УДК 519.21

А. В. Макаричев, канд. физ.-мат. наук
Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет
(Украина, 61078, Харьков, ул. Петровского, 25,
тел. (057) 7073737, E-mail: amakarichev@mail.ru)

Асимптотическое распределение времени с момента отказа до выхода комплексов сложных восстанавливаемых систем из множеств неисправных состояний. I

Рассмотрены последовательные соединения в комплексы сложных восстанавливаемых систем с марковским потоком отказов элементов и индивидуальной функцией распределения времени их обслуживания. Число обслуживаемых элементов сложных систем возрастает обратно пропорционально интенсивности их отказов так, что суммарная нагрузка на систему обслуживания ограничена сверху величиной, меньшей единицы, с дисциплиной обслуживания требований в порядке их возникновения. Найдено асимптотическое распределение времени с момента отказа до выхода комплексов из множества неисправных состояний.

Розглянуто послідовні сполучення у комплекси складних відновлюваних систем з марківським потоком відмовлень елементів та індивідуальною функцією розподілу часу їхнього обслуговування. Число елементів складних систем, що обслуговуються, зростає зворотньо пропорційно інтенсивності їхніх відмовлень так, що сумарне навантаження на систему обслуговування, обмежене зверху величиною, меншою за одиницю з дисципліною обслуговування вимог у порядку їхнього надходження. Знайдено асимптотичний розподіл часу від моменту відмови до виходу комплексів із чисельних станів несправності.

К л ю ч е в ы е с л о в а: последовательные соединения в комплексы сложных восстанавливаемых систем.

Рассмотрим комплекс N, в котором работают N однотипных сложных восстанавливаемых систем, состоящих из n элементов. Каждый элемент с течением времени может отказать. В момент его отказа в одной из сложных систем возникает требование на обслуживание, которое немедленно поступает в ремонтный орган (РО), представляющий собой пару $P=(C, d)$, где C — структура, d — дисциплина обслуживания. Ремонтный орган осуществляет восстановление (ремонт или замену новым, идентичным исходному). Восстановленный элемент занимает свое место в сложной системе, в которой произошел отказ, а требование на обслуживание немедленно покидает РО.

Процесс обслуживания неисправных элементов комплекса N в момент времени t и j-й сложной системы соответственно опишем следующими формулами:

$$x(t)=(x^1(t), x^2(t), ..., x^N(t)), \quad x^j(t)=(x_1^j(t),...,x_n^j(t)),$$

где $x_i^{j-}(t)+x_i^{j+}(t)=x_i^j$ — длина требования, т.е. время его обслуживания со скоростью, равной единице; $x_i^{j-}(t)$ и $x_i^{j+}(t)$ — выработанная и остаточная длина требования на обслуживание i-го элемента j-й сложной системы комплекса, $i=1, 2, ..., n$, $j=1, 2, ..., N$; $x_i^j(t)=0$, если в момент времени t i-й элемент j-й сложной системы исправен; $x_i^j(t)=(x_i^{j-}(t), x_i^{j+}(t))$, если этот элемент неисправен.

Состояние комплекса в момент времени t опишем совокупностью $v(t)=$ $=(e^1(t), e^2(t), ..., e^N(t))$ из N двоичных векторов, каждый из которых определяет состояние соответствующей сложной системы комплекса:

$$e^j(t)=(e_1^j(t), e_2^j(t), ..., e_n^j(t)), \quad j=1, 2, ..., N.$$

Здесь $e_i^j(t)=0$, если в момент времени t i-й элемент j-й сложной системы комплекса находится в исправном состоянии; $e_i^j(t)=1$, если в момент времени t он находится в неисправном состоянии, $i=1, 2, ..., n$, $j=1,2, ..., N$.

Предположим, что поток отказов элементов, возникающий в каждой сложной системе, является марковским, т.е. удовлетворяет двум условиям.

1. Если в произвольный момент времени t j-я сложная система находится в состоянии e^j, то вероятность отказа на промежутке времени $(t, t+h]$ исправного i-го элемента j-й сложной системы комплекса при $h \to 0$ составляет $\lambda_i(e^j)N^{-1}h+o(h)$.

2. В каком бы из состояний $e^j(t)$ ни находилась j-я сложная система комплекса в произвольный момент времени t, вероятность отказа двух и более элементов этой системы на промежутке времени $(t, t+h]$ равна $o(h)$ при $h \to 0$.

Если состояния двух различных k-й и l-й сложных систем совпадают, т.е. $e^k = e^l$, то интенсивности отказов соответствующих элементов в этих системах одинаковы: для любого i при всех $1 \le k < l \le N$ $\lambda_i(e^k)N^{-1}=$ $=\lambda_i(e^l)N^{-1}$.

Пусть $\lambda N^{-1}=\max\limits_{e^j}\lambda(e^j)N^{-1}$, где $\lambda(e^j)N^{-1}$, $j=1, 2, ..., N$, — суммарная интенсивность (интенсивность отказа хотя бы одного из исправных элементов j-й сложной системы комплекса, находящейся в состоянии e^j),

$$\lambda(e^j)N^{-1}=\sum_{i:e_i^j=0}\lambda_i(e^j)N^{-1}.$$

Длины требований (различных элементов или различных отказов одного и того же элемента) есть независимые положительные случайные величины.

Обозначим $G_i(x)$ функцию распределения длины требования по обслуживанию i-го элемента j-й сложной системы комплекса, $i=1,2,...,n$, $j=1,2,...,N$. Ее n-й момент обозначим

$$m_n^{(i)} = \int\limits_{x>0} x^n dG_i(x).$$

Пусть $G_0(x)$ — функция распределения длины первого возникшего в j-й сложной системе требования на периоде регенерации,

$$G_0(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i(0)}{\lambda(0)}G_i(x),$$

$m_n^{(0)}$ — ее n-й момент,

$$m_n^{(0)} = \int\limits_{x>0} x^n dG_0(x),$$

ρ_0 — начальная нагрузка на РО требований на обслуживание элементов сложных систем комплекса N,

$$\rho_0=\lambda(0)\, m_1^{(0)}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(0)\, m_1^{(0)}.$$

Обозначим $G(x)=\min\limits_{i=1,\,...,\,n} G_i(x)$ функцию распределения случайной величины, мажорирующей по вероятности длины всех требований из j-й сложной системы, ее n-й момент

$$m_n=\int\limits_{x>0} x^n dG(x) \text{ и } \rho=\lambda\, m_1,\; j=1,2,...,N.$$

Отказы элементов некоторой сложной системы на периоде регенерации комплекса могут привести всю сложную систему к отказу. Множество $E^j=\{e^j\}$, $j=1,2,...,N$, всевозможных состояний j-й сложной системы делится на два непустые непересекающиеся подмножества исправных E_+^j и неисправных E_-^j состояний j-й сложной системы комплекса. Предполагаем также, что $E_+^1=E_+^2=...=E_+^N$.

Пусть $\left\|e^j\right\|=\sum\limits_{i=1}^{n} e_i^j$ — число неисправных элементов в j-й сложной системе и $\min\limits_{e^j\in E_-^j}\left\|e^j\right\|=s\geq 1$, $j=1,2,...,N$. Если число неисправных элементов в комплексе не превосходит $s-1$, то эта система исправна. Отказ комплекса наступает, если в некоторый момент времени окажутся неисправными k из N входящих в него сложных систем с номерами, образующими арифметическую прогрессию с шагом единица. Положим, $sk > 1$. Множество $E = \{v\}$ всевозможных состояний комплекса состоит из двух непустых непересекающихся подмножеств исправных E_+ и неисправных E_- состояний комплекса. Отказавшие элементы обслуживаются в РО в порядке поступления (согласно дисциплине d_1 из класса консервативных дисциплин).

Последовательность проходимых случайным процессом $v(t)$ состояний комплекса от начала периода регенерации до момента его первого отказа на этом периоде образует путь $\pi = \{v_1, v_2, ..., v_r\}$, где $v_l \in E_+$ при $l < r$ и $v_r \in E_-$.

Путь π назовем l_1-, l_2-, ..., l_k-слабомонотонным минимальным, если первый отказ комплекса на периоде регенерации наступил в результате отказа l_1, l_2, ..., l_k-й сложных систем, в момент отказа в каждой из этих k сложных систем были неисправны ровно s элементов и больше отказов элементов до этого момента в этих сложных системах не было ($1 \le l_1$, $l_2 = l_1 + 1, ..., l_k = l_1 + k - 1 \le N$). Множество таких путей обозначим $\Pi_c^{l_1 l_2 \dots l_k}$. Путь π назовем k-слабомонотонным минимальным, если для некоторых l_1, l_2, ..., l_k этот путь является l_1-, l_2-, ..., l_k-слабомонотонным минимальным. Класс k-слабомонотонных минимальных путей обозначим $\Pi_c(k)$.

Переход случайного процесса $v(t)$, характеризующего состояние комплекса в момент времени t, из множества неисправных состояний E_- в множество исправных состояний E_+ назовем восстановлением комплекса. Время от i-го восстановления комплекса до его $(i + 1)$-го отказа обозначим τ_i^+, а время от i-го отказа комплекса до его i-го восстановления — через τ_i^-.

Требуется получить асимптотическое распределение времени с момента отказа до выхода таких комплексов сложных восстанавливаемых систем из множеств неисправных состояний. Полученные результаты могут быть использованы для оценки надежности и оперативной готовности электронных средств наблюдения и поддержки транспортных потоков.

Отказ комплекса в период регенерации назовем обычным, если он произошел по слабомонотонному минимальному пути в результате отказа k сложных систем этого комплекса и на этом периоде регенерации в каждой из этих k сложных систем отказали и были восстановлены ровно по s элементов в каждой системе и больше отказов элементов в этих сложных системах не было, а в остальных $(N - k)$ сложных системах комплекса на этом периоде регенерации отказали и были восстановлены не более, чем по одному элементу в каждой из $(N - k)$ сложных систем.

Введем случайные события:

A — на периоде регенерации произошел отказ комплекса;

U — на периоде регенерации произошел обычный отказ комплекса;

$U^{l_1 l_2 \dots l_k}$ — на периоде регенерации произошел обычный отказ комплекса в результате отказа l_1-, l_2-, ..., l_k-й его сложных систем ($1 \le l_1$, $l_2 = l_1 + 1, \dots, l_k = l_1 + k - 1 \le N$).

Пусть $q_0^{l_1 l_2 \dots l_k}(x) = P\{U^{l_1 l_2 \dots l_k}, \tau^- > x\}$ — вероятность того, что на периоде регенерации в результате отказа l_1-, l_2-, ..., l_k-й сложных систем произойдет обычный отказ комплекса и время его пребывания в множестве неисправных состояний будет больше, чем x.

Предположим, что обычный отказ комплекса произошел по 1, 2, ..., k-слабомонотонному минимальному пути π. Рассмотрим, как изменяется состояние i-й сложной системы на этом пути, $i = 1, 2, \dots, k$. Пусть $0, e_1^i, e_2^i, \dots$ $\dots, e_s^i$ — последовательность состояний i-й системы до момента ее отказа. Эта последовательность образует монотонный минимальный путь π_i, по которому i-я сложная система из состояния $\{0\}$ приходит к отказу и $\lambda(\pi_i) = \lambda_{i_1}(0)\lambda_{i_2}(e_1^i)\dots\lambda_{i_s}(e_{s-1}^i) > 0$, $i = 1, \dots, k$, где i_1, i_2, ..., i_s — номера последовательно отказавших элементов i-й сложной системы на пути π_i. Множество монотонных минимальных путей, по которым i-я сложная система может отказать, как и ранее, обозначим Π_0^i.

Пусть $B^{j_1 j_2 \dots j_{sk}}(U, x_1, x_2, \dots, x_{sk}, x) = P(U, \varsigma > x_1, \nu^{j_1}(x_1) > x_{sk} - x_1 + x)$ — условная вероятность того, что к моменту времени x_1 не закончится период регенерации, отказавший в момент времени x_1 элемент j_1 не завершит свое обслуживание к моменту времени $x_{sk} - x_1 + x$ и в момент времени x_{sk} произойдет обычный отказ комплекса при условии, что период регенерации начался в момент времени $x = 0$ и в моменты $x_1, x_2, \dots, x_{sk}$ ($0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{sk}$) последовательно отказали элементы $j_1, j_2, \dots, j_{sk}$ из первых k сложных систем.

Обозначим $q_0^{j_1 j_2 \dots j_{sk}}(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k, x)$ вероятность того, что обычный отказ комплекса на периоде регенерации произойдет по таким 1, 2, ..., k-слабомонотонным минимальным путям, что отказ i-й сложной системы произойдет по монотонному минимальному пути π_i ($i = 1, 2, \dots, k$), а перестановка $j_1, j_2, \dots, j_{sk}$ определяет порядок отказов элементов из первых k сложных систем, и время пребывания комплекса в неисправном состоянии будет больше, чем x.

Пусть e' получается из вектора e выделением первых k компонент, т.е. e' определяет состояние первых k сложных систем. Набор $j_1, j_2, \dots, j_{sk}$ определяет последовательность состояний $0', e_1', e_2', \dots, e_{sk}'$, которые проходит подкомплекс из первых k сложных систем до отказа всего комплекса по 1, 2, k-слабомонотонному минимальному пути. Пусть $\lambda(e')N^{-1}$ — суммарная интенсивность отказов элементов из первых k сложных систем, находящихся в состоянии e',

$$\lambda(e')\,N^{-1}=\sum_{r=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(e^r)\,N^{-1}.$$

Введем обозначение $\Delta=\{(x_1,\dots,x_{sk}):0<x_1<x_2<\dots<x_{sk}\}$. Пусть

$$J_N(U,j_1,j_2,\dots,j_{sk},x)=$$
$$=\int\limits_{\Delta}\dots\int\exp(-aN^{-1})\,B^{j_1j_2\dots j_{sk}}(U,x_1,x_2,\dots,x_{sk},x)\,dx_1dx_2\dots dx_{sk}.$$

Лемма 1. Справедливо равенство

$$q_0^{j_1j_2\dots j_{sk}}(\pi_1,\pi_2,\dots,\pi_k,x)=\frac{\prod_{i=1}^{k}\lambda(\pi_i)}{N^{sk}}J_N(U,j_1,\dots,j_{sk},x).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно введенным обозначениям по формуле полной вероятности

$$q_0^{j_1j_2\dots j_{sk}}(\pi_1,\dots,\pi_k,x)=$$
$$=\int\limits_{\Delta}\dots\int\lambda_{j_1}(0')\,N^{-1}\exp[-\lambda(0')\,N^{-1}x_1]\lambda_{j_2}(e_1')\,N^{-1}\exp[-\lambda(e_1')\,N^{-1}(x_2-x_1)]\dots$$
$$\dots\lambda_{j_{sk}}(e'_{sk-1})\,N^{-1}\exp[-\lambda(e'_{sk-1})\,N^{-1}(x_{sk}-x_{sk-1})]\times$$
$$\times B^{j_1\dots j_{sk}}(U,x_1,\dots,x_{sk},x)\,dx_1dx_2\dots dx_{sk}=$$
$$=\frac{\prod_{i=1}^{k}\lambda(\pi_i)}{N^{sk}}J_N(U,j_1,\dots,j_{sk},x),$$

что и требовалось. Лемма 1 доказана.

Пусть $B_\lambda(x_1,x_{sk})=P\{\varsigma_\lambda>x_1,\nu_\lambda(x_1)>x_{sk}-x_1\}$ — условная вероятность того, что в комплексе $\mathrm{N}^0_{1,\lambda,G}$ период регенерации не закончится до момента времени x_1 и требование, возникшее в момент времени x_1, не завершит свое обслуживание в РО к моменту времени $x_{sk}-x_1$ при условии, что этот период регенерации начался в момент времени $x=0$ и в момент времени x_1 возникло требование в РО комплекса ($\nu(x_1)$ — время пребывания в РО требования, возникшего в момент времени x_1 от начала периода регенерации).

Лемма 2. Для любого $x \ge 0$ справедливо неравенство

$$B^{j_1 j_2 \dots j_{sk}}(U, x_1, x_2, \dots, x_{sk}, x) \le B_\lambda(x_1, x_{sk}).$$

Доказательство. Из определения

$$B^{j_1 j_2 \dots j_{sk}}(U, x_1, x_2, \dots, x_{sk}, x) \le B^{j_1 j_2 \dots j_{sk}}(x_1, x_2, \dots, x_{sk}) .$$

Из леммы 2 [1] следует

$$B^{j_1 j_2 \dots j_{sk}}(x_1, x_2, \dots, x_{sk}) \le B_\lambda(x_1, x_{sk}) .$$

Из двух последних неравенств и транзитивности отношения порядка следует утверждение леммы 2. Она доказана.

Обозначим T_λ математическое ожидание длины периода регенерации комплекса $\mathrm{N}^0_{1,\lambda,G}$,

$$T_\lambda = \frac{1}{\lambda(0)} + \frac{m_1}{(1-\rho)}.$$

Стационарное время пребывания требования в РО этого комплекса при дисциплине обслуживания d_1 обозначим v_λ.

Лемма 3. Пусть $\rho < 1$ и $m_{sk} < \infty$. Тогда

$$\int\limits_{0<x_1<x_2<\dots<x_{sk}} \dots \int B_\lambda(x_1, x_{sk})\, dx_1 dx_2 \dots dx_{sk} = \frac{E[v_\lambda]^{sk-1}}{(sk-1)!} T_\lambda < \infty .$$

Доказательство. Сделаем в рассматриваемом кратном интеграле замену переменных: $t_1 = x_{ks} - x_1,\ t_2 = x_{ks-1} - x_1, \dots, t_{ks-1} = x_2 - x_1,\ t = x_1$. После этой замены переменных искомый интеграл имеет вид

$$\int\limits_{t_1 > t_2 > \dots > t_{sk-1} > 0,} \dots \int\limits_{t>0} P\{\varsigma_\lambda > t, v_\lambda(t) > t_1\}\, dt dt_1 \dots dt_{sk-1} =$$

$$= \int\limits_{t_1 > \dots > t_{sk-1} > 0,} \dots \int dt_1 \dots dt_{sk-1} \int\limits_{t>0} P\{\varsigma_\lambda > t, v_\lambda(t) > t_1\}\, dt .$$

Из предельной теоремы для регенерирующих процессов [3, 4] следует, что

$$\int\limits_{t>0} P\{\varsigma_\lambda > t, v_\lambda(t) > t_1\}\, dt = P\{v_\lambda > t_1\} T_\lambda .$$

С учетом последних равенств и принятых обозначений искомый интеграл принимает вид

$$\int\limits_{t_1 > t_2 > \dots > t_{sk-1}} \dots \int P\{v_\lambda > t_1\}\, dt_1 \dots dt_{sk-1} T_\lambda =$$

$$= \int\limits_{t_1>0} \frac{[t_1]^{sk-2}}{(sk-2)!} P\{v_\lambda > t_1\}\, dt_1 T_\lambda = \frac{E[v_\lambda]^{sk-1}}{(sk-1)!} T_\lambda < \infty,$$

так как существует конечный момент $m_{sk} < \infty$ и $\rho < 1$. Лемма 3 доказана.

Введем обозначения

$$\Delta(z) = \{(x_1, ..., x_{sk}): 0 < x_1 < ... < x_{sk} < z\},$$

$$|\Delta(z)| = \int\limits_{\Delta(z)} ... \int dx_1 ... dx_{sk}) = \frac{z^{sk}}{(sk)!}.$$

Лемма 4. Пусть $\rho < 1$ и существует конечный момент $m_{sk} < \infty$. Тогда при $N \to \infty$

$$\int\limits_{\Delta} ... \int B^{j_1 j_2 ... j_{sk}}(U, x_1, x_2, ..., x_{sk}, x)\, dx_1 dx_2 ... dx_{sk} - J_N(U, j_1, ..., j_{sk}, x) \to 0$$

равномерно по $x \geq 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По определению

$$\int\limits_{\Delta} ... \int B^{j_1 j_2 ... j_{sk}}(U, x_1, x_2, ..., x_{sk}, x)\, dx_1 dx_2 ... dx_{sk} - J_N(U, j_1, ..., j_{sk}, x) =$$

$$= \int\limits_{\Delta} ... \int [1 - \exp(-aN^{-1})] B^{j_1 j_2 ... j_{sk}}(U, x_1, x_2, ..., x_{sk}, x)\, dx_1 dx_2 ... dx_{sk}.$$

Выберем любое число $\varepsilon > 0$ и зафиксируем. Из леммы 3 следует, что для выбранного $\varepsilon > 0$ существует $z = z(\varepsilon)$ такое, что для любого $z \geq z(\varepsilon)$

$$\int\limits_{\Delta \setminus \Delta(z)} ... \int B_\lambda(x_1, x_{sk})\, dx_1 dx_2 ... dx_{sk} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1}$$

Из неравенства $1 - \exp(-aN^{-1}) < 1$ и леммы 2 для любого $x \geq 0$ вытекают неравенства

$$[1 - \exp(-aN^{-1})] B^{j_1 j_2 ... j_{sk}}(U, x_1, x_2, ..., x_{sk}, x) <$$

$$< B^{j_1 j_2 ... j_{sk}}(U, x_1, x_2, ..., x_{sk}, x) \leq B_\lambda(x_1, x_{sk}). \tag{2}$$

Из (1), (2) и монотонности интеграла для любого $x \geq 0$ следует неравенство

$$\int\limits_{\Delta \setminus \Delta(z)} ... \int [1 - \exp(-aN^{-1})] B^{j_1 ... j_{sk}}(U, x_1, ..., x_{sk}, x)\, dx_1 ... dx_{sk} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3}$$

По определению $a \le \lambda\, x_{sk} < \lambda z$. Для выбранного $z \ge z(\varepsilon)$ существует такое $N = N(z(\varepsilon))$, что для любого $N > N(z(\varepsilon))$

$$0 \le 1 - \exp(-aN^{-1}) < 1 - \exp(-\lambda z N^{-1}) < \frac{\varepsilon}{2|\Delta(z)|}.$$

Отсюда и из неравенства $0 \le B^{j_1 \dots j_{sk}}(U, x_1, \dots, x_{sk}, x) \le 1$ следует, что для любого $N > N(z(\varepsilon))$ при любом $x \ge 0$ справедливо неравенство

$$\int\limits_{\Delta(z)} \dots \int [1 - \exp(-aN^{-1})]\, B^{j_1 \dots j_{sk}}(U, x_1, \dots, x_{sk}, x)\, dx_1 \dots dx_{sk} < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (4)$$

Из (3) и (4) следует, что для любого $N > N(z(\varepsilon))$ и любого $x \ge 0$ выполнено неравенство

$$\int\limits_{\Delta} \dots \int [1 - \exp(-aN^{-1})]\, B^{j_1 \dots j_{sk}}(U, x_1, \dots, x_{sk}, x)\, dx_1 \dots dx_{sk} < \varepsilon.$$

Лемма 4 доказана.

Пусть

$$\lambda_{-} = \lambda\left(1 - \frac{k}{N}\right),\ \lambda(0)_{-} = \lambda(0)\left(1 - \frac{k}{N}\right),$$

$B_0^{j_1 -}(x_1, x_{sk}, x) = P(\varsigma_0^{-} > x_1, v_0^{j-}(x_1) > x_{sk} - x_1 + x)$ и $B_0^{j_1}(x_1, x_{sk}, x) = P(\varsigma_0 > x_1, v_0^{j}(x_1) > x_{sk} - x_1 + x)$ — соответственно условные вероятности того, что, начавшись в момент времени $x = 0$, период регенерации в комплексах $\mathrm{N}_{\lambda(0)_{-}, G_0}$ и $\mathrm{N}_{\lambda(0), G_0}$ не закончится к моменту времени x_1 и возникшее в момент времени x_1 в РО требование, тип которого совпадает с номером элемента j_1, обозначаемого через j, не завершит свое обслуживание в РО до момента времени $x_{sk} + x$ при условии, что период регенерации начался в момент времени $x = 0$ и в момент времени x_1 в РО возникло требование с номером j элемента j_1 $(0 < x_1 < x_{sk})$; $v_0^{j-}(x_1)$ и $v_0^{j}(x_1)$ — соответственно времена пребывания требования j-го типа, поступившего в момент времени x_1 в РО комплексов $\mathrm{N}_{\lambda(0)_{-}, G_0}$ и $\mathrm{N}_{\lambda(0), G_0}$.

Лемма 5. Пусть $\rho < 1$ и существует конечный момент $m_{sk} < \infty$. Тогда при $N \to \infty$ равномерно по $x \ge 0$

$$\left| \int\limits_{\Delta} \dots \int B^{j_1 \dots j_{sk}}(U, x_1, \dots, x_{sk}, x)\, dx_1 \dots dx_{sk} - \int\limits_{\Delta} \dots \int B_0^{j_1 -}(x_1, x_{sk}, x)\, dx_1 \dots dx_{sk} \right| \to 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем любое число $\varepsilon > 0$. Из леммы 3 следует, что существует такое положительное число $z = z(\varepsilon)$, что для любого $z \ge z(\varepsilon)$

$$\int\limits_{\Delta \setminus \Delta(z)} \cdots \int B_\lambda(x_1, x_{sk})\, dx_1 dx_2 \ldots dx_{sk} < \frac{\varepsilon}{5}. \tag{5}$$

Согласно лемме 2 для любого $x \ge 0$ существуют неравенства

$$\begin{gathered} B^{j_1 \ldots j_{sk}}(U, x_1, \ldots, x_{sk}, x) \le B_\lambda(x_1, x_{sk}), \\ B_0^{j_1 -}(x_1, x_{sk}, x) \le B_\lambda(x_1, x_{sk}). \end{gathered} \tag{6}$$

Из (5), (6) и монотонности интеграла следует, что для любого $x > 0$

$$\begin{gathered} \int\limits_{\Delta \setminus \Delta(z)} \cdots \int B^{j_1 \ldots j_{sk}}(U, x_1, \ldots, x_{sk}, x)\, dx_1 \ldots dx_{sk} < \frac{\varepsilon}{5}, \\ \int\limits_{\Delta \setminus \Delta(z)} \cdots \int B_0^{j_1 -}(x_1, x_{sk}, x)\, dx_1 \ldots dx_{sk} < \frac{\varepsilon}{5}. \end{gathered} \tag{7}$$

Согласно аксиоме непрерывности теории вероятностей для выбранного ε существует такое натуральное число $l = l(\varepsilon)$, что для любого $l \ge l(\varepsilon)$

$$P(\Pi_{\lambda_-}(z) > l) < \frac{\varepsilon}{5|\Delta(z)|},$$

где $\Pi_{\lambda_-}(z)$ — число событий пуассоновского потока с параметром λ_-, возникших на отрезке $[0, z]$.

Пусть R_l^- — случайное событие, состоящее в том, что первые l требований пуассоновского потока с параметром λ_- поступили из различных систем. Из леммы 2 [2] следует, что для выбранного ε существует такое натуральное число $N = N(\varepsilon)$, что для любого $N \ge N(\varepsilon)$

$$P(R_l^-) > 1 - \frac{\varepsilon}{5|\Delta(z)|}.$$

Пусть $A = \{\Pi_{\lambda_-}(z) \le l\} R_l^-$, $\Pi_- = \{\Pi_{\lambda_-}(z) \le l\}$ и $I(A)$ — индикатор случайного события A. Очевидно,

$$\begin{aligned} B^{j_1 \ldots j_{sk}}(U, x_1, \ldots, x_{sk}, x) &= P(U, \varsigma > x_1, v^j(x_1) > x_{sk} - x_1 + x) = \\ &= P(U, \varsigma I(\Pi_-) > x_1, v^j(x_1) I(\Pi_-) > x_{sk} - x_1 + x) + \\ &+ P(U, \varsigma I(\overline{\Pi}_-) > x_1, v^j(x_1) I(\overline{\Pi}_-) > x_{sk} - x_1 + x). \end{aligned} \tag{8}$$

Аналогично

$$B_0^{j_1-}(x_1, x_{sk}, x) = P(\varsigma_0^- > x_1, v_0^{j-}(x_1) > x_{sk} - x_1 + x) =$$
$$= P(\varsigma_0^- I(A) > x_1, v_0^{j-}(x_1) I(A) > x_{sk} - x_1 + x) +$$
$$+ P(\varsigma_0^- I(\overline{A}) > x_1, v_0^{j-}(x_1) I(\overline{A}) > x_{sk} - x_1 + x). \tag{9}$$

Из леммы 4 [2] следует, что

$$P(U, \varsigma(\omega,\alpha) I(\Pi_-) > x_1, v^j(x_1) I(\Pi_-) > x_{sk} - x_1 + x) =$$
$$= P(\varsigma_0^-(\omega,\alpha) I(A) > x_1, v_0^{j-}(x_1) I(A) > x_{sk} - x_1 + x). \tag{10}$$

Поскольку для любого $N \geq N(\varepsilon)$ и любого $x \geq 0$

$$P(U, \varsigma I(\overline{\Pi}_-) > x_1, v^j(x_1) I(\overline{\Pi}_-) > x_{sk} - x_1 + x) \leq P(\overline{\Pi}_-) < \frac{\varepsilon}{5|\Delta(z)|} \tag{11}$$

и

$$P(\varsigma_0^- I(\overline{A}) > x_1, v_0^{j-}(x_1) I(\overline{A}) > x_{sk} - x_1 + x) \leq$$
$$\leq P(\overline{A}) \leq P(\overline{\Pi}_-) + P(\overline{R}_l^-) < \frac{2\varepsilon}{5|\Delta(z)|}, \tag{12}$$

из (8) — (12) для любого $N \geq N(\varepsilon)$ и любого $x \geq 0$ получаем

$$\left| B^{j_1 \dots j_{sk}}(U, x_1, \dots, x_{sk}, x) - B_0^{j_1-}(x_1, x_{sk}, x) \right| < \frac{3}{5|\Delta(z)|}. \tag{13}$$

Из свойства интеграла и (13) следует, что для любого $x \geq 0$

$$\left| \int\limits_{\Delta(z)} \dots \int B^{j_1 \dots j_{sk}}(U, x_1, \dots, x_{sk}, x)\, dx_1 \dots dx_{sk} - \int\limits_{\Delta(z)} \dots \int B_0^{j_1-}(x_1, x_{sk}, x)\, dx_1 \dots dx_{sk} \right| \leq$$
$$\leq \int\limits_{\Delta(z)} \dots \int \left| B^{j_1 \dots j_{sk}}(U, x_1, \dots, x_{sk}, x) - B_0^{j_1-}(x_1, x_{sk}, x) \right| dx_1 \dots dx_{sk} <$$
$$< \int\limits_{\Delta(z)} \dots \int \frac{3\varepsilon}{5|\Delta(z)|}\, dx_1 \dots dx_{sk} = \frac{3\varepsilon}{5}. \tag{14}$$

Из (7) и (14) следует, что для любого $N \geq N(\varepsilon)$ и любого $x \geq 0$

$$\left| \int\limits_{\Delta} \dots \int B^{j_1 \dots j_{sk}}(U, x_1, \dots, x_{sk}, x)\, dx_1 \dots dx_{sk} - \int\limits_{\Delta} \dots \int B_0^{j_1-}(x_1, x_{sk}, x) dx_1 \dots dx_{sk} \right| \leq$$

$$\le \left| \int\limits_{\Delta \setminus \Delta(z)} \ldots \int B^{j_1 \ldots j_{sk}} (U,\ x_1,\ \ldots,\ x_{sk},\ x)\, dx_1 \ldots dx_{sk} \right| +$$

$$+ \left| \int\limits_{\Delta \setminus \Delta(z)} \ldots \int B_0^{j_1 -} (x_1,\ x_{sk},\ x)\, dx_1 \ldots dx_{sk} \right| +$$

$$+ \left| \int\limits_{\Delta(z)} \ldots \int B^{j_1 \ldots j_{sk}} (U, x_1, \ldots, x_{sk}, x)\, dx_1 \ldots dx_{sk} - \int\limits_{\Delta(z)} \ldots \int B_0^{j_1 -} (x_1, x_{sk}, x)\, dx_1 \ldots dx_{sk} \right| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{3\varepsilon}{5} = \varepsilon.$$

Лемма 5 доказана.

(*Продолжение статьи см. в следующем номере*)

Series connections into sets of complex restorable systems with Markovian failure flows of elements and individual distribution function of the time of their maintenance have been considered. The number of maintained elements of complex systems increase in inverse proportion of their failures intensity in such a way that the total load on the maintenance system is bounded on the top by the value lower than 1, with discipline of meeting requirements in order of their appearance. Asymptotic time distribution from the moment of failure to the escape of a set of complex restorable systems from multiple fault conditions was found.

1. *Макаричев А. В.* Надежность комплексов сложных восстанавливаемых систем. — Электрон. моделирование. — 2004. — **26**, № 2. — С. 57—77.
2. *Макаричев А. В.* Асимптотические оценки периода регенерации комплексов сложных восстанавливаемых систем при различных дисциплинах обслуживания. — Там же. — 2003. — **25**, № 2. — С. 83—97.

Поступила 12.01.10;
после доработки 31.05.10

МАКАРИЧЕВ Александр Владимирович, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики Харьковского национального автомобильно-дорожного университета. В 1981 г. окончил Московский государственный университет им. М. Ломоносова. Область научных исследований — вопросы теории вероятностей, теории восстанавливаемых систем, оптимизация характеристик надежности комплексов сложных восстанавливаемых систем.