

Двухкинковое возбуждение в спиральной магнитной структуре

В.В. Киселев, А.А. Расковалов

*Институт физики металлов имени М.Н. Михеева УрО РАН
ул. С. Ковалевской, 18, г. Екатеринбург, 620041, Россия
E-mail: kiseliev@imp.uran.ru*

Статья поступила в редакцию 14 июля 2015 г., опубликована онлайн 23 ноября 2015 г.

В рамках модели sine-Gordon найдены и проанализированы двухкинковые возбуждения в спиральных структурах магнетиков и мультиферроиков. Показано, что движение и взаимодействие кинков сопровождается макроскопическими трансляциями спиральной структуры. Обсуждаются способы наблюдения и возбуждения кинков во внешнем магнитном поле.

В рамках моделі sine-Gordon знайдено й проаналізовано двокінкові збудження в спіральних структурах магнетиків та мультиферроїків. Показано, що рух і взаємодія кінків супроводжується макроскопічними трансляціями спіральної структури. Обговорюються засоби спостереження і збудження кінків в зовнішньому магнітному полі.

PACS: **75.10.-b** Общая теория и модели магнитного упорядочения;
75.85.+t Магнитоэлектрические эффекты, мультиферроики;
02.30.Ik Интегрируемые системы;
02.30.Jr Дифференциальные уравнения в частных производных.

Ключевые слова: солитоны, спиральные магнетики, мультиферроики, метод «одевания».

1. Введение

В физике конденсированного состояния распространены среды с пространственно периодическим основным состоянием. Квазиодномерные несоизмеримые структуры образуют атомы, адсорбированные на грань кристалла-подложки с бороздчатым потенциальным рельефом [1,2]. В магнетиках и холестерических жидких кристаллах наблюдаются спиральные (полосовые доменные) структуры, параметрами которых можно управлять посредством внешних электрических и магнитных полей [3–5]. В последние годы растет интерес к сегнетомагнитным материалам с циклоидальной магнитной структурой [6–8]. В большинстве из них магнитоэлектрические эффекты, связанные с образованием, трансформацией или переориентацией спиновых циклоид, проявляются при низких температурах и больших магнитных полях. Однако недавно стали появляться сообщения о спиральных мультиферроиках, которые проявляют свои характерные свойства при комнатной температуре и малых внешних полях [6]. Теоретическое описание сильно нелинейной динамики периодических систем с неоднородным основным состоянием возмож-

но в рамках упрощенных моделей, которые, с одной стороны, корректно учитывают основные взаимодействия, а с другой — допускают точные решения.

При рассмотрении спиральных магнитных и несоизмеримых кристаллических структур наиболее популярной и универсальной моделью является интегрируемое уравнение sine-Gordon [1–3,9–13]:

$$\partial_t^2 \Phi - \partial_z^2 \Phi + \sin \Phi = 0. \quad (1)$$

Например, в квазиодномерной (вдоль оси Oz) спиральной структуре ферромагнетика без центра инверсии с анизотропией типа «легкая плоскость» (плоскость xOy) при наличии магнитного поля в базисной плоскости поле Φ описывает геликоидальное распределение намагниченности вдоль оси Oz : $\mathbf{M} = M_0(\cos \Phi, \sin \Phi, 0)$, где $M_0 = \text{const}$ — номинальная намагниченность [12,13]. В безразмерных переменных плотность функции Лагранжа таких систем имеет вид

$$L = \frac{1}{2} \left[(\partial_t \Phi)^2 - (\partial_z \Phi)^2 \right] - q \partial_z \Phi - (1 - \cos \Phi), \quad (2)$$

где управляющий параметр q зависит от температуры, внешнего поля или степени несоизмеримости решеток адатомов и кристалла-подложки. Наличие слагаемого $\sim \partial_z \Phi$ в (2) не сказывается на уравнении движения (1), но обуславливает выбор основного состояния системы. При $q < 4/\pi$ реализуется однородное распределение намагниченности $\Phi = 0 \pmod{2\pi}$ — соизмеримая фаза, а при $q > 4/\pi$ — несоизмеримая длиннопериодическая структура в виде одномерной решетки 2π -кинков поля Φ :

$$\Phi \equiv \varphi_0 = \pi - 2 \operatorname{am}(\chi, k),$$

где $\operatorname{am}(\chi, k)$ — эллиптическая амплитуда Якоби с модулем $k = 4E/(\pi q)$ и периодом $L_0 = 2Kk$; $K = K(k)$, $E = E(k)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно [14–16].

В рамках модели (1) солитоноподобные возбуждения спиральной структуры делятся на два класса: топологические солитоны — кинки и динамические — бризеры. При образовании дополнительного кинка в решетке система пытается избавиться от него. Кинки в спиральной структуре всегда движутся. По закону сохранения импульса локализованное возмущение структуры без начальной скорости в простейшем случае должно порождать два кинка, движущихся в противоположных направлениях.

Интегрирование модели (1) при наличии спиральной структуры представляет непростую задачу, решение которой возможно лишь с привлечением специальных методов. В [10,12] для анализа солитонных возбуждений на фоне спиральной структуры привлекались преобразования Дарбу и Бэклунда. В [17,18] сформулирована процедура «одевания», пригодная для полного исследования солитонов и волн в спи-

ральной структуре при локализованных начальных возмущениях и заданных граничных условиях на бесконечности. Показано, что образование и движение солитонов всегда сопровождается макроскопически трансляциями структуры. Сдвиги в крайевых условиях задачи связаны с параметрами, определяющими строение и скорость солитонов.

Анализ двухкинковых возбуждений спиральной структуры ранее не проводился. В данной работе найдено решение модели sine-Gordon, которое аналитически описывает эволюцию двух кинков, сильно взаимодействующих между собой и с фоновой структурой (с решеткой из неподвижных кинков). Показано, что начальное возмущение в виде ступенчатой «закрутки» спиральной структуры при определенных условиях распадается на два кинка равной ширины и одинаковой хиральности.

2. Построение двухкинкового возбуждения

Уравнение sine-Gordon (1) эквивалентно условию совместности вспомогательной системы линейных уравнений [19]:

$$\begin{aligned} \partial_t \Psi &= \frac{i}{2} \left[\frac{\partial_z \Phi}{2} \sigma_3 + \sigma_1 w_1 \cos \frac{\Phi}{2} + \sigma_2 w_2 \sin \frac{\Phi}{2} \right] \Psi \equiv V \Psi, \\ \partial_z \Psi &= \frac{i}{2} \left[\frac{\partial_t \Phi}{2} \sigma_3 + \sigma_1 w_2 \cos \frac{\Phi}{2} + \sigma_2 w_1 \sin \frac{\Phi}{2} \right] \Psi \equiv U \Psi, \end{aligned} \quad (3)$$

где $w_1^2 - w_2^2 = 1$, σ_i — матрицы Паули. В параметризации $w_1 = \operatorname{cn}(u, k)$, $w_2 = i \operatorname{sn}(u, k)$ частное решение системы (3), отвечающее фоновой структуре $\varphi_0(\chi + \delta)$, имеет вид

$$\begin{aligned} \Psi_\delta(u, \chi, t) &= M(u, \chi + \delta) \exp \left(A(u, \chi, t) \sigma_3 + \frac{\eta_1 \delta}{K} u \sigma_3 \right), \\ A(u, \chi, t) &= i p(u) \chi + \frac{it}{2k} \operatorname{dn}(u, k), \\ p(u) &= -i \left(\frac{\eta_1 u}{K} - \frac{1}{2} [\zeta(u - iK') + \zeta(u + iK')] \right) = \frac{i}{2} Z(u, k), \\ M(u, \chi) &= \begin{pmatrix} \sigma(\chi + u) & i \sigma(\chi + 2iK' - u) e^{-\eta_3(\chi + iK' - u)} \\ -i \sigma(\chi + 2iK' + u) e^{-\eta_3(\chi + iK' + u)} & \sigma(\chi - u) \end{pmatrix} \frac{m(\chi)}{\sigma(u)} \exp \left[-\frac{\eta_1 u}{k} \chi \sigma_3 \right], \\ m(\chi) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \frac{\sigma(iK')}{\sigma(\chi + iK')} \right|, \quad \det M = \frac{\operatorname{dn} u}{1 - \operatorname{dn} u}. \end{aligned} \quad (4)$$

Параметр δ сдвигает решение (4) вдоль оси Oz , $\sigma(u)$ и $\zeta(u)$ — сигма- и дзета-функции Вейерштрасса с периодами $2K$, $4iK'$, где $K = K(k)$ и $K' = K(k')$ — полные эллиптические интегралы первого рода от модуля

k и сопряженного модуля $k' = \sqrt{1 - k^2}$, $Z(u, k)$ — дзета-функция Якоби [14,15]. Ветвь квадратного корня выбрана так, чтобы выполнялось условие

$$\begin{aligned} & \sqrt{\sigma(\chi \pm 2K + iK')\sigma(\chi \pm 2K - iK')} = \\ & = -|\sigma(\chi + iK')| \exp[\pm 2\eta_1(\chi \pm K)], \end{aligned}$$

где $|\sigma(\chi + iK')| = \sqrt{\sigma(\chi + iK')\sigma(\chi - iK')}$. Для функции $\Psi_\delta(u, \chi)$ величина $p(u)$ играет роль блоховского квазиимпульса:

$$\Psi_\delta(\chi \pm 4K, t, u) = \Psi_\delta(\chi, t, u) \exp[\pm 4Kip(u)\sigma_3].$$

Построим решение модели sine-Gordon, описывающее движение двух «лишних» кинков в геликоидальной структуре (решетке из таких же кинков). Для этого

рассмотрим однокинковые решения $\Phi^{(1)}$, $\Phi^{(2)}$ уравнения sine-Gordon (1) с краевыми условиями

$$\Phi^{(i)} \rightarrow \varphi_2^{(0)}(\chi + \delta_i) \equiv \varphi_0(\chi + \delta_i, k) \text{ при } z \rightarrow +\infty,$$

$$\Phi^{(i)} \rightarrow \varphi_1^{(0)}(\chi + \delta_i) \equiv 2\pi s_2 + \varphi_0(\chi + \Delta_2 + \delta_i, k) \text{ при } z \rightarrow -\infty,$$

где $s_2 = \pm 1$, $i = 1, 2$; $\delta_1 \equiv \Delta_1$, $\delta_2 = 0$; $0 < \Delta_{1,2} < 2K$. Полям $\Phi^{(i)}$ соответствуют решения $\Psi_-^i(\chi, t, u)$ вспомогательной линейной системы (3), которые получаются из соответствующего решения для однокинкового состояния [13, 17, 18] сдвигом аргумента χ и переопределением постоянных интегрирования:

$$\Psi_-^i(u) = r_i \begin{pmatrix} (\Psi_{\delta_i})_{11} a_2(u | v_2) p_i + (\Psi_{\Delta_2 + \delta_i})_{11} q_i & (\Psi_{\delta_i})_{12} p_i - (\Psi_{\Delta_2 + \delta_i})_{12} a_2(u | v_2) q_i \\ (\Psi_{\delta_i})_{21} a_2(u | v_2) p_i - (\Psi_{\Delta_2 + \delta_i})_{21} q_i & (\Psi_{\delta_i})_{22} p_i + (\Psi_{\Delta_2 + \delta_i})_{22} a_2(u | v_2) q_i \end{pmatrix}, \quad (5)$$

$$a_2(u | v_2) = i s_2 \varepsilon_2 \frac{\sigma(u - v_2)}{\sigma(u + v_2^*)} \exp\left(\frac{\varepsilon_2 \eta_3 \Delta_2}{2}\right), \quad v_2 = iK' \varepsilon_2 - \Delta_2/2, \quad \varepsilon_2 = \pm 1;$$

$$r_i^2 = \left(p_i^2 + q_i^2 + 2p_i q_i \cos([\varphi_2^{(0)}(\chi + \delta_i) - \varphi_1^{(0)}(\chi + \delta_i)]/4) \right)^{-1};$$

$$\frac{p_i}{q_i} = \left| \frac{\sigma(\chi + \delta_i + iK')}{\sigma(\chi + \delta_i + \Delta_2 + iK')} \right| \exp\left[\frac{\eta_1 \Delta_2}{K} \chi + A(v_2, \chi, t) + A^*(v_2, \chi, t) \right] c_i,$$

где p_i, q_i — вещественные функции переменных χ, t , $c_i > 0$ — вещественные постоянные. Здесь и далее по возможности сохранены обозначения работ [13, 17, 18].

Функции Ψ_-^i ($i = 1, 2$) удовлетворяют ограничениям

$$\Psi_-^i(u \pm 2K) = \sigma_3 \Psi_-^i(u) \sigma_3 \begin{pmatrix} e^{\pm 2\eta_1(\delta_i + \Delta_2)} & 0 \\ 0 & e^{\mp 2\eta_1 \delta_i} \end{pmatrix},$$

$$\Psi_-^*[(u \pm 2iK')^*] = -h(u) \sigma_1 \Psi_-^i(u) \sigma_3 \begin{pmatrix} e^{\pm \eta_3(\delta_i + \Delta_2)} & 0 \\ 0 & e^{\mp \eta_3 \delta_i} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

$$i \frac{\sigma(u)}{\sigma(u + 2iK')} \exp[\eta_3(u + iK')] = \frac{ksnu}{1 + dnu} \equiv h(u),$$

$$a_2(u | v_2) \Psi_-^{i*}(-u^*) = -\sigma_2 \Psi_-^i(u) \sigma_2.$$

Последнее равенство выполняется только при

$$u \in \Gamma = \{\text{Re}u = 0, K; |\text{Im}u \leq 2K'\}, \quad \text{mod}(2K, 4iK').$$

Новое решение $\tilde{\Psi}_-(\chi, t, u)$ системы (3), описывающее два кинка в геликоидальной структуре, будем искать в виде

$$\tilde{\Psi}_- = r \begin{pmatrix} (\Psi_-^2)_{11} a_1(u | v_1) p + (\Psi_-^1)_{11} q & (\Psi_-^2)_{12} p - (\Psi_-^1)_{12} a_1(u | v_1) q \\ (\Psi_-^2)_{21} a_1(u | v_1) p^* - (\Psi_-^1)_{21} q^* & (\Psi_-^2)_{22} p^* + (\Psi_-^1)_{22} a_1(u | v_1) q^* \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Комплексные и вещественная функции p, q и r не зависят от спектрального параметра u ,

$$a_1(u | v_1) = i s_1 \varepsilon_1 \frac{\sigma(u - v_1)}{\sigma(u + v_1^*)} \exp\left(\frac{\varepsilon_1 \eta_3 \Delta_1}{2}\right),$$

$$v_1 = iK' \varepsilon_1 - \Delta_1/2, \quad \varepsilon_1 = \pm 1, \quad s_1 = \pm 1.$$

Для солитонных решений функция (7) должна удовлетворять условию [13, 17, 18]:

$$\tilde{\Psi}_-^\dagger(-u^*) \tilde{\Psi}_-(u) = \tilde{\Psi}_-(u) \tilde{\Psi}_-^\dagger(-u^*) = \left(\frac{dnu}{dnu - 1} \right) I, \quad u \in \Gamma, \quad (8)$$

где I — единичная матрица, символ « \dagger » означает эрмитово сопряжение.

После подстановки представления (5) в (8) левая часть равенства (8) будет содержать полюсы в точках $u = v_1, -v_1^* \pmod{2K, 4iK'}$, в то время как правая часть таких полюсов не содержит. Требование отсутствия лишних полюсов в точках $u = v_1, -v_1^*$ (и конгруэнтных им по модулю периодов) означает, что вычеты в этих точках должны быть равны нулю. Последнее, с учетом алгебраической структуры функции $\tilde{\Psi}_-(u)$, сводится к ограничению

$$\frac{pq^*}{p^*q} = -\frac{(\Psi_-^1(v_1))_{11}(\Psi_-^2(v_1))_{22}}{(\Psi_-^1(v_1))_{21}(\Psi_-^2(v_1))_{12}}. \quad (9)$$

Отсюда следует, что правая часть (9) должна иметь вид $e^{2i\gamma}$, где γ вещественно. В рассматриваемой задаче $v_1 = (v_1 - 2iK'\varepsilon_1)^*$, потому, согласно редукциям (6), условие (9) выполняется автоматически.

Условие отсутствия в левой части равенства (8) полюсов в точках $u = v_2, -v_2^* \pmod{2K, 4iK'}$ дает ограничение на постоянные интегрирования c_1, c_2 :

$$\frac{c_2}{c_1} = |a_1(v_2 | v_1)|^2 = |a_2(v_1 | v_2)|^2 = \left| \frac{\sigma(v_1 - v_2)}{\sigma(v_1 + v_2^*)} \right|^2. \quad (10)$$

Подчеркнем, что, в отличие от приемов конечнозонного интегрирования [20], в предлагаемой схеме ограничения на постоянные интегрирования не только легко определяются, но и являются простыми.

Наконец, требование отсутствия лишних полюсов в точках $u = v_1, -v_1^*$ в левых частях уравнений (3):

$$\partial_t \tilde{\Psi}_-(u) \tilde{\Psi}_-^{-1}(u) = V, \quad \partial_z \tilde{\Psi}_-(u) \tilde{\Psi}_-^{-1}(u) = U, \quad (11)$$

приводит к условию обращения в нуль вычетов от произведений $\partial_t \tilde{\Psi}_-(u) \tilde{\Psi}_-^\dagger(-u^*)$, $\partial_z \tilde{\Psi}_-(u) \tilde{\Psi}_-^\dagger(-u^*)$ в точке $u = v_1$. С учетом соотношения (9) они сводятся к дифференциальным уравнениям для расчета полей p, q :

$$\begin{aligned} \partial_{t,z} \ln \frac{p}{q} &= \partial_{t,z} \ln \frac{(\Psi_-^1(v_1))_{11}}{(\Psi_-^2(v_1))_{12}}, \\ \partial_{t,z} \ln \frac{p^*}{q^*} &= \partial_{t,z} \ln \frac{(\Psi_-^1(v_1))_{21}}{(\Psi_-^2(v_1))_{22}}, \end{aligned}$$

которые легко интегрируются:

$$p = |p| \exp[i(\psi + \gamma/2)], \quad q = |q| \exp[i(\psi - \gamma/2)],$$

$$\left| \frac{p}{q} \right| = \left| \frac{(\Psi_-^1(v_1))_{21}}{(\Psi_-^2(v_1))_{22}} \right| c_0,$$

$$\gamma \equiv \arg p - \arg q = \frac{1}{2i} \ln \left[-\frac{(\Psi_-^1(v_1))_{11}(\Psi_-^2(v_1))_{22}}{(\Psi_-^1(v_1))_{21}(\Psi_-^2(v_1))_{12}} \right],$$

где $c_0 > 0$ — постоянная интегрирования.

Выбор (10) параметров c_i гарантирует, что $\gamma \equiv 0$. Кроме того, правильная алгебраическая структура матриц U и V и верные асимптотические условия для $\tilde{\Psi}_-$ при $z \rightarrow \pm\infty$ получаются, если положить $\psi = 0$. При таком выборе параметров левые части соотношений (11) автоматически не содержат лишних полюсов в точках $u = v_2, -v_2^* \pmod{2K, 4iK'}$.

По аналогии с соответствующей формулой (5) можно показать, что

$$r^2 = \left(p^2 + q^2 + 2pq s_1 \sin([\Phi^{(2)} - \Phi^{(1)}]/4) \right)^{-1}.$$

Здесь знак r следует выбрать положительным.

На этом завершается построение матричного двухкинкового решения $\tilde{\Psi}_-$ вспомогательных уравнений (3). Точное решение исходной модели (1), описывающее два кинка в спиральной структуре, получим, приравняв вычеты от недиагональных элементов матричных равенств (11) в точке $u = iK'$:

$$\Phi = 4 \arg \left(|p| \exp(i\Phi^{(2)}/4) + i s_1 |q| \exp(i\Phi^{(1)}/4) \right).$$

3. Анализ двухкинкового возбуждения

Проанализируем полученное решение. В развернутой форме записи оно имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi(\chi, t) &= \\ &= 4 \operatorname{Arctg} \left[\frac{\alpha_1 \cos \varphi_1 - s_2 \sin \varphi_{12} + s_1 \alpha (\alpha_2 \sin \varphi + s_2 \cos \varphi_2)}{s_1 \alpha (\alpha_2 \cos \varphi - s_2 \sin \varphi_2) - \alpha_1 \sin \varphi_1 - s_2 \cos \varphi_{12}} \right], \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\alpha = \left| \frac{\sigma(\chi + \Delta_2 + iK')}{\sigma(\chi + \Delta_1 + \Delta_2 + iK')} \right| c_0 e^{\tilde{A}(v_1) + \tilde{A}^*(v_1)},$$

$$\alpha_2 = \left| \frac{\sigma(\chi + iK')}{\sigma(\chi + \Delta_2 + iK')} \right| c_2 e^{\tilde{A}(v_2) + \tilde{A}^*(v_2)},$$

$$\alpha_1 = \left| \frac{\sigma(\chi + \Delta_1 + iK')}{\sigma(\chi + \Delta_1 + \Delta_2 + iK')} \right| c_1 e^{\tilde{A}(v_2) + \tilde{A}^*(v_2)};$$

$$\varphi \equiv \frac{\varphi_0(\chi)}{4}, \quad \varphi_1 \equiv \frac{\varphi_0(\chi + \Delta_1)}{4},$$

$$\varphi_2 \equiv \frac{\varphi_0(\chi + \Delta_2)}{4}, \quad \varphi_{12} \equiv \frac{\varphi_0(\chi + \Delta_1 + \Delta_2)}{4},$$

$$\varphi_0(\chi) = \pi - 2 \operatorname{am}(\chi, k), \quad \chi = \frac{z}{k};$$

$$\tilde{A}(v_{1,2}) = \frac{it}{2k} \operatorname{dn} v_{1,2} - \frac{\chi}{2} [\zeta(v_{1,2} - iK') - \zeta(v_{1,2} + iK')],$$

$$v_1 = \rho_1 + i\varepsilon_1 K', \quad \rho_1 = -\frac{\Delta_1}{2},$$

$$v_2 = \rho_2 + i\varepsilon_2 K', \quad \rho_2 = -\frac{\Delta_2}{2}, \quad 0 < \Delta_{1,2} < 2K.$$

Здесь c_0, c_1 и c_2 — положительные вещественные константы интегрирования. Константы c_1 и c_2 связаны соотношением (10).

При наличии кинков решение (12) имеет разные асимптотики на бесконечности:

$$\Phi(\chi, t) \rightarrow \varphi_0(\chi), \quad z \rightarrow +\infty,$$

$$\Phi(\chi, t) \rightarrow \varphi_0(\chi + \Delta_1 + \Delta_2) + 2\pi(s_1 + s_2), \quad z \rightarrow -\infty. \quad (13)$$

В длиннопериодических структурах параметр k близок к единице. Проанализируем предельный случай, когда период спиральной структуры неограниченно увеличивается. При $k \rightarrow 1$ решение (12) принимает вид

$$\Phi(z, t) = 4 \operatorname{Arctg} \left[\frac{s_1 c_0 e^{y_1} (e^{z+\Delta_2} + s_2 c_2 e^{y_2}) + s_2 c_1 e^{z+\Delta_1} e^{y_2} - 1}{s_1 c_0 e^{y_1} (s_2 c_2 e^z e^{y_2} - 1) - e^{z+\Delta_1+\Delta_2} - s_2 c_1 e^{y_2}} \right], \quad (14)$$

где $y_1 = (z - V_1 t) / |\operatorname{th} \rho_1|$, $y_2 = (z - V_2 t) / |\operatorname{th} \rho_2|$. Здесь $c_0, c_1, c_2 > 0$ — константы интегрирования, причем величины c_1, c_2 связаны соотношением

$$\frac{c_2}{c_1} = \left(\frac{\operatorname{sh}([\Delta_1 - \Delta_2 + \pi i(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)]/4)}{\operatorname{sh}([\Delta_1 + \Delta_2 + \pi i(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)]/4)} \right)^2.$$

Выражение (14) описывает взаимодействие двух движущихся доменных стенок (кинков) с одним из неподвижных кинков структуры вида $4 \operatorname{arctg} e^{-z}$. Скорости V_1, V_2 и характерные размеры l_1, l_2 движущихся кинков определяются формулами

$$V_i = \varepsilon_i / \operatorname{ch} \rho_i, \quad l_i = |\operatorname{th} \rho_i| \quad (i = 1, 2).$$

Направления движения кинков определяются знаками величин $\varepsilon_1 = \pm 1$, $\varepsilon_2 = \pm 1$. Очередность, в которой неподвижная и движущиеся доменные стенки взаимодействуют между собой, зависит от соотношений констант интегрирования c_0 и c_1, c_2 и направления движения стенок. Так, два кинка могут двигаться в противополо-

ложных направлениях, — тогда один из них сначала пройдет через неподвижную доменную стенку, и только потом встретится со вторым кинком, — или же они могут двигаться сонаправленно. Во втором случае они могут сначала поочередно проходить через неподвижную доменную стенку, а после взаимодействовать между собой, или же, напротив, сначала один из них нагонит другой, а потом они по очереди встретятся со стенкой.

Несмотря на обилие возможностей, характер взаимодействия доменных стенок при столкновении определяется только соотношением их хиральностей. Хиральности двух движущихся кинков задаются соответственно параметрами s_1 и s_2 , которые могут независимо принимать значения ± 1 . При $s_j = 1$ j -й кинк ($j = 1, 2$) имеет ту же хиральность, что и неподвижная доменная стенка, а при $s_j = -1$ хиральности j -го кинка и неподвижной доменной стенки структуры противоположны.

Во всех перечисленных случаях описание поочередных столкновений трех кинков сводится к анализу их парных взаимодействий. Полный анализ столкновения двух кинков приведен в [13].

В соответствии с [13] 2π -перегибы (кинки) одной хиральности при взаимодействии «складываются», а 2π -перегибы разных хиральностей, напротив, почти полностью компенсируют друг друга (см. рис. 1(б), 2(б), 3(б)). При этом неподвижный кинк при прохождении через него j -го кинка хиральности s_j со скоростью $V_j = \varepsilon_j / \operatorname{ch}(\Delta_j/2)$ смещается навстречу движущемуся на величину $k\Delta_j$ вдоль оси спирали (оси Oz) и приобретает аддитивный фазовый сдвиг, равный $2\pi s_j \varepsilon_j$.

Указанные особенности справедливы и в общем случае для взаимодействия друг с другом «лишних» кинков на фоне спиральной структуры, а также для поочередных столкновений каждого из движущихся кинков с неподвижными кинками структуры. Рисунки 1, 2, 3 иллюстрируют поведение системы до, во время и после взаимодействия кинков. Направления движения кинков отмечены стрелками. Выбираем наиболее «симметрич-

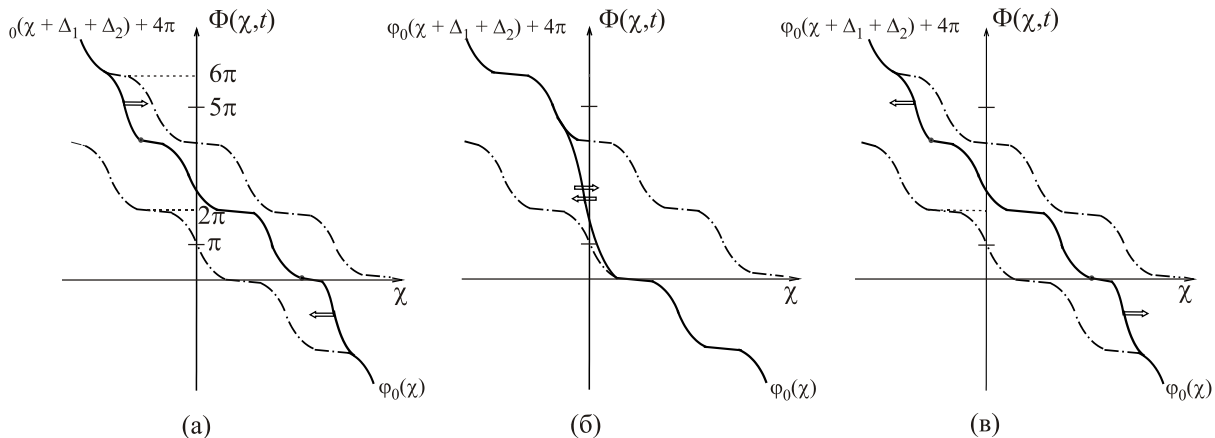


Рис. 1. Двухкинковое возбуждение (12) при значениях параметров $\varepsilon_2 = -1$, $\varepsilon_1 = 1$, $s_1 = s_2 = 1$ в моменты времени до (а), во время (б) и после (в) столкновения кинков.

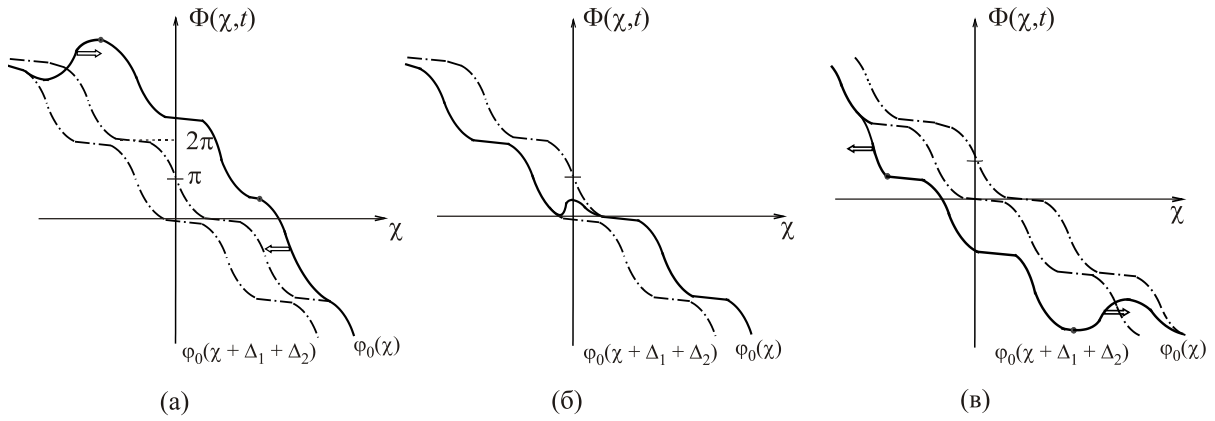


Рис. 2. Двухкинковое возбуждение (12) при значениях параметров $\varepsilon_2 = -1$, $\varepsilon_1 = 1$, $s_1 = -1$, $s_2 = 1$ в моменты времени до (а), во время (б) и после (в) столкновения кинков.

ные» случаи, а именно когда кинки движутся навстречу друг другу. Для определенности считаем, что $\varepsilon_2 = -1$, $\varepsilon_1 = 1$. Хиральности кинков соответствуют значениям $s_1 = s_2 = 1$ (рис. 1), $s_1 = -1$, $s_2 = 1$ (рис. 2) и $s_1 = s_2 = -1$ (рис. 3). Выбор значений $s_1 = 1$, $s_2 = -1$ иллюстрируется набором рис. 2, но в обратной последовательности и с обратным направлением стрелок. Рассмотрение случаев, когда оба кинка движутся сонаправленно ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$), не представляет затруднений, но не дает качественно новой информации.

Асимптотические значения поля Φ (13) отмечены штрихпунктиром. Требование непрерывности функции $\Phi(\chi, t)$ для всех значений χ приводит к возникновению между кинками протяженного сдвинутого участка структуры $\varphi(\chi) = \varphi_0(\chi + \Delta_2) + 2\pi s_2$ до и $\varphi(\chi) = \varphi_0(\chi + \Delta_1) + 2\pi s_1$ после столкновения кинков. На рисунках края сдвинутых областей $\varphi(\chi)$ выделены жирными точками. Эти области не совпадают ни с одним из краевых условий задачи.

В оптически прозрачных магнитных материалах макроскопические трансляции спиральной структуры при распространении в ней кинков можно визуализировать магнитооптическими методами. Основное состояние мультиферроиков с циклоидальной структурой представляет собой решетку из солитонов электрической поляри-

зации. Движение и взаимодействие двух кинков в таких материалах сопровождается макроскопическими сдвигами и деформациями решетки из солитонов поляризации.

4. Возбуждение двух кинков одинаковой хиральности в спиральной структуре

Проведенный анализ подсказывает способы возбуждения двух кинков одинаковой хиральности в спиральной структуре. Согласно краевым условиям (13), для их возбуждения необходимо дополнительно «закрутить» часть спиральной структуры на 4π , а затем удлинить один из ее доменов на величину $\Delta_1 + \Delta_2$ на фронте закрутки. В геликоидальных ферромагнетиках с анизотропией типа «легкая плоскость» закрутку спирали можно осуществить кратковременным включением циркулярно поляризованного магнитного поля в базисной плоскости. При сильной легкоплоскостной анизотропии такой же результат вызовет кратковременная прецессия намагниченности под действием постоянного магнитного поля, направленного вдоль оси спирали. Удлинение домена на фронте закрутки можно вызвать локальным увеличением магнитного поля, перпендикулярного оси магнитной спирали.

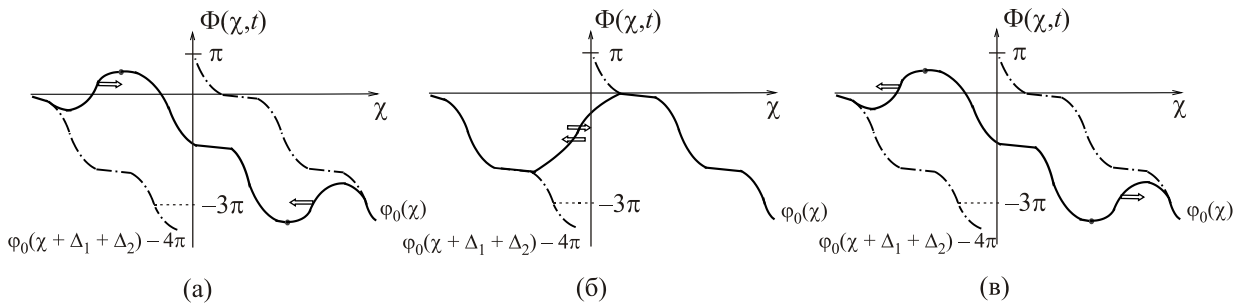


Рис. 3. Двухкинковое возбуждение (12) при значениях параметров $\varepsilon_2 = -1$, $\varepsilon_1 = 1$, $s_1 = s_2 = -1$ в моменты времени до (а), во время (б) и после (в) столкновения кинков.

Подкрепим изложенные соображения расчетом. Пусть начальное возмущение спиральной структуры состоит из трех участков:

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= \varphi_0(\chi + \Delta) + 4\pi \text{ при } \chi < \chi_0, \\ \Phi_0 &= 2f = \text{const при } \chi_0 < \chi < \chi_1, \\ \Phi_0 &= \varphi_0(\chi) \text{ при } \chi > \chi_1. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь $\Phi_0 = \Phi(\chi, t = 0)$, Δ — постоянный сдвиг структуры на пространственной бесконечности.

Матрица перехода задачи рассеяния допускает представление [13,17]

$$\begin{aligned} T(u, t) &= \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left(\Psi^{(0)}(\chi, t, u) \right)^{-1} \Psi_1(\chi, t, u), \\ \Psi^{(0)}(\chi, t, u) &= M(u, \chi) e^{A(u, \chi, t) \sigma_3}. \end{aligned} \quad (16)$$

Согласно [13,17,18], начальное возмущение генерирует солитоны, только когда один из коэффициентов матрицы перехода обращается в нуль.

Функция Ψ_1 — решение вспомогательного линейного уравнения

$$\partial_z \Psi_1 = \frac{i}{2} \left(\sigma_1 i \operatorname{sn} u \cos \frac{\Phi_0}{2} + \sigma_2 \operatorname{cn} u \sin \frac{\Phi_0}{2} \right) \Psi_1 \quad (17)$$

с асимптотическим условием

$$\begin{aligned} \Psi_1(u, \chi, t = 0) &\rightarrow \Psi_1^{(0)}(u, \chi, t = 0) = \\ &= M(u, \chi + \Delta) \exp \left(A(u, \chi + \Delta, t = 0) \sigma_3 + \frac{\eta_1 \Delta}{K} u \sigma_3 \right). \end{aligned} \quad (18)$$

На участке $\chi < \chi_0$ решение Йоста Ψ_1 совпадает с $\Psi_1^{(0)}$ (18). На интервале $\chi_0 < \chi < \chi_1$ решение системы (17) имеет вид

$$\begin{aligned} \Psi_2^{(0)}(u, \chi, t = 0) &= U \exp \left[-\frac{\xi}{2} k \chi \sigma_3 \right] C_1, \\ U &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -c_- / \xi \\ c_+ / \xi & 1 \end{pmatrix}, \quad \xi = \sqrt{\cos^2 f - \operatorname{cn}^2(u, k)}, \\ c_{\pm} &= \operatorname{sn}(u, k) \cos f \pm \operatorname{cn}(u, k) \sin f. \end{aligned}$$

Постоянная матрица C_1 определяется из условия «сшивки» решений $\Psi_1^{(0)}$ и $\Psi_2^{(0)}$ в точке $\chi = \chi_0$ в начальный момент времени (при $t = 0$):

$$\begin{aligned} C_1 &= \exp \left[\frac{\xi}{2} k \chi_0 \sigma_3 \right] U^{-1}(u, \chi_0) M(\chi_0 + \Delta, u) \times \\ &\times \exp \left(A(u, \chi_0 + \Delta, t = 0) \sigma_3 + \frac{\eta_1 \Delta}{K} u \sigma_3 \right). \end{aligned}$$

В области $\chi > \chi_1$ уравнение (17) имеет решение

$$\Psi_3^{(0)}(u, \chi, t = 0) = M(u, \chi) e^{A(u, \chi, t = 0) \sigma_3} C_2.$$

Постоянная матрица C_2 также находится из условия сшивки решений $\Psi_2^{(0)}$ и $\Psi_3^{(0)}$ при $\chi = \chi_1$:

$$\begin{aligned} C_2 &= e^{-A(u, \chi_1, t = 0) \sigma_3} M^{-1}(u, \chi_1) U(u, \chi_1) \times \\ &\times \exp \left[-\frac{\xi}{2} k (\chi_1 - \chi_0) \sigma_3 \right] U^{-1}(u, \chi_0) M(\chi_0 + \Delta, u) \times \\ &\times \exp \left(A(u, \chi_0 + \Delta, t = 0) \sigma_3 + \frac{\eta_1 \Delta}{K} u \sigma_3 \right). \end{aligned}$$

Согласно (16), C_2 совпадает со значением матрицы перехода при $t = 0$:

$$\begin{aligned} T(u, t = 0) &= \begin{pmatrix} a(u) & -\bar{b}(u) \\ b(u) & \bar{a}(u) \end{pmatrix} = C_2(u); \\ \bar{b}(u) &= b^*(-u^*), \quad \bar{a}(u) = a^*(-u^*). \end{aligned} \quad (19)$$

Солитоны параметризуются нулями коэффициента $a(u)$ матрицы перехода. Начальное возмущение генерирует солитоны лишь тогда, когда имеет корни уравнение

$$a(u) = 0. \quad (20)$$

С точностью до несущественных множителей, (20) эквивалентно условию

$$\operatorname{cth} \left(\frac{\xi}{2} k d \right) - \frac{c_+ \alpha_2 + c_- \alpha_1}{\xi (1 + \alpha_1 \alpha_2)} = 0, \quad (21)$$

где $d = \chi_1 - \chi_0$,

$$\alpha_1 = \frac{1 + \operatorname{dn}(\chi_0 + \Delta + u)}{k \operatorname{sn}(\chi_0 + \Delta + u)}, \quad \alpha_2 = \frac{1 + \operatorname{dn}(\chi_1 - u)}{k \operatorname{sn}(\chi_1 - u)}.$$

При переходе от (20) к (21) использовано тождество

$$\frac{\sigma(\chi + 2iK')}{\sigma(\chi)} e^{-\eta_3(\chi + iK')} = \frac{i(1 + \operatorname{dn}\chi)}{k \operatorname{sn}\chi}.$$

Здесь периоды функций Вейерштрасса — $(2K, 4iK')$, а модуль эллиптических функций Якоби равен k .

Пусть для определенности $\chi_0 = K - \Delta$, $\chi_1 = K$, тогда $\chi_1 - \chi_0 = d = \Delta$. При $0 < \Delta < 4K$ начальному возмущению соответствует удлинение домена на фронте «закрутки» с одновременным образованием в нем прямоугольной ступеньки высотой $2f$. В этом случае уравнение (21) упрощается и принимает вид

$$\operatorname{cth} \left(\frac{\xi}{2} k d \right) - \frac{k}{\xi} \operatorname{sn} u \operatorname{sn}(u + K) \cos f = 0. \quad (22)$$

Два корня уравнения (22) вида $u = -\rho \pm iK'$ ($0 < \rho < K$) параметризуют два кинка одинаковой ширины на фоне спиральной структуры, движущиеся в противоположных направлениях.

Уравнение (22) имеет требуемые решения при условии $\cos f < 0$. Так, из (22) следует, что, когда f близко

к π , удлиненный домен шириной $\Delta \sim 1,2K$ порождает два кинка шириной $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta \sim 0,6K$.

Этот результат подтверждается данными численного моделирования, согласно которому ступенька шириной $0 < d = \Delta < 4K$ и высотой $0 \leq 2f \leq 4\pi$ порождает два движущихся в противоположных направлениях кинка равной ширины $\Delta/2$. Оба кинка имеют одинаковую хиральность, совпадающую с хиральностями доменных стенок структуры $s_1 = s_2 = +1$.

Заметим, что начальное условие (15) порождает не только солитоны, но и диспергирующее излучение, так как спектральное преобразование ступеньки (15) содержит нетривиальный коэффициент отражения $b(u)$ (см. (19)). При больших временах t амплитуда излучения убывает по закону $\sim t^{-1/2}$. Поле излучения проявляется в дополнительных осцилляциях как самих солитонов, так и их окружения.

Авторы выражают благодарность С.В. Баталову за помощь в проведении численного моделирования.

Работа выполнена в рамках государственного задания ФАНО России (тема «Квант», № 01201463332) и поддержана Стипендией Президента РФ для молодых ученых СП-6342.2013.1.

1. V.L. Pokrovsky and A.L. Talapov, *Theory of Incommensurate Crystals*, Acad. Publ., Harwood etc. (1984).
2. И.Ф. Люксютов, А.Г. Наумовец, В.Л. Покровский, *Двумерные кристаллы*, Наукова думка, Киев (1988).
3. Ю.А. Изюмов, *Дифракция нейтронов на длиннопериодических структурах*, Энергоатомиздат, Москва (1987).
4. П. Де Жен, *Физика жидких кристаллов*, Мир, Москва (1977).
5. А.Б. Борисов, В.В. Киселев, *Нелинейные волны, солитоны и локализованные структуры в магнетиках. Т. 2. Топологические солитоны, двумерные и трехмерные узоры*, УрО РАН, Екатеринбург (2011).
6. А.П. Пятаков, А.К. Звездин, *УФН* **182**, №6, 593 (2012).
7. Т. Kimura, *Ann. Rev. Mater. Research* **37**, 387 (2007).
8. S.-W. Cheong and A. Mostovoy, *Nature Mater.* **6**, 13 (2007).
9. A.B. Borisov and V.V. Kiselev, *Physica D* **31**, 49 (1988).
10. А.С. Ковалев, И.В. Герасимчук, *ЖЭТФ* **122**, 1116 (2002).

11. I. Dzyaloshinskii, *Europhys. Lett.* **83**, 67001 (2008).
12. A.B. Borisov, J. Kishine, Y.G. Bostrem, and A.S. Ovchinnikov, *Phys. Rev. B* **79**, 134436 (2009).
13. А.Б. Борисов, В.В. Киселев, *Квазиодномерные магнитные солитоны*, Физматлит, Москва (2014).
14. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Эллиптические и автоморфные функции, функции Ламе и Матье*, Наука, Москва (1967).
15. P.F. Byrd and M.D. Friedman, *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists*, Springer-Verlag (1971).
16. А.И. Ахиезер, *Элементы теории эллиптических функций*, Наука, Москва (1970).
17. В.В. Киселев, А.А. Расковалов, *ТМФ* **173**, 268 (2012).
18. В.В. Киселев, А.А. Расковалов, *ФММ* **113**, 1180 (2012).
19. Л.А. Тахтаджян, Л.Д. Фаддеев, *Гамильтонов подход в теории солитонов*, Наука, Москва (1986).
20. Б.А. Дубровин, *Римановы поверхности и нелинейные уравнения*, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевск (2001).

Twokink excitation in the spiral magnetic structure

V.V. Kiselev and A.A. Raskovalov

In the framework of sine-Gordon model, twokink excitations in the spiral structures of magnets and multiferroics are found and analyzed. It is shown, that the motion and interaction of kinks is accompanied by the macroscopic translations of spiral structure. The ways of observing and excitation of kinks in the external magnetic field are discussed.

PACS: **75.10.-b** General theory and models of magnetic ordering;
75.85.+t Magnetoelectric effects, multiferroics;
 02.30.Ik Integrable systems;
 02.30.Jr Partial differential equations.

Keywords: solitons, spiral magnets, multiferroics, «dressing» technique.