря асимптотики z -компоненты намагниченности убывают экспоненциально, как и в двумерном случае: $S_z \sim \exp(-\sqrt{\beta} x)$. Однако поле ϕ также стремится экспоненциально к своему предельному значению ($\phi \approx \pi/3 - O(\exp(2\sqrt{\beta} x))$), что отличается от $2D$ случая, где на больших расстояниях $\phi(y = a, x \gg a) \sim a/x$. Это отличие демонстрирует одномерный характер предложенной модели.

Подставляя решения (32), (33) для полей $\psi(x)$ и $\chi(x)$ в выражение для энергии (5), с точностью до слагаемых порядка β получаем:

$$E_{OPV} = 12\sqrt{\beta} - \frac{3}{2} JL, \quad (35)$$

где L как и ранее обозначает продольный размер системы. Собственная энергия ВВ вихря $12\beta^{1/2}$ при малых β существенно меньше чем энергия ПВ (см. (16)).

Для понимания физической природы полученного вихревого решения удобно перейти от переменных (χ, ψ) к (S^z, ϕ) . Подставляя (32), (33) в выражения для z -компоненты намагниченности (6), с точностью до β получаем:

$$S_{1,2}^z = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{\operatorname{ch}(\sqrt{\beta} x)} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \frac{\beta}{J} \left(\frac{2}{\operatorname{ch}^3(\sqrt{\beta} x)} - \frac{1}{\operatorname{ch}(\sqrt{\beta} x)} \right). \quad (36)$$

Зависимость полной внеплоскостной намагниченности ВВ от параметра анизотропии выглядит следующим образом:

$$M_\infty = \pi \sqrt{\frac{3}{\beta}} + O(\beta^{3/2}), \quad (37)$$

а выражение для поля ϕ в основном приближении

$$\phi_1 = -\operatorname{arctg} \sqrt{3} \operatorname{tg}(\sqrt{\beta} x), \quad \phi_2 = -\pi - \phi_1. \quad (38)$$

Используя полученные выражения для полей S^z и ϕ , можно найти выражение для плотности завихренности этого решения, которая является важной локальной характеристикой ВВ. Для двумерного магнетика, при континуальном описании, плотность завихренности имеет вид (см., например, [22])

$$\Upsilon = \frac{\partial S^z}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial S^z}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad (39)$$

и полная завихренность ВВ в бесконечном $2D$ магнетике равна $\Gamma = \int_V \Upsilon dx dy = 2\pi S^z(0)$, где $S^z(0)$ —

z -компонента намагниченности в центре вихря. Для рассматриваемой комбинированной модели y -координата принимает дискретные значения $y = 0, 1, 2, 3$, и производная $\partial/\partial y$ должна быть заменена симметризованными конечными разностями: $\partial f/\partial y \rightarrow (f_0 - f_2)/2$, $(f_1 - f_3)/2$. Для вычисления дискретного аналога полной завихренности необходимо использовать симметричные свойства ВВ: $S_0^z = S_3^z = 0$, $S_1^z = S_2^z$; $\phi_0 = 0$, $\phi_3 = -\pi$ и $\phi_2 = -\pi - \phi_1$ (для $x > 0$); $\phi_2 = \pi - \phi_1$ (для $x < 0$). Последнее соотношение учитывает вращение спинового вектора на угол 2π при обходе по замкнутому контуру вокруг центра вихря. Таким образом, окончательно имеем для плотности завихренности (индексы показывают номер цепочки)

$$\Upsilon_1 = \Upsilon_2 = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (S_1^z \phi_1) + \frac{\pi}{2} \frac{\partial S_1^z}{\partial x} \operatorname{sgn}(x), \quad (40)$$

и для полной завихренности

$$\Gamma = \int_{-\infty}^{\infty} dx (\Upsilon_1 + \Upsilon_2) = 2\pi S_1^z(0). \quad (41)$$

Этот результат совпадает с результатом для ВВ в континуальной двумерной системе.

Поскольку далее будут численно рассмотрены дискретные системы конечного размера вдоль оси x , полезно обсудить эффекты конечности цепочек аналитически. В первую очередь необходимо переписать основное приближение решения для поля χ (31), чтобы удовлетворить граничным условиям (для определенности выбраны неймановские граничные условия) на концах цепочек 1 и 2 (т.е. в точках $x = \pm L/2$, где L обозначает полную длину цепочек). В основном приближении $\psi^{(0)} \approx \pi/3$ и $\chi^{(0)}$ удовлетворяет СГУ. Чтобы удовлетворить граничным условиям надо выбрать периодическое кноидальное решение СГУ:

$$\chi^{(0)} = \frac{\pi}{2} + \arcsin \operatorname{sn}(\sqrt{\beta}x | \kappa), \quad (42)$$

где $\operatorname{sn}(z | \kappa)$ — эллиптический синус Якоби [20] с аргументом z и модулем κ . Модуль κ однозначно определяется длиной цепочек и значением параметра анизотропии:

$$\frac{\sqrt{\beta}L}{2} = K(\kappa). \quad (43)$$

Здесь K полный эллиптический интеграл первого рода. Учитывая, что минимальное значение $K(0) = \pi/2$ и $K(\kappa)$ является монотонной функцией своего аргумента κ , можно найти значение параметра анизотропии β , при котором исчезает вихревая конфигурация. Действительно, когда $\kappa \rightarrow 0$, величина β остается конечной и стремится к $\beta^* = (\pi/L)^2$. Для значений β , меньших чем β^* , существует только однородное спиновое упорядочение без вихря (в направлении оси x). Аналогичное влияние конечного размера системы на структуру ВВ было отмечено и ранее при исследовании двумерного спинового плакета со свободной границей [10]. Бифуркационное отщепление локализованного состояния от однородного для систем конечного размера является хорошо известным фактом. Оно происходит при конечном критическом значении бифуркационного параметра, и в одномерных системах это критическое значение имеет порядок L^{-2} [21]. Проведем расчет внеплоскостной намагниченности для системы конечного размера L в ВВ конфигурации. Выражения для локальной z -компоненты спинов можно получить, подставив зависимости для полей $\chi^{(0)}$ и $\psi^{(0)}$ в соотношения (6):

$$S_z^{1,2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{dn}(\sqrt{\beta}x | \kappa), \quad (44)$$

где эллиптическая функция $\operatorname{dn}(z | \kappa)$ определяется как $\operatorname{dn}(z | \kappa) = (1 - \kappa^2 \operatorname{sn}^2(z | \kappa))^{1/2}$. Тогда полная внеплоскостная намагниченность конечной системы имеет вид

$$M_L = \int_{-L/2}^{L/2} [S_1^z(x) + S_2^z(x)] dx = \pi \sqrt{\frac{3}{\beta}}. \quad (45)$$

В пределе при $\beta \rightarrow \beta^*$ она стремится к значению

$$M_L^* = 2L \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (46)$$

При рассмотрении дискретной системы в выражении (46) множитель $2L$ надо заменить на число спинов N в подвижных цепочках 1 и 2.

4.2. Численный анализ статического внеплоскостного вихря в дискретных системах конечного размера

Полезно дополнить аналитическое рассмотрение численными расчетами для дискретных систем аналогичной геометрии с целью распространения анализа на всю область устойчивости ВВ, не ограничиваясь случаем только малых β , и исследовать вихревую структуру при значениях параметра анизотропии, близких к точке ПВ–ВВ перехода. Для нахождения конфигурации, имеющей минимальную энергию, использовано непосредственно выражение (1) для энергии дискретной системы и применен метод «случайной релаксации» (random relaxation procedure) при различной величине анизотропии. Как исходная конфигурация выбрано распределение, описываемое формулой (15), где центр вихря совмещен с центром системы (началом координат на рис. 1, θ) и положено $J = 1$. Заметим, что решение (15) получено в длинноволновом приближении и является корректным лишь при малых J . Допускалась релаксация только к конфигурациям с вихревой симметрией. Исследованы системы, содержащие 40, 60 и 100 спинов, однако из-за почти полной схожести результатов в настоящем разделе рассмотрены данные анализа только системы с 40 подвижными спинами (на концах свободных цепочек выбраны неймановские, т. е. свободные граничные условия).

На первом шаге допускалась релаксация только в легкой плоскости и таким образом получена истинная ПВ конфигурация для выбранных значений параметров исследуемой системы. Соответствующее

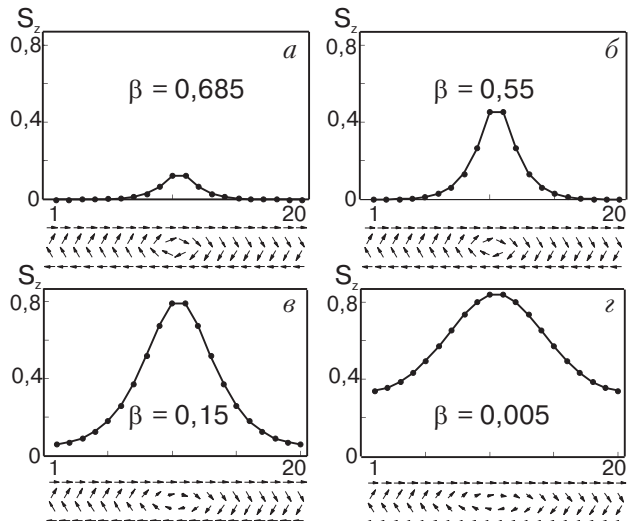


Рис. 4. Изменение распределения S_z и структуры упорядочения спинов в легкой плоскости при уменьшении величины β для дискретной системы, состоящей из 40 спинов в ВВ конфигурации.

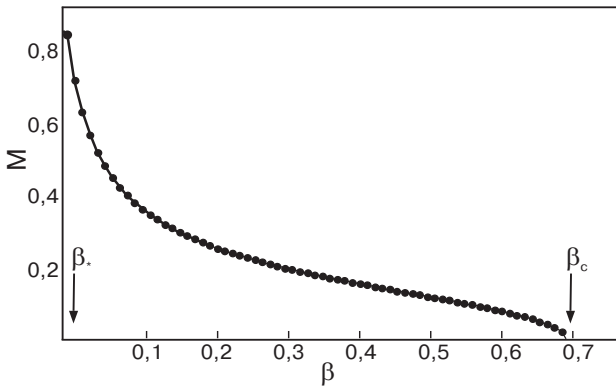


Рис. 5. Зависимость внеплоскостной намагниченности на один атом от параметра анизотропии β для системы из 40 спинов.

ПВ распределение очень близко к распределению спинов в легкой плоскости на рис. 4,а. Дискретность системы, влияние конечности длины цепочек и достаточно большое использованное значение для J привели в результате к трансформации выбранного начального (полученного аналитически в континуальном пределе для бесконечной системы) ПВ распределения. Несмотря на это, различие исходной конфигурации и полученной после релаксационной процедуры не было очень существенным.

На следующем шаге допускался выход спинов из легкой плоскости и находилась спиновая конфигурация в трех измерениях (напомним, что длина спинового вектора остается постоянной). Это было проделано для значений параметра анизотропии из интервала $0,02 < \beta < 1,5$ с шагом 0,01 (для значений β меньших 0,02 система не релаксировала к вихревой конфигурации).

Графики распределения z -проекции намагниченности и распределения спинов в легкой xy -плоскости приведены на рис. 4. Анализ показал, что для $\beta < \beta_c \approx 0,695$ у вихревого решения возникала внеплоскостная компонента, сильно локализованная в окрестности вихревого ядра для небольшого отклонения значений β от критического значения β_c . Для таких значений β распределение спинов в xy -плоскости существенно не отличалось от распределения спинов в ПВ. При увеличении отклонения β от критического значения (в сторону меньших β) плоскостное упорядочение спинов изменялось в соответствии с результатами аналитического рассмотрения (см. (15), (32), (33)). Одновременно профиль внеплоскостной намагниченности принимал все более гладкую колоколообразную форму. Подобное же поведение z -проекции намагниченности при умень-

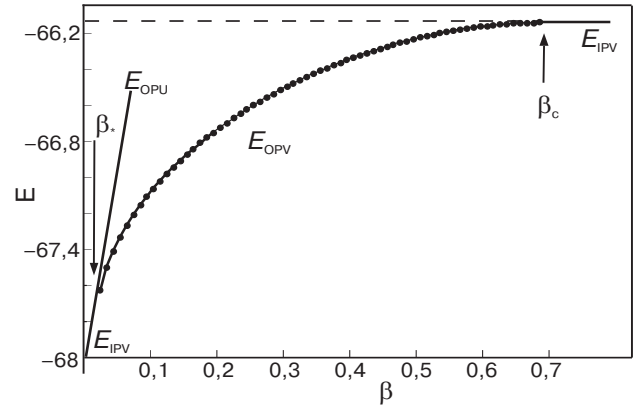


Рис. 6. Зависимость полной энергии в системе из 40 подвижных спинов от параметра β для ВВ, ПВ и для однородной внеплоскостной (ОВ) и однородной плоскостной (ОП) конфигураций. (Индексы OPV, IPV, OPU и IPU отвечают соответственно ВВ, ПВ, ОВ и ОП конфигурациям).

шения величины анизотропии наблюдается в двумерных системах.

Зависимость внеплоскостной намагниченности, приходящейся на один спин системы, от параметра анизотропии представлена на рис. 5. Эта зависимость имеет характерный бифуркационный вид и находится в хорошем соответствии с данными для двумерных систем: она возникает в точке β_c с корневой сингулярностью и монотонно стремится к своему предельному значению $M_L/N = \sqrt{3}/2$ при $\beta \rightarrow \beta_*$ (отметим, что максимальное значение M/N в двумерной системе равно единице). Численная зависимость $M(\beta)$ находится в соответствии с аналитическим результатом $M = \pi(3/\beta)^{1/2}$ (для малых β).

На рис. 6 изображена зависимость $E(\beta)$ для ВВ. Эта зависимость для малых β , полученная численно (см. рис. 6), находится в хорошем соответствии с результатом аналитического рассмотрения. $E(\beta)$ отщепляется бифуркационным образом в точке $\beta = \beta_c$ от значения энергии для ПВ $E_{IPV} \approx -66,1$ (для $N = 40$). Для $\beta < \beta_c$ энергия ВВ меньше чем энергия ПВ, и при этих значениях анизотропии плоскостной вихрь неустойчив. Энергия ВВ уменьшается при уменьшении β и достигает значения $E_* \approx -67,6$ во второй бифуркационной точке $\beta = \beta_* \approx (\pi/L)^2 \approx 0,02$, в которой вихрь теряет свои топологические свойства и переходит в однородное внеплоскостное состояние (ОВ)* с ненулевой z -компонентой спинов ($S_{1,2}^z = \sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$, $S_1^x = -S_2^x = \cos(\pi/3) = 1/2$, $S_1^y = S_2^y = 0$). Зависимость энергии ВВ $E_{OPV}(\beta)$ отщепляется в точке (β_*, E_*) от зависимости энергии ОВ $E_{OPU}(\beta)$ этого однородного состояния. Для каждого $\beta < \beta_*$ в системе конечного размера устойчивы только однородные со-

* в формулах — с индексом OPU

стояния: в рассматриваемом случае это ОВ и однородное плоскостное состояние (ОП).*

Распределение спинов в последнем дается выражением (13). Глобальный энергетический минимум при любом положительном β соответствует ОП с энергией $E_{IPU} = -68$ для $N = 40$. В свою очередь ОВ конфигурация соответствует локальному минимуму энергии. Для $\beta = 0$ энергии ОВ и ОП равны друг другу.

5. Динамика внеплоскостного вихря

Рассмотрим динамические свойства ВВ в случае слабой анизотропии ($\beta \ll J$). Трудность рассмотрения динамики ВВ в рамках предложенной модели заключается в том, что движение ВВ возможно лишь при условии смещения центра вихря в направлении оси y из симметричной позиции. Это, в свою очередь, влечет необходимость рассматривать систему из четырех связанных уравнений для полей $\psi_{1,2}$ и $\chi_{1,2}$. Отметим, что в бесконечной двумерной системе ВВ не может двигаться (он «вморожен» в основное состояние), и движение возможно только в системах конечного размера, даже если она ограничена только в одном измерении. (Проблема движения вихрей Питаевского в сверхтекучей жидкости в системах с похожей геометрией рассмотрена в работе [23].)

Прежде всего проанализируем спектр линейных спиновых волн, распространяющихся вдоль цепочек. Для получения спектра необходимо линеаризовать набор уравнений (9) над основным однородным состоянием по $\chi_{1,2} \ll 1$ и $\varepsilon_{1,2} \ll 1$, где $\psi_1 = \pi/3 + \varepsilon_1$ и $\psi_2 = 2\pi/3 - \varepsilon_2$:

$$\chi''_{1,2} - \beta\chi_{1,2} = J(\chi_{1,2} - \chi_{2,1}) \pm \frac{2}{\sqrt{3}}\dot{\varepsilon}_{1,2}, \quad (47)$$

$$\varepsilon''_{1,2} - J\varepsilon_{1,2} = \frac{J}{2}\varepsilon_{1,2} \mp \frac{2}{\sqrt{3}}\dot{\chi}_{1,2}. \quad (48)$$

Затем, подставляя

$$\chi_i(x, t) = \chi_i \sin(kx - \omega t),$$

$$\varepsilon_i(x, t) = \varepsilon_i \cos(kx - \omega t),$$

приходим к дисперсионным соотношениям:

$$\omega_s^2 = (\beta + k^2) \left(\frac{J}{2} + k^2 \right), \quad (49)$$

для симметричной моды s с $\chi_1 = \chi_2$, $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$ и

$$\omega_a^2 = (\beta + 2J + k^2) \left(\frac{3J}{2} + k^2 \right), \quad (50)$$

для антисимметричной моды a с $\chi_1 = -\chi_2$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$. Подчеркнем, что полученные дисперсионные соотношения соответствуют спиновым волнам в системе со специальным типом граничных условий (с противоположным направлением фиксированных спинов в цепочках 0 и 3). Если спины в граничных цепочках фиксированы в одном направлении, то закон дисперсии для симметричной моды $\omega_s^2 = [(\beta + J) + k^2][J + k^2]$, как и в антисимметричной моде. Полученные дисперсионные соотношения качественно имеют тот же вид, что и закон дисперсии спиновых волн в двумерном легкоплоскостном ферромагнетике с фиксированными (типа Дирихле) граничными условиями. Нижайшая симметричная мода совпадает со спектром двумерного магнетика, если один из размеров двумерной системы равен $\pi/2$. Полученные дисперсионные соотношения также напоминают закон дисперсии для биаксиального ферромагнетика [24].

Из формулы (49) следует, что минимальная фазовая скорость спиновых волн приблизительно равна $V_{ph}^{min} \approx (J/2)^2 = c$. Хорошо известно [24], что движение нелинейных локализованных возбуждений стационарного профиля возможно только со скоростями, меньшими минимальной фазовой скорости линейных возбуждений ($V < c$). В дальнейшем нас будет интересовать только случай движения вихрей с малыми скоростями $V \ll c$.

В статическом ВВ пространственный разворот спинов при изменении x от $-\infty$ до $+\infty$ происходит почти по конической поверхности с углом раствора $\psi_1 = \pi - \psi_2 \approx \pi/3$. Этот факт демонстрирует удобство использования новых переменных $\varepsilon_{1,2}$. Линеаризуя уравнения (9) по малым $\varepsilon_{1,2}$, можно выразить $\varepsilon_{1,2}$ через $\chi_{1,2}$ и вывести упрощенные уравнения, содержащие только $\chi_{1,2}$ (подробности этой процедуры и детали, касающиеся спектра спиновых волн, даны в Приложении). Таким образом, в этом разделе рассматриваются только упрощенные уравнения для полей $\chi_{1,2}$:

$$\begin{aligned} \chi''_{1,2} - \frac{\beta}{2} \sin 2\chi_{1,2} - J \sin(\chi_{1,2} - \chi_{2,1}) = \\ = \frac{2}{3J} \{2\ddot{\chi}_{1,2} + \ddot{\chi}_{2,1}\} \pm \frac{\beta}{3J} \dot{\chi}_{2,1} (\sin 2\chi_{1,2} + \sin 2\chi_{2,1}) \mp \\ \mp \frac{2}{3J} [2\chi''_{1,2}\dot{\chi}_{1,2} + 3\chi'_{1,2}\dot{\chi}'_{1,2} + (\chi'_{1,2}\dot{\chi}_{2,1})' - \chi'_{2,1}\dot{\chi}'_{2,1}]. \end{aligned} \quad (51)$$

Такое упрощение возможно только при малых β .

Полученные уравнения нетрудно проанализировать для случаев $V \ll \beta^{1/2}$ и $\beta^{1/2} \ll V \ll c$ (мы полагаем $\beta \ll J \sim 1$). Поскольку система (51) была

* в формулах IPU

выведена для движений со скоростями $V \ll c$, то в рамках этих уравнений можно исследовать линейные волны с групповой скоростью, удовлетворяющей соотношению $V_{gr} \ll c$, или, что то же самое, с волновыми числами $k \ll \beta^{1/2}$. С данной точностью законы дисперсии (49), (50) приводятся к (см. также Приложение):

$$\omega_s^2 = \frac{\beta J}{2} + ck^2, \quad \omega_a^2 = \left(3J^2 + \frac{3\beta J}{2} \right). \quad (52)$$

В этих соотношениях индексы s и a , как и ранее, характеризуют симметрию полей $\chi_{1,2}$.

5.1. Движение внеплоскостного вихря стационарного профиля

Дадим оценку разным членам в правой части (51). Из статических решений (32) и (33) следует, что характерный пространственный масштаб распределения намагниченности имеет порядок $\beta^{1/2}$, т.е. пространственные градиенты порядка $\partial/\partial x \sim \beta^{1/2}$. Производные по времени имеют порядок $V\beta^{1/2}$. Тогда члены в правой части (51) имеют следующие порядки: $V^2\beta$ в фигурных скобках, $V\beta^{3/2}$ в круглых и квадратных скобках. Пока скорость вихря находится в интервале $\beta^{1/2} = c_2 \ll V \ll c = (J/2)^{1/2}$ («быстрые вихри»), член в фигурных скобках в правой части (51) является основным. В противоположном случае для «медленных вихрей» со скоростями $V \ll c_2$ этот член может быть отброшен.

Рассмотрим медленные вихри, движущиеся со скоростями $V \ll \beta^{1/2} = c_2$. В этом случае можно воспользоваться теорией возмущений, взяв решение (31) для статического ВВ как основное приближение:

$$\chi_{1,2} = 2\text{arctg } e^\eta + \mu_{1,2}, \quad \mu_{1,2} \ll 1, \quad (53)$$

где $\eta = \sqrt{\beta}(x - Vt)$. Подставляя в правую часть (51) выражение (53) и линеаризуя левую часть системы (51) по малым $\mu_{1,2}$, получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} \mu_{1,2}'' - \beta \left(1 - \frac{2}{\text{ch}^2 \eta} \right) \mu_{1,2} - J(\mu_{1,2} - \mu_{2,1}) = \\ = \mp \frac{8}{3} \frac{V\beta^2}{J} \frac{\text{sh } \eta}{\text{ch}^3 \eta}. \end{aligned} \quad (54)$$

Взяв частное решение этой неоднородной системы, находим, что с используемой точностью выражения для $\chi_{1,2}$ имеют вид

$$\chi_{1,2} = 2 \text{arctg } e^\eta \pm \frac{4}{3} \frac{V\beta^2}{J^2} \frac{\text{sh } \eta}{\text{ch}^3 \eta}. \quad (55)$$

Выражения для $\psi_{1,2}$ при этом следующие:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{\pi}{3} - \frac{\beta}{\sqrt{3}J} \text{sech}^2 \eta + \sqrt{\frac{3\beta}{2J}} \frac{V}{c} \text{sech } \eta, \\ \psi_2 &= \frac{2\pi}{3} + \frac{\beta}{\sqrt{3}J} \text{sech}^2 \eta + \sqrt{\frac{3\beta}{2J}} \frac{V}{c} \text{sech } \eta. \end{aligned} \quad (56)$$

Полученное решение для медленных вихрей трансформируется в статическое ВВ решение (32), (33) в пределе $V \rightarrow 0$.

Для быстрых вихрей, вводя новую пару переменных $u = \chi_1 + \chi_2$, $w = \chi_1 - \chi_2$, можно переписать (51) в основном приближении следующим образом:

$$\begin{aligned} \left[1 - \left(\frac{V}{c} \right)^2 \right] u'' - \beta \sin u \cos w = 0, \\ \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{V}{c} \right)^2 \right] w'' - \beta \sin w \cos u - 2J \sin w = 0. \end{aligned} \quad (57)$$

Эта система обладает единственным решением для движущихся вихрей стационарного профиля с $w = 0$ и сводится к обычному СГУ с решением в виде кинка

$$\chi_1 = \chi_2 = 2\text{arctg } e^\xi, \quad (58)$$

где ξ отличается от η лоренцевским знаменателем

$$\xi = \sqrt{\beta} \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}.$$

В этом приближении из (П.3) получаем

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{\pi}{3} + \sqrt{\frac{3\beta}{2J}} \frac{V/c}{\sqrt{1 - (V/c)^2}} \text{sech } \xi, \\ \psi_2 &= \frac{2\pi}{3} + \sqrt{\frac{3\beta}{2J}} \frac{V/c}{\sqrt{1 - (V/c)^2}} \text{sech } \xi. \end{aligned} \quad (59)$$

В этих решениях опущены члены $\sim \beta \text{sech}^2 \eta$, поскольку для скоростей в интервале $c_2 \ll V \ll c$ они существенно меньше чем «динамические» слагаемые (пропорциональные V). Следовательно, решения (55), (56) могут быть использованы как аппроксимирующая формула для всего диапазона скоростей $V \ll c$.

Подставляя решения (55), (56) в соотношения (6), находим распределение z -компоненты намагниченности в движущемся вихре (поправками $\sim \beta$ к статическому распределению пренебрегаем):

$$S_{1,2}^z \approx \frac{\sqrt{3}}{2} \text{sech } \eta \left(1 \pm \sqrt{\frac{\beta}{2J}} \frac{V}{c} \text{sech } \eta \right). \quad (60)$$

Более точное выражение можно получить, используя высшие статические поправки из выражений (36). Из решения (60) видно, что $S_1^z \neq S_2^z$, т.е. распределение намагниченности асимметрично. Асимметрия движущегося вихревого решения, пропорциональная скорости вихря, наблюдается и при движении вихря в 2D системе [2,6]. Для рассматриваемой системы эта асимметрия приводит к эффективной сдвигке центра вихря в y -направлении.

Рассмотрим также решение для вихря с топологическим зарядом другого знака (см. замечание в начале разд. 2). Оно может быть получено заменой $\chi_{1,2}$ на $\pi - \chi_{1,2}$. Таким образом, знаки перед членами в круглых и квадратных скобках в системе (51) меняются на противоположные. Однако уравнение движения сохраняется при замене $V \rightarrow -V$, и окончательное решение выглядит так:

$$S_{1,2}^{z(AV)} \approx \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sech} \xi \left(1 \mp \sqrt{\frac{\beta}{2J}} \frac{V}{c} \operatorname{sech} \xi \right). \quad (61)$$

Следовательно, вихри с топологическими зарядами разного знака, движущиеся в одном направлении, смещаются вдоль оси y в противоположных направлениях.

5.2. Описание динамики внеплоскостного вихря в рамках метода коллективных переменных

Упрощенное описание 2D динамики ВВ обычно проводят в рамках метода коллективных переменных (МКП), в котором координаты центра ВВ $\mathbf{R}(t) = (X(t), Y(t))$ используются в качестве этих коллективных переменных. Данная процедура приводит к хорошо известным уравнениям Тиле для $(X(t), Y(t))$ [25,26]. (Соответствующие уравнения для вихрей Питаевского получены в работе [23].) Обобщение анзаца Тиле для $\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{r}, \mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}})$ дает следующее уравнение движения вихря [2,27]:

$$\hat{M}\ddot{\mathbf{R}} + \hat{G}\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{F}. \quad (62)$$

Здесь \hat{M} — эффективный тензор массы для ВВ, $\mathbf{F} = -\partial E/\partial \mathbf{R}$ — сила, действующая на ВВ, и \hat{G} представляет собой так называемый антисимметричный гиротензор с компонентами

$$G_{xy} = -G_{yx} = \int dx dy \left(\frac{\partial \varphi}{\partial Y} \frac{\partial S^z}{\partial X} - \frac{\partial S^z}{\partial Y} \frac{\partial \varphi}{\partial X} \right). \quad (63)$$

Для ВВ в бесконечном двумерном магнетике, где $\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{r} - \mathbf{R})$, в выражение (63) можно сделать подстановку $\partial/\partial X, \partial/\partial Y \rightarrow -\partial/\partial x, -\partial/\partial y$. После этого определение (63) совпадает с выражением для полной завихренности статического вихря $\Gamma = G_{xy} = 2\pi q S^z(\mathbf{r})|_{\mathbf{r}=\mathbf{R}}$, где q — это топологический заряд ВВ (в рассматриваемом случае $q = -1$). Поскольку

в нашем случае $\mathbf{S} \neq \mathbf{S}(\mathbf{r} - \mathbf{R})$, то компонента гиротензора G_{xy} не равна полной завихренности. Эту компоненту можно найти, используя полученное решение для движущегося вихря.

В настоящем разделе предлагается вариант обобщения МКП на случай систем, подобных рассматриваемой. Процедура вывода упрощенных уравнений движения весьма схожа с описанной в работах [2,25,27], но в нашем случае известно приближенное решение для движущегося вихря, и задача состоит в определении координат его центра (коллективных переменных). Для $X(t)$ координаты это сделать довольно просто: достаточно заменить x в решениях для движущегося ВВ на комбинацию $x - X(t)$. Однако определение Y -координаты центра вихря неоднозначно. В работе [27] авторы предлагали определить центр вихря по распределению поля φ . Мы считаем более последовательным определение через распределение поля S^z . Поскольку z -проекция намагниченности связана с плотностью магнонов, нам представляется естественным выбрать Y -координату вихря как центр масс магнонов, по аналогии с введением центра масс в классической механике. Определение коллективной координаты Y для центра движущегося ВВ при этом имеет вид

$$Y = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (S_1^z - S_2^z) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} (S_1^z + S_2^z) dx}. \quad (64)$$

Подставляя выражение (60) для S^z в это определение, получаем связь между Y -координатой ВВ и его скоростью:

$$Y = \frac{2}{\pi} \frac{\sqrt{\beta}}{J} \dot{X}. \quad (65)$$

Перепишем наши движущиеся решения (59) и (60) как функцию $x - X(t)$ и $Y(t)$:

$$\begin{aligned} S_{1,2}^z &= \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sech} \eta \pm \frac{\sqrt{3}}{4} \pi Y \operatorname{sech}^2 \eta, \\ \varphi_1 &= -\arctg \sqrt{3} \operatorname{th} \eta - 2\sqrt{3}\pi Y \frac{\operatorname{sh} \eta}{\operatorname{ch}^2 \eta + 3\operatorname{sh}^2 \eta}, \\ \varphi_2 &= -\pi + \arctg \sqrt{3} \operatorname{th} \eta - 2\sqrt{3}\pi Y \frac{\operatorname{sh} \eta}{\operatorname{ch}^2 \eta + 3\operatorname{sh}^2 \eta}, \end{aligned} \quad (66)$$

где $\eta = \sqrt{\beta}(x - X(t))$.

Найденные зависимости решения от коллективных переменных (координат центра ВВ) позволяют вывести эффективное уравнение для этих переменных обычным образом [2,27]. Однако определение гиротензора (63) необходимо модифицировать:

$$G_{xy} = -G_{yx} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \sum_{k=1}^2 \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial x} \frac{\partial S_k^z}{\partial Y} - \frac{\partial S_k^z}{\partial x} \frac{\partial \varphi_k}{\partial Y} \right). \quad (67)$$

Подставляя (66) в эту формулу, получаем выражение для гиротензора $G_{xy} = -G_{yx} = 3\pi$, которое отличается от выражения для гиротензора в двумерном бесконечном ферромагнетике $G_{xy} = -G_{yx} = 2\pi$. Это отличие связано с тем, что простейшая подстановка $\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{r} - \mathbf{R})$ не пригодна для рассматриваемой системы, где необходимо использовать $\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{r}, \mathbf{R})$.

Обобщенное уравнение Тиле (62), вытекающее из обобщенного анзаца $\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{r} - \mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}})$, получено в [2,27]. В нашей системе используемое комбинированное описание приводит к модификации определения массового тензора, который содержит производные по скорости центра вихря, и поскольку явный вид решения для ВВ, движущегося в x -направлении, известен, нахождение компоненты M_{xx} достаточно очевидно:

$$M_{xx} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \sum_{k=1}^2 \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial V} \frac{\partial S_k^z}{\partial x} - \frac{\partial S_k^z}{\partial V} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} \right), \quad (68)$$

где $\dot{X} = V$. Используя решение в исходном виде (не подставляя выражение скорости через Y), получаем вихревую массу в виде

$$M_{xx} = \frac{6\sqrt{\beta}}{J}. \quad (69)$$

Заметим, что полученная компонента массового тензора конечна в отличие от бесконечной массы вихря в двумерной системе. Однако можно показать [28], что для ферромагнетика конечного размера эффективная масса вихря имеет порядок $\ln L$, где L — расстояние от центра ВВ до ближайшей границы, что и объясняет конечность вихревой массы в нашей модели.

6. Заключение

В настоящей работе предложена квазиодномерная модель для описания вихревой структуры ПВ и ВВ и динамических свойств ВВ в легкоплоскостном ферромагнетике. В отличие от двумерного случая, где ПВ изучены только в рамках дискретного подхода, сохранено континуальное описание распределения намагниченности вдоль цепочек, образующих одномерную систему. Учет дискретности магнитной решетки в одном направлении является достаточным для существования в рамках такого подхода двух типов вихрей, ПВ и ВВ, т.е. при комбинированном описании можно изучать прин-

ципально дискретные особенности. В рамках предложенной модели найдено критическое значение анизотропии (точка ПВ — ВВ перехода). Полученный результат подкреплен численными исследованиями дискретных систем с аналогичной геометрией.

Аналитически получены распределения намагниченности в ПВ и ВВ (последнее в случае слабой анизотропии). Обсуждены особенности вихревого решения, возникающие из-за специальных свойств предложенной модели. Для рассматриваемой системы градиент азимутального угла φ убывает экспоненциально вдали от ядра вихря и разность между направлениями спинов подвижных цепочек стремится к конечному значению. Одномерный характер модели приводит к конечным значениям вихревой массы и энергии в отличие от случая двумерной бесконечной системы. В то же время, полученное вихревое решение обладает многими свойствами вихрей в двумерной системе.

Проанализировано движение «быстрых» и «медленных» ВВ стационарного профиля. Показано, что движущийся вихрь имеет асимметричную структуру, как и в двумерных системах. Получены аналитические выражения для вихрей, движущихся со скоростями $V \ll c$. Разработано также обобщение МКП, учитывающее комбинированное описание системы, и получены выражения для гиротензора и xx -компоненты тензора вихревой массы.

Данные результаты могут быть существенны при рассмотрении двумерных магнитных систем с сильным различием пространственных размеров.

Материалы настоящей статьи были частично представлены на конференциях EASTMAG-2001 (Екатеринбург) и «Nonlinear Lattice Structure and Dynamics» (Дрезден), 2001. Авторы выражают благодарность М.М. Богдану за полезные замечания и дополнения, касающиеся анализа стабильности ПВ.

Приложение

Для вывода упрощенной системы динамических уравнений, содержащей только переменные $\chi_{1,2}$, в уравнениях (9) можно оставить только линейные члены по малым величинам $\varepsilon_{1,2}$. Тогда для первой пары уравнений получаем

$$J\varepsilon_{1,2} + \frac{J}{2}\varepsilon_{2,1} \mp \dot{\chi}_{1,2} + \frac{J\sqrt{3}}{2}\sin^2 \frac{1}{2}(\chi_{1,2} - \chi_{2,1}) + \frac{\sqrt{3}}{4}(\beta \sin^2 \chi_{1,2} + (\chi'_{1,2})^2) = \varepsilon'_{1,2}, \quad (\text{П.1})$$

а для второй пары

$$\begin{aligned} \chi''_{1,2} - \frac{\beta}{2} \sin 2\chi_{1,2} - J \sin(\chi_{1,2} - \chi_{2,1}) \pm \dot{\epsilon}_{1,2} = \\ = -\frac{2}{\sqrt{3}} (\epsilon_{1,2} \chi'_{1,2})' + \frac{\beta}{\sqrt{3}} \epsilon_{1,2} \sin 2\chi_{1,2} + \\ + \frac{J}{\sqrt{3}} (\epsilon_{1,2} + \epsilon_{2,1}) \sin(\chi_{1,2} - \chi_{2,1}). \end{aligned} \quad (\text{П.2})$$

Точные выражения для $\epsilon_{1,2}$ следующие:

$$\begin{aligned} \epsilon_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{3J}} (2\dot{\chi}_{1,2} + \dot{\chi}_{2,1}) - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin^2 \frac{1}{2} (\chi_{1,2} - \chi_{2,1}) - \\ - \frac{\beta}{2\sqrt{3J}} (2\sin^2 \chi_{1,2} - \sin^2 \chi_{2,1}) - \\ - \frac{1}{2\sqrt{3J}} [(\chi'_{1,2})^2 - (\chi'_{2,1})^2] \pm \frac{2}{3\sqrt{3J^2}} (5\dot{\chi}_{1,2} + 4\dot{\chi}_{2,1})'' \end{aligned} \quad (\text{П.3})$$

Как показано выше, для локализованных решений стационарного профиля вида $\mathbf{S} = \mathbf{S}(x - Vt)$ имеем $\partial/\partial t \sim V\beta^{1/2}$, $\partial/\partial x \sim \beta^{1/2}$ и $(\chi_1 - \chi_2) \sim V\beta^{3/2}$. Для того чтобы получить асимптотический вид решения для движущегося вихря в (П.3) необходимо оставить члены только основного приближения.

Перейдем к анализу спектра спиновых волн в рамках упрощенных уравнений. После линеаризации уравнений (51) по малым $\chi_{1,2}$, подставляя $\chi_{1,2}(x, t) = \chi_{1,2} \sin(kx - \omega t)$, получаем

$$\omega_s^2 = \frac{\beta J}{2} + c^2 k^2, \quad \omega_a^2 = \left(3J^2 + \frac{3\beta J}{2} \right) + 3c^2 k^2, \quad (\text{П.4})$$

где $c = (J/2)^{1/2}$. Таким образом, эти дисперсионные соотношения отличаются от точных (49) членами, имеющими порядок Jk^2 . Причина этого заключается в том, что использовать эти законы дисперсии можно только при условии, что групповая скорость магнонов $V_{gr} = \partial\omega/\partial k \ll c$, т.е. для $k \ll \beta^{1/2}$. Следовательно, эти соотношения можно использовать только в основном приближении, и тогда полученные законы дисперсии совпадают с точными (49), (50) для $k \ll \beta^{1/2}$. Для получения результата, который давал бы лучшее соответствие с точными соотношениями (49), (50), необходимо корректировать вышеописанную процедуру вывода, оставляя в выражениях для $\epsilon_{1,2}$ члены, которыми мы ранее пренебрегли. В результате в линейном приближении из (П.3) получаем более точные соотношения для $\epsilon_{1,2}$:

$$\epsilon_{1,2} = \pm \frac{1}{J\sqrt{3}} (2\dot{\chi}_{1,2} + \dot{\chi}_{2,1}) \pm \frac{2}{J^2 3\sqrt{3}} (5\dot{\chi}_{1,2} + 4\dot{\chi}_{2,1})'' \quad (\text{П.5})$$

и соответственный набор уравнений для $\chi_{1,2}$:

$$\begin{aligned} \chi''_{1,2} - \beta\chi_{1,2} = J(\chi_{1,2} - \chi_{2,1}) + \\ + \frac{2}{3J} (2\ddot{\chi}_{1,2} + \ddot{\chi}_{2,1}) + \frac{4}{9J^2} (5\ddot{\chi}'_{1,2} + 4\ddot{\chi}'_{1,2}). \end{aligned} \quad (\text{П.6})$$

Тогда для симметричной ($\chi_1 = \chi_2$) моды получаем

$$\omega_s^2 = \left(\frac{J}{2} k^2 + \frac{J\beta}{2} \right) / \left(1 - \frac{2}{J} k^2 \right) \approx \left(\beta + k^2 \right) \left(\frac{J}{2} + k^2 \right), \quad (\text{П.7})$$

а для антисимметричной ($\chi_1 = -\chi_2$)

$$\begin{aligned} \omega_a^2 = \left(\frac{3J}{2} k^2 + \frac{3J}{2} \beta + 3J^2 \right) / \left(1 - \frac{2}{3J} k^2 \right) \approx \\ \approx \left(\beta + 2J + k^2 \right) \left(\frac{3J}{2} + k^2 \right). \end{aligned} \quad (\text{П.8})$$

Эти соотношения находятся в соответствии с точными значениями до членов порядка k^4 .

1. J.M. Kosterlitz and D.J. Thouless, *J. Phys.* **C6**, 1181 (1973).
2. F.G. Mertens and A.R. Bishop, *Nonlinear Sciences at the dawn of the 21st Century. Lecture Notes in Physics*, P.L. Christiansen, M.P. Soerensen, and A.C. Scott (eds.), Springer, Berlin (2000), p. 137.
3. R.P. Cowburn, D.K. Koltsov, A.O. Adeyeye, M.E. Welland, and D.M. Tricker, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 1042 (1999); R.P. Cowburn, *J. Phys.* **D33**, R1 (2000).
4. T. Shinjo, T. Okuno, R. Hassdorf, K. Shigeto, and T. Ono, *Science* **289**, 930 (2000); *ICR Ann. Rep.* **7**, 16 (2000).
5. H. Shima, K. Yu. Guslienko, V. Novosad, Y. Otani, K. Fukamichi, N. Kikuchi, O. Kitakami, and J. Shimada, *J. Appl. Phys.* **91**, 6952 (2002).
6. M.E. Gouvea, G.M. Wysin, A.R. Bishop, and F.G. Mertens, *Phys. Rev.* **B39**, 11840 (1989).
7. G.M. Wysin, *Phys. Rev.* **B49**, 8780 (1994).
8. B.A. Ivanov, H.J. Schnitzer, F.G. Mertens, and G.M. Wysin, *Phys. Rev.* **B58**, 8464 (1998).
9. G.M. Wysin and A.R. Völkel, *Phys. Rev.* **B52**, 7412 (1995).
10. А.С. Ковалев, Я.Е. Прилепский, *Вестник ХГУ, сер. Физика* **417**, 32 (1998); **440**, 25 (1999); *ФНТ* **29**, 71 (2003).
11. L. Thomas, F. Lioni, R. Ballou, D. Gatteschi, R. Sessoli, and B. Barbara *Nature*, **383**, 145 (1996); J. Kortus, M.R. Pedersen, C.S. Hellberg, and S.N. Khanna, *Eur. Phys. J.* **D16**, 177 (2001); N. Fujima, *ibid*, 185 (2001).
12. Т.А. Конторова, Я.И. Френкель, *ЖЭТФ* **8**, 89 (1938).
13. О.М. Braun and Yu.S. Kivshar, *Phys. Rep.* **306**, 1 (1998).
14. А.С. Ковалев, *ФНТ* **20**, 1034 (1994).
15. А.М. Косевич, В.П. Воронов, И.В. Манжос, *ЖЭТФ* **84**, 148 (1983).
16. L.M. Pismen, *Vortices in Nonlinear Fields*, Clarendon Press, Oxford (1999).

17. D.K. Campbell, M. Peyrard, and P. Sodano, *Physica D* **19**, 165 (1986).
18. A.J. Mikeska and M. Steiner, *Adv. Phys.* **90**, 191 (1991).
19. Н.Г. Вахитов, А.А. Колоколов, *Изв. ВУЗов: Радиофизика* **16**, 1020 (1973); М.М. Bogdan and А.М. Kosevich, *Proc. 4th Int. Workshop on Nonlinear and Turbulent Processes in Physics (Kiev)* **1**, А.Г. Sitenko and V.E. Zakharov (eds.), Naukova Dumka, Kiev (1989), p. 50.
20. Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш, *Специальные функции*, Наука, Москва (1964).
21. А.С. Ковалев, *ТМФ* **37**, 135 (1979).
22. N. Paranicolaou, *Phys. Lett.* **A186**, 119 (1994).
23. Т.И. Зуева, *ФНТ* **26**, 119 (2000).
24. А.М. Kosevich, В.А. Ivanov, and А.С. Kovalev, *Phys. Rep.* **194**, 117 (1990).
25. А.А. Thiele, *Phys. Rev. Lett.* **30**, 230 (1973).
26. D.L. Hubert, *Phys. Rev.* **B26**, 3758 (1982).
27. F.G. Mertens, H.-J. Schnitzer, and A.R. Bishop, *Phys. Rev.* **B56**, 2510 (1997).
28. А.С. Kovalev, F.G. Mertens, and H.-J. Schnitzer, submitted to *Eur. Phys. J. B*, (2003).
29. Б.Н. Филиппов, *ФНТ* **28**, 991 (2001).

One-dimensional model of vortex in easy-plane ferromagnet

A.S. Kovalev and J.E. Prilepsky

In order to give a qualitative description of the structure and dynamics of a vortex in a 2D magnetic system we propose a simple quasi-one-dimensional model of ferromagnet in a vortex configuration. This model describes the system of four parallel anisotropic ferromagnetic spin chains with the anisotropy of easy-plane type and involves the elements of continuous (along the chains) and discrete (normal to the chains) descriptions for spin distribution. Within the framework of the proposed model we can investigate analytically the structures of static and steady moving vortices. The analytical results on the static vortex structure are supplemented with numerical calculation for discrete system and show a good agreement with the numerical data. A generalized version of the collective coordinate approach is devised, which allows to extend this technique to the combined continuous-discrete description. We compare our results with the corresponding data for 2D easy-plane ferromagnets.