

Солитоны в упругих пластинах

А. С. Ковалев¹, А. П. Майер², Е. С. Соколова¹, К. Эклъ²

¹Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б. І. Веркина НАН України
пр. Ленина, 47, г. Харьков, 61103, Украина
E-mail: kovalev@ilt.kharkov.ua

²Институт теоретической физики Регенбургского университета
г. Регенбург, 93040, Германия

Статья поступила в редакцию 13 февраля 2002 г.

Исследована нелинейная динамика упругих сдвиговых волн в пластине при учете взаимодействия сдвиговой компоненты смещений с малоамплитудными сагиттальными компонентами. Выведены нелинейные эволюционные уравнения для поля сдвиговых смещений. Эти уравнения содержат дополнительные нелинейные дисперсионные члены, возникающие из-за взаимодействия со смещениями в сагиттальной плоскости. Изучены солитонные решения полученных уравнений и обсуждена возможность существования экзотических солитонов типа компактонов и пиконов.

Досліджено нелінійну динаміку пружних зсувних хвиль в пластині з урахуванням взаємодії зсувної компоненти зміщень з малоамплітудними сагітальними компонентами. Виведено нелінійні еволюційні рівняння для поля зсувних зміщень. Ці рівняння містять додаткові нелінійні дисперсійні члени, що виникають через взаємодію зі зміщеннями в сагітальній площині. Вивчено солітонні розв'язки отриманих рівнянь та обговорено можливість існування екзотичних солітонів типу компактонів і пиконів.

PACS: 43.25.+y, 68.35.-p.

Введение

Существование периодических и локализованных нелинейных стационарных волн обычно связывается с конкуренцией двух обстоятельств: нелинейностью системы и дисперсией линейных волн. В последнее время роль дисперсии тщательно исследовалась, в результате было продемонстрировано, что в слабо диспергирующих средах учет нелинейной дисперсии приводит к существованию новых типов солитонов: «компактонов» и «пиконов». Впервые такие возбуждения обсуждались применительно к магнетикам [1] (см. также [7–9]), позже в гидродинамике [2–4] и теории упругости [5,6].

В теории упругости исследование нелинейной динамики упругих волн в одномерных системах традиционно проводится в рамках уравнения Буссинеска (для продольных волн)

$$\rho v_{tt} - \lambda_0 v_{xx} - \tilde{\lambda}_0 a^2 v_{xxxx} - \Lambda_0 (v_x^2)_x = 0 \quad (1)$$

или модифицированного уравнения Буссинеска (для поперечных волн)

$$\rho u_{tt} - \lambda_1 u_{xx} - \tilde{\lambda}_1 a^2 u_{xxxx} - \Lambda_1 (u_x^3)_x = 0,$$

где λ_i и Λ_i — линейные и нелинейные упругие модули, $\tilde{\lambda}_1 \sim \lambda_i$ и a — постоянная решетки [10]. В приведенных уравнениях волна распространяется вдоль направления x (вдоль упругой цепочки), $v(x)$ — x -компонента и $u(z)$ — z -компонента смещений. Хорошо известно, что учет нелинейности волн (ангармонические слагаемые в (1), (2)) и их дисперсии (слагаемые с четвертыми пространственными производными в (1), (2)) приводит к существованию пространственно локализованных волн — солитонов. В приведенных выше примерах солитоны имеют вид нелинейных локализованных волн стационарного профиля $v = v(x - ct)$, $u = u(x - ct)$. Солитонные решения уравнения Буссинеска существуют при любом знаке дисперсии ($\tilde{\lambda}_0$) и нелинейности (Λ_0). В случае модифицированного уравне-

ния Буссинеска солитоны существуют только при условии $\tilde{\lambda}_1 \Lambda_1 > 0$. Реально в большинстве физических систем дисперсия обычно имеет определенный знак ($\tilde{\lambda}_1 > 0$) и нелинейность сдвиговых волн — «мягкая» ($\Lambda_1 < 0$), т.е. имеет место обратное неравенство $\tilde{\lambda}_1 \Lambda_1 < 0$. Более того, в реальных кристаллах собственная дисперсия линейных волн пренебрежимо мала и в длинноволновом приближении теории упругости, как правило, не учитывается [11]. Её учет приводит к теоретической возможности существования солитонов, но стационарные нелинейные волны при этом формируются на больших временах, когда уже необходимым становится учет затухания волны.

В случае поверхностных упругих волн их дисперсия может быть существенно увеличена при покрытии поверхности упругой среды пленкой другого материала (сдвиговые поверхностные волны Лява [12] или рэлеевские волны в среде с покрытием [13]). В случае упругих волн в пластине даже с идеальной поверхностью (без покрытия) волны Рэлея–Лэмба (РЛ) и высшие ветви сдвиговых поверхностных волн также имеют сильную дисперсию [12]. В приведенных выше примерах поверхностных волн Лява в полупространстве и волн Рэлея–Лэмба в пластинах дисперсионное соотношение в длинноволновом приближении имеет вид

$$\omega^2 = c^2 k^2 (1 + b h^2 k^2), \quad (3)$$

где c — скорость звука соответствующей волны, h — толщина покрытия или пластины и b — константа порядка единицы. Закон дисперсии линейных волн в рамках обычного модифицированного уравнения Буссинеска отличается от выражения (3) заменой h на постоянную решетки a . Таким образом, наличие пленки с толщиной существенно большей моноатомной или конечной толщины пластины приводят к увеличению дисперсии в меру большого параметра $(h/a)^2 \gg 1$. При таких условиях формирование нелинейной волны стационарного профиля является экспериментально наблюдаемым эффектом [14].

Теоретически нелинейные упругие поверхностные волны и поверхностные солитоны были исследованы в [15–19]. Распространение нелинейных волн в упругой пластине обсуждалось в [20, 21]. В [20] авторы изучили чисто сдвиговые волны в упругой пластине и показали, что учет неоднородности волны по толщине пластины приводит к возможности существования солитонов. В [21] было учтено влияние сагиттальных компонент на периодические сдвиговые нелинейные волны в такой же

пластине и указано на сильное взаимодействие разных компонент смещений.

Ниже мы рассмотрим задачу о распространении почти поперечных горизонтальных сдвиговых нелинейных волн и соответствующих солитонов в тонкой упругой пластине конечной толщины. В бесконечно тонкой пленке ее изгибная жесткость отсутствует, и возможны лишь упругие смещения в двух направлениях в плоскости пленки. Возникающее взаимодействие этих компонент смещений приводит лишь к изменению скорости продольных волн и перенормировке (увеличению) константы Λ_1 в уравнении (2), поскольку собственная дисперсия продольных волн, как и поперечных — незначительна. Иначе обстоит дело в пластине конечной толщины, где отличны от нуля все три компоненты смещений. При этом возможно существование так называемых волн Рэлея–Лэмба с компонентами смещений в сагиттальной плоскости, обладающих сильной дисперсией. Нелинейное взаимодействие сдвиговой волны с этими волнами приводит к увеличению дисперсии и сдвиговой горизонтальной волны. Но эта дисперсия носит нелинейный характер и приводит к тому, что профиль солитонных решений может существенно измениться, и солитоны примут экзотическую форму компактонов и пиконов. Включение в рассмотрение малых смещений в сагиттальной плоскости важно и с другой стороны. Как будет показано, чисто сдвиговые волны неустойчивы относительно излучения волн Рэлея–Лэмба, и это взаимодействие волн разной поляризации носит нелинейный характер.

1. Формулировка модели и вывод основных динамических уравнений

Рассмотрим распространение нелинейных упругих волн в следующей геометрии: неограниченная в X - и Y -направлениях упругая пластина конечной толщины $2h$ занимает объем $-h \leq z \leq h$. Волна однородна вдоль направления Y и распространяется вдоль оси X (рис. 1). Обозначим через

$$u = u_{(y)}(x, z, t), \quad v = u_{(x)}(x, z, t), \quad w = u_{(z)}(x, z, t), \quad (4)$$

соответственно горизонтальное сдвиговое смещение $u_{(y)}$ и смещения в сагиттальной плоскости $u_{(x)}$ и $u_{(z)}$.

В случае кристалла с кубической симметрией в гармоническом приближении плотность энергии

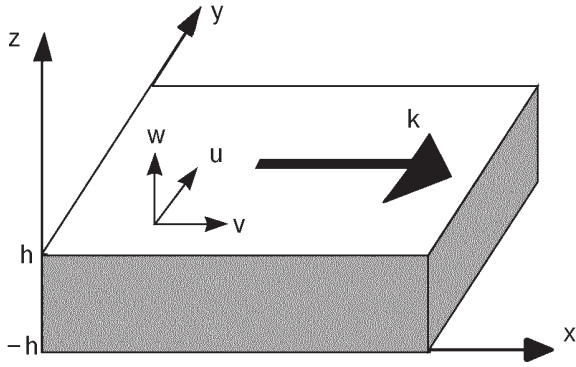


Рис. 1. Геометрия рассматриваемой задачи.

(при учете однородности смещений вдоль направления Y) равна:

$$F_0 = \frac{1}{2} c_{11} (v_x^2 + w_z^2) + \frac{1}{2} c_{44} [u_x^2 + u_z^2 + (v_z + w_x)^2] + c_{12} v_x w_z, \quad (5)$$

где нижние индексы у компонент смещения обозначают дифференцирование по соответствующей координате и в обозначениях [11]: $c_{11} = \lambda_{xxxx}$, $c_{12} = \lambda_{xxyy}$, $c_{44} = \lambda_{xyxy}$.

Предположим, что распространяющаяся нелинейная волна имеет в основном горизонтальную сдвиговую поляризацию, т.е. $u \gg v, w$, и перемещается со скоростями, близкими к скорости линейных сдвиговых волн. Поэтому мы учтем собственную дисперсию волны только для этой компоненты смещений:

$$F_{\text{dis}} = -\frac{a^2}{2} A (u_{xx}^2 + u_{zz}^2) - \frac{a^2}{2} B u_{xz}^2 \quad (6)$$

(в кубическом кристалле при взаимодействии лишь ближайших соседей $B=0$ и $A=c_{44}/12$).

Ангармоническая часть свободной энергии может быть приближенно записана (при тех же условиях $u \gg v, w$ и $\partial/\partial y=0$) как в [19]:

$$F_{\text{an}} \cong \frac{1}{2} s_{112121} (u_x^2 v_x + u_z^2 w_z) + \frac{1}{2} s_{332121} (u_x^2 w_z + u_z^2 v_x) + s_{132123} (v_z + w_x) u_x u_z + \frac{1}{24} s_{21212121} u_x^4. \quad (7)$$

Ниже мы убедимся, что в малоамплитудных сдвиговых солитонах, движущихся со скоростями c , близкими к скорости поперечных волн c_t , амплитуда и область локализации в направлении распространения определяются малым парамет-

ром $\varepsilon = 1 - (c/c_t)^2 \ll 1$. При этом $u \sim 1$, $v \sim w \sim \sqrt{\varepsilon}$, $\partial/\partial x \sim \partial/\partial z \sim \sqrt{\varepsilon}$, и все слагаемые, учтенные в формуле (7), имеют порядок малости ε^2 . Отброшенные ангармонические слагаемые, содержащие тройные произведения производных от функций $v(x, z)$ и $w(x, z)$, имеют порядок малости ε^3 .

Динамические уравнения, соответствующие полной энергии $F = F_0 + F_{\text{dis}} + F_{\text{an}}$, с той же степенью точности имеют вид

$$\begin{aligned} \rho u_{tt} = & c_{44} (u_{xx} + u_{zz}) + Aa^2 (u_{xxxx} + u_{zzzz}) + \\ & + s_{112121} ((u_x v_x)_x + (u_z w_z)_z) + \\ & + s_{132123} ((u_z v_z)_x + (u_x w_x)_z + (u_x v_z)_z + \\ & + (u_x w_x)_z) + s_{332121} ((u_x w_z)_x + (u_z v_x)_z) + \\ & + \frac{1}{6} s_{21212121} (u_x^3)_x, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \rho v_{tt} = & c_{11} v_{xx} + c_{44} (v_{zz} + w_{xz}) + \\ & + c_{12} w_{xz} + s_{112121} u_x u_{xx} + \\ & + s_{132123} (u_x u_z)_z + \frac{1}{2} s_{332121} (u_z^2)_x, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \rho w_{tt} = & c_{11} w_{zz} + c_{44} (w_{xx} + v_{xz}) + \\ & + c_{12} v_{xz} + s_{112121} u_z u_{zz} + \\ & + s_{132123} (u_x u_z)_x + \frac{1}{2} s_{332121} (u_x^2)_z. \end{aligned} \quad (10)$$

Эти уравнения должны быть дополнены граничными условиями на свободных поверхностях пластины $z = \pm h$:

$$\begin{aligned} c_{44} u_z + Aa^2 u_{zzz} + s_{112121} u_z w_z + \\ + s_{332121} u_z v_x + s_{132123} u_x (v_z + w_x) = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

$z = \pm h,$

$$c_{44} (v_z + w_x) + s_{132123} u_x u_z = 0, \quad z = \pm h, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} c_{11} w_z + c_{12} v_x + \frac{1}{2} s_{112121} u_z^2 + \\ + \frac{1}{2} s_{332121} u_x^2 = 0, \quad z = \pm h. \end{aligned} \quad (13)$$

Нас интересуют решения, в которых в основном приближении (при $v, w=0$) чисто сдвиговая волна не зависит от координаты z . Поэтому, полагая $u(x, z) = u^{(0)}(x) + u^{(1)}(x, z)$, где $u^{(1)} \ll u^{(0)}$, в следующем приближении при $v, w \ll u$ и малых ангармонических членах зависимость $u = u(z)$ следует учитывать только в линейных слагаемых уравнений (8)–(13). При этом для волн стационарного профиля вида $u = u(x - ct, z)$, $v = v(x - ct, z)$, $w = w(x - ct, z)$ уравнения движения и граничные условия упрощаются следующим образом:

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{c^2}{c_t^2}\right)u_{xx}^{(0)} + Aa^2u_{xxxx}^{(0)} + u_{zz}^{(1)} + \\ & + Aa^2u_{zzzz}^{(1)} + \alpha(u_x^{(0)}v_x)_x + \beta(u_x^{(0)}w_z)_x + \\ & + \xi u_x^{(0)}(v_{zz} + w_{xz}) + r(u_x^{(0)3})_x = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

$$v_{zz} + \kappa v_{xx} + \nu w_{xz} + \alpha u_x^{(0)}u_{xx}^{(0)} = 0, \quad (15)$$

$$\kappa w_{zz} + \varepsilon w_x + \nu v_{xz} = 0, \quad (16)$$

$$u_z^{(1)} + Aa^2u_{zzz}^{(1)} + \xi u_x^{(0)}(v_z + w_x) = 0, \quad z = \pm h, \quad (17)$$

$$v_z + w_x = 0, \quad z = \pm h, \quad (18)$$

$$\kappa w_z + (\nu - 1)v_x + \frac{\beta}{2}u_x^{(0)2} = 0, \quad z = \pm h, \quad (19)$$

где $\kappa = c_{11}/c_{44}$, $\nu = c_{12}/c_{44} + 1$, $\varepsilon = 1 - (c/c_t)^2$, $\mu = 1 - (c/c_l)^2 = 1 - (1 - \varepsilon)/\kappa$, $\alpha = s_{112121}/c_{44}$, $\beta = s_{332121}/c_{44}$, $\xi = s_{132123}/c_{44}$, $r = s_{212121}/6c_{44}$, $c_t = \sqrt{c_{44}/\rho}$ — поперечная скорость звука и $c_l = \sqrt{c_{11}/\rho}$ — продольная скорость звука. (Мы заменили $A/c_{44} \rightarrow A$). Проинтегрировав уравнение (14) по толщине пластины и воспользовавшись граничным условием (17), легко получить одномерное уравнение для сдвиговых смещений $u^{(0)}$ в главном приближении:

$$\begin{aligned} & \left(1 - (c/c_t)^2\right)u_{xx}^{(0)} + Aa^2u_{xxxx}^{(0)} + r(u_x^{(0)3})_x + \\ & + \left(u_x^{(0)} \frac{1}{2h} \int_{-h}^h dz (\alpha v_x + \beta w_z)\right)_x = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Для нахождения замкнутого уравнения для $u^{(0)}$ необходимо выразить функции v и w через смещения $u^{(0)}$, воспользовавшись уравнениями (15), (16), которые представляют собой систему неоднородных линейных уравнений и могут быть решены с помощью преобразования Фурье:

$$\begin{aligned} v &= \int_0^\infty dk \sin kx V(k, z), \quad w = \int_0^\infty dk \cos kx W(k, z), \\ u_x^{(0)2} &= 2 \int_0^\infty dk \cos kx \chi(k). \end{aligned} \quad (21)$$

Решение уравнений (15), (16) для фурье-компонент сагиттальных смещений V и W имеет вид

$$\begin{aligned} V &= V_1 \text{ch } \gamma_1 z + V_2 \text{ch } \gamma_2 z - \frac{\alpha \chi(k)}{\kappa \mu k}, \\ W &= W_1 \text{sh } \gamma_1 z + W_2 \text{sh } \gamma_2 z, \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_i^2 &= k^2 \varphi_i^2 = \frac{k^2}{2} (p \pm \sqrt{p^2 - 4\mu\varepsilon}), \quad p = \kappa\mu + \frac{\varepsilon - \nu^2}{\kappa}, \\ W_i &= V_i (\varphi_i^2 - \kappa\mu) / (\nu\varphi_i) \end{aligned} \quad (23)$$

Зависимости V_i от $\chi(k)$ и k могут быть найдены из граничных условий (18), (19):

$$\begin{aligned} V_{1,2} &= \pm \chi(k) \left(\beta - \alpha \frac{\nu - 1}{\kappa\mu} \right) \varphi_{2,1} \text{sh}(\gamma_{2,1}h) \times \\ &\times (\kappa\varphi_{1,2}^2 + \varepsilon(\nu - 1))G^{-1}, \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} G &= \text{ch}(\gamma_1 h) \text{ch}(\gamma_2 h) \times \\ &\times \sum_{n=1}^2 (-1)^n \gamma_n \text{th } \gamma_n h (\kappa^2\mu - (\nu - \varepsilon)^2 - \kappa(1 - \varepsilon)\varphi_n^2). \end{aligned} \quad (25)$$

Таким образом, выражения (21)–(25) задают зависимости $v = v(x - ct, z)$ и $w = w(x - ct, z)$. Если функция $\chi(k)$ соответствует солитонному решению, локализованному в области $L \sim 1/\sqrt{\varepsilon}$, то решения для v и w также будут локализованы в этой области. Зависимость этих решений от координаты z может быть различной. При $c < c_t$ существует лишь один тип солитонов с вещественными γ_i . При $c > c_t$ имеется бесконечная последовательность солитонных решений с различными мнимыми значениями γ_2 . Однако в этих решениях поле смещений осциллирует с координатой z , и они не удовлетворяют условиям, при которых можно ограничиться используемым приближением для ангармонической энергии (7). Поэтому ниже мы остановимся лишь на основном солитонном решении. Ему соответствует следующий профиль смещений: деформации v_x, v_z, w_x, w_z существенно меньше (в меру $\sqrt{\varepsilon}$) основной сдвиговой деформации u_x , смещения в перпендикулярном направлении антисимметричны относительно ее середины $w(z) = -w(-z)$ (т.е. прохождение солитона сопровождается волной сжатия пластины), а продольные смещения симметричны относительно середины пластины ($v(z) = v(-z)$).

Подставляя решение (21)–(25) в уравнение (20), получаем окончательное замкнутое интегродифференциальное уравнение для $u^{(0)}$ (далее для простоты опускаем индекс (0)):

$$\left(1 - \frac{c^2}{c_t^2}\right)u_{xx} + Aa^2u_{xxxx} + \left(r - \frac{\alpha^2}{2\kappa\mu}\right)(u_x^3)_x +$$

$$+ \kappa \sqrt{\mu \varepsilon} \left(\beta - \alpha \frac{v-1}{\kappa \mu} \right)^2 \sqrt{p^2 - 4\mu \varepsilon} \times \left(u_x \int_0^\infty dk \cos kx \chi \frac{\text{sh}(\gamma_1 h) \text{sh}(\gamma_2 h)}{hG} \right)_x = 0. \quad (26)$$

Поскольку рассматриваются волны, близкие к чисто сдвиговому, то их скорость близка к c_t и параметр ε мал ($\varepsilon \ll 1$). При таких допущениях уравнение (26) может быть упрощено:

$$\varepsilon u_{xx} + Aa^2 u_{xxxx} + 2C_1 (u_x^3)_x + 4C_3 \left(u_x \int_0^\infty dk \cos kx \chi(k) M(k) \right)_x = 0, \quad (27)$$

где ядро интегрального оператора $M(k)$ имеет следующий вид:

$$M(k) = \frac{\text{th}(kh\sqrt{p})}{(kh\sqrt{p}) - \text{th}(kh\sqrt{p})sK/\text{th } s}, \quad s = kh \sqrt{\frac{\varepsilon \mu}{p}} \quad (28)$$

и

$$C_1 = \frac{1}{2} \left(r + \frac{\alpha^2}{2(1-\kappa)} \right), \quad p = \kappa - 1 - \frac{v^2}{\kappa}, \quad (29)$$

$$C_3 = \frac{p}{4} \left(\alpha \frac{v-1}{1-\kappa} + \beta \right)^2, \quad K = \frac{(\kappa(\kappa-1) - v(v-1))^2}{\kappa(\kappa-1)}. \quad (30)$$

Параметр p может принимать и отрицательные значения (см. таблицу). В этом случае необходимо во всех формулах заменить $p \rightarrow |p|$.

Если характерный пространственный размер уединенной волны имеет порядок величины L , то функция $\chi(k)$ даёт основной вклад в интегральное слагаемое в (27) в области волновых чисел $k < 1/L$. Благодаря малости ε в этом промежутке, параметр s мал в наиболее интересном случае $L \geq h$ и даже при $L < h$. При $c < c_t$ имеем $\varepsilon > 0$ (s вещественно). Таким образом, можно принять в (27) $s/\text{th } s \cong 1$ и переписать ядро интегрального оператора в виде

$$M(k) \approx \frac{\text{th}(kh\sqrt{p})}{kh\sqrt{p} - K \text{th}(kh\sqrt{p})}. \quad (31)$$

Знаменатель ядра (31) обращается в нуль при критическом значении параметра $k: k_* \sim 1/h$. Этот полюс ядра соответствует первой симметричной волне Рэля–Лэмба с фазовой скоростью, равной скорости солитона $c \cong c_t$ (см. ниже). Таким обра-

зом, движущийся в пластине солитон, представляющий собой локализованную сдвиговую волну, должен испускать волны Рэля–Лэмба, и его стационарное движение, строго говоря, невозможно. При $c > c_t$ параметр ε становится отрицательным, и в (28) необходимо заменить $\text{th } s$ на $\text{tg } s$. При этом прямая $\omega = ck$ пересекает закон дисперсии волн Рэля–Лэмба в бесконечной последовательности дополнительных точек с $k_n \sim n/h\sqrt{|\varepsilon|}$. В этом случае движущийся солитон излучает всю последовательность волн Рэля–Лэмба с фазовыми скоростями, близкими к скорости поперечных волн. Несложно найти вид излучаемых волн: $v, w \sim \sum_s A_s \sin [k_s(x - c_t t)] \chi(k_s)$, где $k_s = k_*, k_1, k_2, \dots$. Ситуация упрощается в случае слабо локализованных солитонов с пространственным размером $L \gg h$, когда фурье-преобразование профиля солитона $\chi(k)$ экспоненциально локализуется в промежутке $k < 1/L \ll k_*$. На рис. 2 изображены зависимости от k ядра интегрального слагаемого M при $c < c_t$ (сплошная линия) и фурье-преобразования квадрата распределения поля деформации в солитоне χ (пунктирная линия), которое в пределе стандартного солитона модифицированного уравнения Буссинеска имеет вид $\chi(k) \sim k/\text{sh}(\xi k/\sqrt{\varepsilon})$, где $\xi \sim 1$. В этом случае энергия, излучаемая в каждую РЛ-волну, имеет порядок величины: $E_* \sim \exp(-L/h)$, $E_n \sim \exp(-nL/h\sqrt{\varepsilon})$, т.е. энергия, излучаемая малоамплитудным солитоном во все РЛ-волны, конечна, мала и определяется в основном возбуждением основной симметричной РЛ-моды. Таким образом, для таких слаболокализованных солитонов можно пренеб-

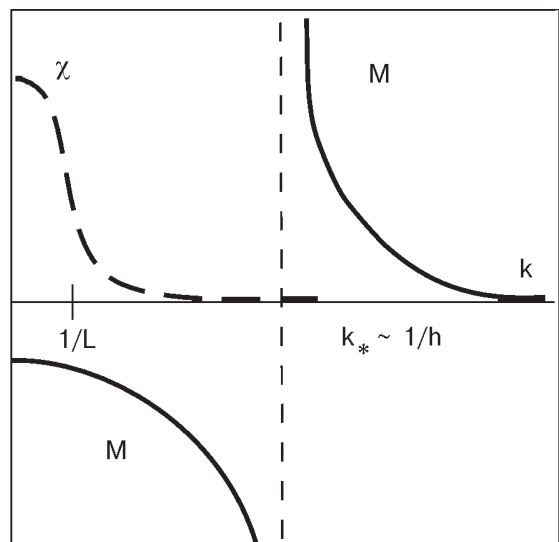


Рис. 2. Зависимости от волнового числа k ядра M интегрального слагаемого уравнения (27) (сплошная линия) и фурье-преобразования солитонного профиля χ (пунктирная линия).

речь эффектом излучения. Так как максимальное значение аргумента в ядре M в данном пределе порядка $(kh\sqrt{p})_{\max} \sim h/L \ll 1$, ядро можно упростить и записать в виде

$$M \approx \frac{1}{1-K} + \frac{pk^2h^2}{3(1-K)^2}. \quad (32)$$

В этом пределе уравнение (27) становится дифференциальным:

$$\begin{aligned} \epsilon u_{xx} + Aa^2u_{xxxx} + 2(C_1 + \frac{C_3}{1-K})(u_x^3)_x - \\ - \frac{2pC_3}{3(1-K)^2}h^2(u_x(u_x^2)_{xx})_x = 0. \end{aligned} \quad (33)$$

После замены слагаемого c^2u_{xx} на u_{tt} уравнение (33) примет вид модифицированного уравнения Буссинеска (2)

$$\begin{aligned} \rho u_{tt} - \lambda_1 u_{xx} - \tilde{\lambda}_1 a^2 u_{xxxx} - \Lambda_1 (u_x^3)_x - \\ - Nh^2 (u_x (u_x^2)_{xx})_x = 0, \end{aligned} \quad (34)$$

где $\lambda_1 = c_{44}$, $\tilde{\lambda}_1 = A$, $\Lambda_1 = 2c_{44}(C_1 + C_3/(1-K))$ и $N = 2pc_{44}C_3(3(1-K)^2)^{-1}$.

Это уравнение содержит новый нелинейный дисперсионный член $\sim h^2(u_x(u_x^2)_{xx})_x$ в дополнение к обычному линейному дисперсионному слагаемому $\sim a^2u_{xxxx}$.

Заметим, что уравнение этого же типа может быть выведено из уравнения движения дискретной ангармонической цепочки с нелинейным потенциалом межчастичного взаимодействия вида $\sim (u_n - u_{n-1})^4$. После разложения в ряд этих разностей в уравнении (2) появляется добавочный член $-\Lambda_1 a^2 (u_x (u_x^2)_{xx})_x / 8$. Но в уравнении (34) такое слагаемое пропорционально не a^2 , а h^2 и гораздо более важно для реальных пластин с $h/a \gg 1$. Оно приводит к изменению стандартной формы солитонного решения.

В случае более коротких нелинейных локализованных волн с пространственным размером порядка толщины пластины $L \sim h$ форма солитона должна изменяться существенно, так как в области интегрирования $k < 1/L \sim 1/h$ в (27) аргумент $kh\sqrt{p}$ в ядре (31) меняется сильно. В этом пределе излучение волн с сагиттальной поляризацией увеличивается. Но для качественного описания солитонов с размером $L < 1/k_* \sim h$ при условии пренебрежения диссипацией можно заменить ядро (31) упрощенным выражением

$$\tilde{M} = \frac{1}{(1-K) - (kh\sqrt{p})^2/3}, \quad (35)$$

которое обобщает выражение (32) для $kh\sqrt{p} \sim 1$, имеет правильные асимптотики при $k \ll 1/h$ и

учитывает основной полюс ядра интегрального оператора в $k_* \sim 1/h$. (Выражения (31) и (35) по-разному ведут себя при $k \rightarrow \infty$: $M \sim 1/k$ и $\tilde{M} \sim 1/k^2$. Но это различие не существенно, так как функция $\chi(k)$ обрезает интеграл при $k \sim 1/h$). Заменяя $M \rightarrow \tilde{M}$ в (27) и разлагая (35) в ряд

$$\tilde{M} = \frac{1}{1-K} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{k^2 h^2 p}{3(K-1)} \right)^n,$$

можно переписать интегральную часть (27) в форме

$$\frac{4C_3}{1-K} \left(u_x \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{h^2 p}{3(1-K)} \right)^n \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} \frac{u_x^2}{2} \right)_x. \quad (36)$$

После интегрирования уравнения (27) по x необходимо разделить его на u_x и подействовать оператором

$$1 + \frac{h^2 p}{3(K-1)} \frac{\partial^2}{\partial x^2},$$

получим следующее нелинейное дифференциальное уравнение:

$$\begin{aligned} \epsilon u_x + Aa^2u_{xxx} + 2(C_1 + \frac{C_3}{1-K})u_x^3 - \\ - \frac{2C_1ph^2}{3(1-K)}u_x(u_x^2)_{xx} - \frac{Apa^2h^2}{3(1-K)}u_x \left(\frac{u_{xxx}}{u_x} \right)_x = 0. \end{aligned} \quad (37)$$

Это уравнение похоже на уравнение (33), но применимо и в случае $L \sim h$.

2. Линейные и нелинейные периодические волны в пластине

Поскольку в нашей задаче исключительно важную роль играют резонансные явления, прежде всего рассмотрим возможные линейные волны в упругой пластине. В линейном пределе уравнения (8)–(10) разделяются и первое из них описывает сдвиговые волны с дисперсионным соотношением $\omega = c_t k \sqrt{1 - Aa^2 k^2}$.

Линеаризованные уравнения (9), (10) с граничными условиями (12), (13) имеют решение в виде волн Рэля–Лэмба. В этом случае формулы (22), (23) верны (с $\chi = 0$ в (22)), если $\epsilon = 1 - \omega^2/c_t^2 k^2$ и $\mu = 1 - \omega^2/c_l^2 k^2$, а равенство $G = 0$ с G , определяемым формулой (25), дает дисперсионное соотношение волн Рэля–Лэмба в пластине кубического кристалла:

$$\frac{\varphi_1 \operatorname{th}(kh\varphi_1)}{\varphi_2 \operatorname{th}(kh\varphi_2)} \frac{\kappa^2\mu - (\nu - \varepsilon)^2 - \kappa(1 - \varepsilon)\varphi_1^2}{\kappa^2\mu - (\nu - \varepsilon)^2 - \kappa(1 - \varepsilon)\varphi_2^2} = 1. \quad (38)$$

Если положить $\nu = \kappa - 1$, то это уравнение трансформируется в хорошо известное выражение [12] для закона дисперсии волн Рэля-Лэмба в случае изотропного материала. При этом в пределе коротких волн с $k \gg 1/h$ для основной симметричной РЛ-волны и нижней антисимметричной изгибной волны получается уравнение для скорости рэлеевских волн c_R в полупространстве: $4\sqrt{\varepsilon\mu} = (\varepsilon + 1)^2$, а в пределе длинных волн с $k \ll 1/h$ равенство $4\mu = (\varepsilon + 1)^2$ дает граничную скорость волн Рэля-Лэмба $c_0 = 2c_t\sqrt{1 - 1/\kappa}$. Во всех случаях рэлеевская скорость c_R меньше скорости сдвиговой волны $c_{sh} \cong c_t$, а максимальная скорость волн Рэля-Лэмба выше c_t (но ниже скорости продольных волн c_l). Дисперсионная кривая $\omega = \omega(k)$ для основной симметричной РЛ-волны изменяет свой наклон от c_0 до c_R в области значений волнового числа $k \sim 1/h$ и пересекает линию закона дисперсии сдвиговых поверхностных волн при $k \sim 1/h$. Например, в частном случае «материала Пуассона» ($\kappa = 3$) пересечение происходит при $k_* \cong 0,53/h$. Эта точка k_* соответствует полюсу ядра M , который обсуждали в предыдущем разделе. Рассмотренные дисперсионные соотношения представлены на рис. 3,а (см. также рис. 1 в [21]).

Для малоамплитудных нелинейных периодических волн приближенное решение уравнений (8)–(10) в так называемом «резонансном приближении» может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} u &= u_0 \sin \frac{1}{2}(kx - \omega t), \\ v &= V \sin(kx - \omega t) + qx, \quad w = W \cos(kx - \omega t), \end{aligned} \quad (39)$$

где ω и k – частота и волновое число волны. Здесь величина $q = -\beta k^2 u_0^2 / 16(\nu - 1)$ представляет собой среднюю продольную деформацию, которая сопровождается распространение нелинейной периодической волны. После подстановки решения (39) в уравнения (8)–(10) и граничные условия (11)–(13) получаем алгебраическое уравнение, играющее роль уравнения (26) для периодических волн:

$$\begin{aligned} \varepsilon - Aa^2 \frac{k^2}{4} + \left(3r - \frac{\alpha^2}{2\kappa\mu} - \frac{\alpha\beta}{\nu - 1} \right) \frac{k^2 u_0^2}{16} - \\ - \kappa\sqrt{\mu\varepsilon} \left(\beta - \alpha \frac{\nu - 1}{\kappa\mu} \right)^2 \sqrt{p^2 - 4\mu\varepsilon} \times \end{aligned}$$

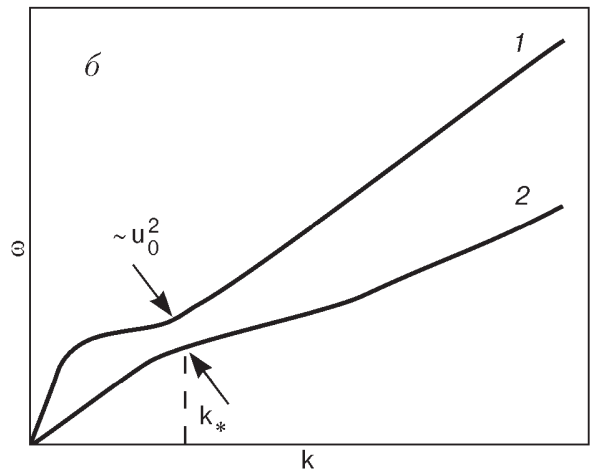
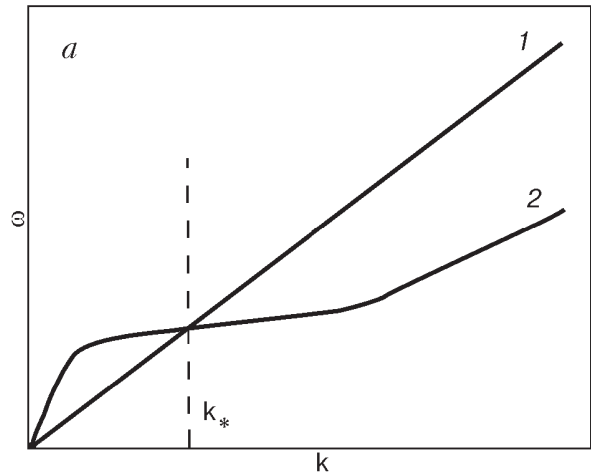


Рис. 3. Законы дисперсии основной ветви сдвиговых волн (1) и нижней ветви симметричных волн Рэля-Лэмба (2) в линейном приближении (а) и при учете их нелинейного взаимодействия (б).

$$\times \frac{\operatorname{sh}(\gamma_1 h) \operatorname{sh}(\gamma_2 h) k^2 u_0^2}{hG} \frac{1}{32} = 0. \quad (40)$$

В случае изотропного «материала Пуассона» (когда $\nu = 1$, $\kappa = 3$, $\gamma_1 = k\sqrt{\varepsilon}$, $\gamma_2 = k\sqrt{\mu}$) это уравнение трансформируется в следующее:

$$\left(\varepsilon - \frac{\alpha^2 k^2}{4} A \right) \Re = \frac{k^2 u_0^2}{32} F(1 - \varepsilon - J \Re), \quad (41)$$

где зануление функции

$$\Re = \frac{4kh\sqrt{\varepsilon}}{\operatorname{th}(kh\sqrt{\varepsilon})} - \frac{(1 + \varepsilon)^2 kh}{\sqrt{\mu} \operatorname{th}(kh\sqrt{\mu})} \quad (42)$$

соответствует закону дисперсии волн Рэля-Лэмба, $F = (\beta - \alpha/3\mu)^2$, $J = 2(3r - \alpha\beta - \alpha^2/6\mu)/F$, $\mu = (2 + \varepsilon)/3$.

Соответствующие дисперсионные кривые для значений волновых векторов k в области

$k \sim 1/h$ представлены на рис. 3,б. Теперь две ветви дисперсионного соотношения для горизонтальной сдвиговой волны и основной симметричной волны Рэлея–Лэмба разделены, и вырождение в точке $k = k_*$ снимается.

В частном случае волн, близких к сдвиговым (вблизи точки пересечения линейных сдвиговых и РЛ-волн), закон дисперсии имеет вид

$$\omega \cong c_t k - \frac{1}{8} c_t A a^2 k^3 - u_0^2 \frac{k^3}{64 c_t} F\left(\frac{1}{\mathfrak{R}} - J\right), \quad (43)$$

где функция $\mathfrak{R} \approx 4 - kh / (\sqrt{\mu} \operatorname{th}(kh\sqrt{\mu}))$ изменяется от 2,5 при $k=0$ до нуля при $k_* \cong 3,23/h$ и отрицательна при $k > k_*$. Стабильность нелинейной периодической волны, близкой к сдвиговой волне, зависит от знаков параметров A и $(J - 1/\mathfrak{R})$. Обычно $A > 0$ и $r < 0$, и в случае $\operatorname{sgn} J = \operatorname{sgn} r < 0$ мы имеем $\partial^2 \omega / \partial k^2 < 0$ для всех k и $\partial \omega / \partial u_0^2 < 0$ в интервалах $k < k_*$ и $k > \zeta(1 + 1/4|J|)k_* = \vartheta k_*$, $\zeta < 1$. В этих областях k нелинейная волна, близкая к сдвиговой, согласно критерия Лайтхилла [10] модуляционно устойчива. Однако в узком интервале длин волн, меньших толщины пластины с $k_* < k < \vartheta k_*$, такая волна становится модуляционно неустойчивой. Развитие этой неустойчивости может привести к образованию так называемых солитонов огибающей. В настоящей работе мы не будем рассматривать этот тип нелинейных локализованных возбуждений.

3. Солитонные возбуждения в ангармонической пластине

Рассмотрим возможность распространения солитонов стационарного профиля в нелинейной пластине. Вначале вернемся к уравнению (33) для длинных локализованных волн с $L \gg h$. Для солитонов с нулевыми асимптотиками для деформации на бесконечности это уравнение для сдвиговой деформации $U = u_x$ принимает вид

$$a^2 U_x^2 = U^2 \frac{(c^2/c_t^2 - 1) - (C_1 + C_3/(1-K))U^2}{A + (4C_3 p / (3(1-K)^2)(h/a)^2)U^2} \quad (44)$$

и может быть решено в квадратурах. Из (44) очевидно, что солитонные решения существуют только при условии

$$\operatorname{sgn} \left(\frac{c^2}{c_t^2} - 1 \right) = \operatorname{sgn} \left(C_1 + \frac{C_3}{1-K} \right) = \operatorname{sgn} A. \quad (45)$$

Фактически, этот критерий соответствует обычным условиям существования солитонов модифицированного уравнения Буссинеска с учетом перенормировки коэффициента кубического ангармонизма за счет взаимодействия с сагиттальными компонентами смещений. Важно, что эффективная константа ангармонизма $\xi = 2(C_1 + C_3/(1-K))$ может иметь разный знак (см. таблицу).

Удобно ввести безразмерную координату η и перенормированную продольную деформацию Q :

Таблица

Упругие константы и параметры модели для щелочно-галогидных соединений

Параметры	LiF	LiCl	NaF	NaCl	KF	KCl	RbCl	CsCl	CsI
K	13,78	4,65	12,1	4,09	0,46	6,59	17,53	41,19	27,54
p	-3,17	-2,58	-3,10	1,08	-1,60	1,66	3,37	6,14	4,47
C_1	-10,53	-6,69	-9,46	0,70	-2,18	0,80	1,12	1,34	0,21
C_3	-242,3	-82,05	-206,2	3,05	-17,57	5,28	10,59	116,8	81,03
ξ	16,84	31,62	18,21	-0,58	-69,90	-0,29	0,97	-2,37	-5,68
ρ	1,74	3,15	1,76	0,16	-4,34	0,16	0,15	0,12	0,02
$A\delta$	0,74	1,34	0,76	-1,59	-3,74	-2,55	0,36	-0,38	-0,24
Компактон	$\varepsilon < 0$	$\varepsilon < 0$	$\varepsilon < 0$	-	-	-	$\varepsilon < 0$	-	-
Пикон	-	-	-	$\varepsilon > 0$	$\varepsilon > 0$	$\varepsilon > 0$	-	$\varepsilon > 0$	$\varepsilon > 0$

$$\xi = 2(C_1 + C_3/(1-K)), \rho = 2C_1 p / (3(K-1)), A\delta = 4C_3 p / [3(1-K)^2(C_1 + C_3/(1-K))]. \quad k \sim 1/h$$

$$\eta = \frac{x - ct}{a} \sqrt{\frac{c^2/c_t^2 - 1}{A}}, \quad (46)$$

$$Q = U \sqrt{\frac{C_1 + C_3/(1-K)}{c^2/c_t^2 - 1}},$$

и переписать (44) в виде

$$Q_\eta^2 = Q^2 \frac{1 - Q^2}{1 + \gamma Q^2}, \quad (47)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{4C_3 p (c^2/c_t^2 - 1)}{3(1-K)^2 (C_1 + C_3/(1-K)) A} \frac{h^2}{a^2} = \\ &= \delta \frac{h^2}{a^2} \left(\frac{c^2}{c_t^2} - 1 \right). \end{aligned} \quad (48)$$

Параметр δ в этой формуле порядка единицы и имеет разные знаки для разных материалов (см. таблицу).

Для фиксированных параметров среды и толщины пластины все характеристики солитона зависят только от его скорости (т.е. от параметра ε), а следовательно, от величины параметра γ . Как мы покажем ниже, размер солитона стремится к величине h при $\gamma \rightarrow \pm 1$ и условие применимости уравнения (47) в этих пределах нарушается. Тем не менее, исследуем эволюцию формы солитонного решения (47) во всей области значений параметра γ . Заметим, что параметр γ зависит не только от знаков параметров ξ , A и ε , но и от знаков C_3 и p (см. таблицу). Таким образом, при выполнении условий (45) существования солитонов знак γ может быть различным, что приводит к разной форме возникающих солитонов.

При $\gamma = 0$ ($c = c_t$) решение имеет стандартную солитонную форму $Q = 1/\text{ch } \eta$. Но в исходных переменных $U = u_x(x)$ амплитуда солитона при $\gamma \rightarrow 0$ стремится к нулю, а область его локализации — к бесконечности. Таким образом, величине $\gamma = 0$ соответствует линейная нелокализованная волна.

При положительных значениях γ солитонное решение (47) имеет следующий неявный вид [7–9]:

$$\ln \frac{\sqrt{1 + \gamma Q^2} + \sqrt{1 - Q^2}}{Q\sqrt{1 + \gamma}} + \frac{\sqrt{\gamma}}{2} \arccos \frac{1 - \gamma + 2\gamma Q^2}{1 + \gamma} = \eta. \quad (49)$$

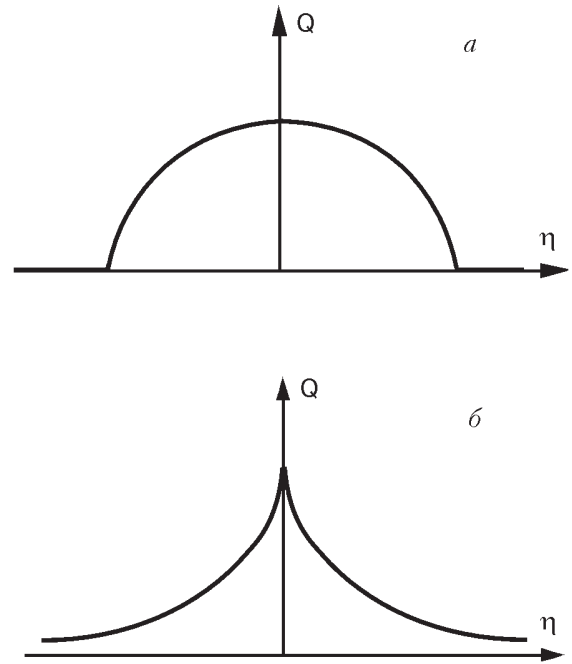


Рис. 4. Профиль поперечной деформации (в безразмерных переменных) в компактоне (а) и пиконе (б).

Для значений $\gamma \ll 1$ солитон имеет обычный профиль с размером $L \sim \sqrt{A/(c^2 - c_t^2)}$, поэтому в этой области влияние собственной дисперсии A является определяющим, и ее необходимо учитывать.

При $\gamma \sim 1$, т.е. при $c^2/c_t^2 - 1 \sim (a/h)^2 \ll 1$ солитонное решение (49) не содержит никаких параметров, и, таким образом, характерная ширина солитона $\Delta\eta \sim 1$. При этом из (46) следует, что $\Delta x = L \sim h$, как указывалось выше.

При дальнейшем увеличении γ второй член в знаменателе выражения (47) становится доминирующим, и роль собственной дисперсии уменьшается. (Однако на больших расстояниях $|x| \rightarrow \pm\infty$, где $Q \rightarrow 0$, роль собственной дисперсии и знак параметра A являются определяющими). В пределе $\gamma \gg 1$ решение (49) трансформируется в так называемый «компактон» (рис. 4,а):

$$\begin{aligned} Q &= \cos \frac{\eta}{\sqrt{\gamma}}; \quad |\eta| < \pi\sqrt{\gamma}/2; \\ Q &= 0; \quad |\eta| > \pi\sqrt{\gamma}/2. \end{aligned} \quad (50)$$

Из (46), (50) следует, что размер солитона остается порядка толщины пластины $L \sim h$ для всех $\gamma > 1$. Из (50) в первоначальных координатах для сдвиговых смещений имеем:

$$u = h \sqrt{\frac{c^2}{c_t^2} - 1} \sqrt{\frac{A\delta}{C_1 + \frac{C_3}{1-K}}} \times \begin{cases} -1; & x < -\pi h \sqrt{A\delta/4}, \\ \sin \frac{x}{h} \sqrt{1/A\delta}; & |x| < \pi h \sqrt{A\delta/4}, \\ 1; & x > \pi h \sqrt{A\delta/4}. \end{cases} \quad (51)$$

Таким образом, компактное решение описывает сдвиг, локализованный в области размером порядка толщины пластины. Заметим, что при $\gamma \gg 1$ солитон (51) не содержит характеристику собственной дисперсии A , но выполнение условий (45) является обязательным.

Для отрицательных γ в области $-1 < \gamma < 0$ солитонное решение уравнения (47) в неявной форме имеет вид

$$\ln \frac{\sqrt{1-Q^2} + \sqrt{1+\gamma Q^2}}{Q\sqrt{1+\gamma}} - \sqrt{-\gamma} \times \times \ln \frac{\sqrt{-\gamma}\sqrt{1-Q^2} + \sqrt{1+\gamma Q^2}}{\sqrt{1+\gamma}} = \eta. \quad (52)$$

В пределе $\gamma \rightarrow -1$ этот солитон трансформируется в так называемый «пикон» (рис. 4,б):

$$Q = \exp(-|\eta|). \quad (53)$$

Этому решению соответствует вполне определенная скорость солитона c_* : $c_*^2/c_t^2 - 1 = -(a/h)^2/\delta \ll 1$. Максимальная деформация в пиконе мала $U_{\max} = (a/h) [\delta(C_1 + C_3/(1-K))]^{-1/2}$, и область его локализации $\Delta x = L \sim h$, что следует из вида решения в исходных переменных:

$$u(x > 0, x < 0) = \pm a \sqrt{\frac{A}{C_1 + C_3/(1-K)}} \times \times \left[1 - \exp(\mp \frac{x-ct}{h} \sqrt{1/A\delta}) \right]. \quad (54)$$

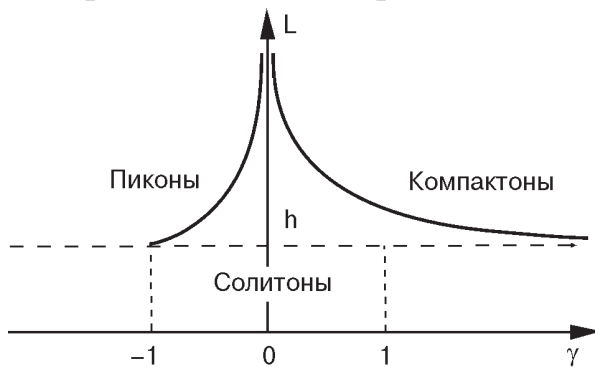


Рис. 5. Зависимость пространственного размера солитона от параметра γ .

Зависимость ширины солитонов от параметра γ во всем интервале его значений приведена на рис. 5.

Наконец, в области $\gamma < -1$ солитонное решение имеет сингулярность в центре ($Q_\eta|_{\eta \rightarrow 0} \rightarrow \infty$). Но все смещения и деформации остаются конечными, и солитон может быть приближенно представлен в виде $Q \cong \exp(-|\eta|)/\sqrt{-\gamma}$. Для этих значений γ размер солитона становится существенно меньше, чем толщина пластины.

Заметим, что в реальных веществах величина параметра δ может меняться в интервале $[-10, 10]$, поэтому и компактонам, и пиконам могут соответствовать как положительные, так и отрицательные отклонения скорости солитона от скорости поперечной звуковой волны c_t .

Видно, что в наиболее интересном интервале скоростей солитона ($\gamma \gg 1$ и $\gamma \cong -1$), где он принимает экзотическую форму, размер солитона L становится соизмеримым с толщиной пластины. В этом интервале уравнение (33) не выполняется, и необходимо использовать уравнение (37), которое справедливо и при $L \sim h$. Как показано ранее, в случае $\gamma \gg 1$ собственная линейная дисперсия не существенна в этой области, и можно положить $A = 0$ в (37). Тогда это уравнение принимает вид уравнения (33), но с другим коэффициентом перед нелинейным членом. Условие существования солитонов (45) изменится и примет вид

$$\text{sgn} \left(\frac{c^2}{c_t^2} - 1 \right) = \text{sgn} \left(C_1 + \frac{C_3}{1-K} \right) = \text{sgn} \frac{C_1 p}{K-1}. \quad (55)$$

Если ввести новую безразмерную координату

$$\zeta = \frac{x-ct}{h} \sqrt{\frac{3(C_1(K-1) + C_3)}{4C_1 p}}, \quad (56)$$

то уравнение (37) для деформации Q переписывается в виде

$$Q^2(Q_\zeta^2 - Q^2 + 1) = 0, \quad (57)$$

с компактным решением

$$u_x = \sqrt{\frac{c^2/c_t^2 - 1}{C_1 + C_3/(1-K)}} \times \times \cos \left(\frac{x-ct}{h} \sqrt{\frac{3(C_1(K-1) - C_3)}{4C_1 p}} \right). \quad (58)$$

Для скоростей в интервале

$$1 \gg \left(\frac{c^2}{c_t^2} - 1 \right) \gg A \left(\frac{a}{h} \right)^2 \sim \left(\frac{a}{h} \right)^2 \quad (59)$$

и при выполнении соотношений (55) в пластине могут распространяться компактные малоамплитудные солитоны, адекватно описываемые формулой (58). Возможность выполнения соотношений (59) иллюстрирует таблица. Здесь же для ряда конкретных веществ указаны интервалы скоростей (знаки ϵ), при которых возможно существование компактонов.

Для существования пиконов в веществах с указанными знаками параметров ξ и $A\delta$ необходимо наличие аномальной собственной дисперсии ($A < 0$). Поэтому в щелочно-галоидных соединениях они, по-видимому, не могут наблюдаться.

Авторы благодарны А. М. Косевичу за интерес к работе и ценные замечания.

Работа поддержана программой INTAS в рамках гранта №99-0167.

1. A. M. Kosevich, B. A. Ivanov, and A. S. Kovalev, *Phys. Rep.* **194**, 117 (1990).
2. P. Rosenau and J. Нymen, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 567 (1993).
3. P. Rosenau, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 1737 (1994).
4. R. Camassa and D. D. Holm, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 1661 (1993).
5. Yu. A. Kosevich, *Phys. Lett.* **A173**, 257 (1993).
6. Yu. A. Kosevich, *Phys. Rev.* **B47**, 3138 (1993).
7. A. S. Kovalev, in: *Nonlinear Physics: Theory and Experiment*, E. Alfinito, M. Boiti, L. Martina, and F. Pampinelli (eds.), World Scientific, Singapore (1997), p.508.
8. А. С. Ковалев, М. В. Гвоздиков, *ФНТ* **24**, 641 (1998).
9. А. С. Ковалев, М. В. Гвоздиков, *ФНТ* **25**, 252 (1999).
10. А. М. Косевич, А. С. Ковалев, *Введение в нелинейную физическую механику*, Наукова думка, Киев (1989).
11. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц, *Теория упругости*, Наука, Москва (1987).
12. J. D. Achenbach, *Wave Propagation in Elastic Solids*, North- Holland publishing company, Amsterdam, London (1973).
13. Н. F. Tiersten, *J. Appl. Phys.* **40**, 770 (1969).
14. В. И. Наянов, *Письма в ЖЭТФ* **44**, 245 (1986).
15. V. G. Mozhaev, *Phys. Lett.* **A319**, 333 (1989).
16. G. A. Maugin and H. Hadouaj, *Phys. Rev.* **B44**, 1266 (1991).
17. A. S. Kovalev and E. S. Syrkin, *Surf. Sci.* **346**, 337 (1996).
18. C. Eckl, A. P. Mayer, and A. S. Kovalev, *Phys. Rev. Lett.* **81**,983 (1998).
19. A. P. Mayer, *Phys. Rep.* **256**, 237 (1995).
20. Yu. S. Kivshar and E. S. Syrkin, *Phys. Lett.* **A153**, 125 (1991).
21. A. P. Mayer, D. F. Parker, and A. A. Maradudin, *Phys. Lett.* **A164**, 171 (1992).

Solitons in elastic plates

A. S. Kovalev, A. P. Mayer,
E. S. Sokolova, and C. Eckl

Nonlinear dynamics of elastic shear waves in plates is investigated with taking into account the interaction of shear component of displacements with low-amplitude sagittal components. Nonlinear evolution equations for shear displacements are derived. These equations contain additional nonlinear dispersion terms accounted for by the interaction with displacements in the sagittal plane. The soliton solutions of the equations and the possibility of the existence of exotic solitons of compacton- and peakon-types are considered.