



УДК 539.3

А. Ф. Верлань, д-р техн. наук
Ин-т проблем моделирования
в энергетике им. Г. Е. Пухова НАН Украины
(Украина, 03164, Киев, ул. Генерала Наумова, 15,
тел. (044) 4241063, E-mail: averlan@i.com.ua),

Х. Эшматов, д-р техн. наук, **Д. А. Ходжаев**, канд. физ.-мат. наук
Ташкентский институт ирригации и мелиорации
(Республика Узбекистан, 100000, Ташкент, ул. Кары Ниязова, 39,
тел. (99871) 2371948, E-mail: heshmatov@mail.ru, dhodjaev@mail.ru)

Б. Х. Эшматов, канд. физ.-мат. наук
Department of Mechanical and Aerospace Engineering, University at Buffalo
(318 Jarvis Hall, Buffalo, NY 14260-4400, USA,
E-mail: ebkh@mail.ru)

Модели и методы математического моделирования нелинейных задач динамики вязкоупругих конструкций из композиционных материалов

(Статью представил д-р техн. наук С. Е. Саух)

На основе теории Кирхгофа—Лява построены математические модели задач о нелинейных колебаниях и динамической устойчивости вязкоупругих ортотропных прямоугольных пластин из композиционных материалов с сосредоточенными массами. Задача сведена к решению систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтеры с сингулярными ядрами релаксации. Разработан численный метод применительно к системам нелинейных интегро-дифференциальных уравнений задач динамики вязкоупругих систем.

На базі теорії Кірхгофа—Лява побудовано математичні моделі задач про нелінійні коливання і динамічну стійкість в'язкопружних ортотропних прямокутних пластин з композиційних матеріалів із зосередженими масами. Задачу зведено до розв'язку систем нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь типу Вольтери з сингулярними ядрами релаксації. Розроблено чисельний метод стосовно систем нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь задач динаміки в'язкопружних систем.

К л ю ч е в ы е с л о в а: вязкоупругость, математическая модель, численный метод, интегро-дифференциальные уравнения, нелинейные колебания, динамическая устойчивость.

Математическая модель задачи о нелинейных колебаниях вязкоупругой ортотропной оболочки с сосредоточенными массами. Рассмотрим вязкоупругую ортотропную оболочку толщиной h , несущую сосредоточенные массы M_i в точках с координатами (x_i, y_i) , $i=1,2,\dots,I$. Построим математическую модель задачи о нелинейных колебаниях вязкоупругой

ортотропной оболочки с сосредоточенными массами в геометрически нелинейной постановке на основе гипотезы Кирхгофа—Лява.

Физическую зависимость между напряжениями $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ и деформациями $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ запишем в следующем виде [1, 2]:

$$\sigma_x = B_{11}(1-\Gamma_{11}^*)\varepsilon_x + B_{12}(1-\Gamma_{12}^*)\varepsilon_y, \quad (x \leftrightarrow y, 1 \leftrightarrow 2), \quad \tau_{xy} = 2B(1-\Gamma^*)\gamma_{xy}. \quad (1)$$

Здесь Γ^* и Γ_{ij}^* — интегральные операторы с ядрами релаксации $\Gamma(t)$ и $\Gamma_{ij}(t)$:

$$\Gamma^* \varphi = \int_0^t \Gamma(t-\tau)\varphi(\tau) d\tau, \quad \Gamma_{ij}^* \varphi = \int_0^t \Gamma_{ij}(t-\tau)\varphi(\tau) d\tau, \quad i, j=1, 2,$$

$$B_{11} = \frac{E_1}{1-\mu_1\mu_2}, \quad B_{22} = \frac{E_2}{1-\mu_1\mu_2}, \quad B_{12} = B_{21} = \mu_1 B_{22} = \mu_2 B_{11}, \quad B = \frac{G}{2};$$

E_1, E_2 — модули упругости в направлении осей x и y ; G — модуль сдвига; μ_1, μ_2 — коэффициенты Пуассона; символ $(x \leftrightarrow y, 1 \leftrightarrow 2)$ указывает на то, что остальные соотношения получаются круговой подстановкой индексов.

Связь между деформациями в срединной поверхности $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ и перемещениями u, v, w по направлениям x, y, z с учетом начального прогиба представим в виде [3]

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} - k_x(w-w_0) + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \right], \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} - k_y(w-w_0) + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \right], \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $w_0 = w_0(x, y)$ — начальный прогиб оболочки; $k_x, k_y = \text{const}$ — кривизны срединной поверхности оболочки.

Изгибающие M_x, M_y и крутящие H моменты оболочки с учетом (1) имеют вид [4]

$$\begin{aligned} M_x &= -\frac{h^3}{12} \left[B_{11}(1-\Gamma_{11}^*) \frac{\partial^2(w-w_0)}{\partial x^2} + B_{12}(1-\Gamma_{12}^*) \frac{\partial^2(w-w_0)}{\partial y^2} \right], \quad (x \leftrightarrow y, 1 \leftrightarrow 2), \\ H &= -\frac{Bh^3}{3} (1-\Gamma^*) \frac{\partial^2(w-w_0)}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (3)$$

При выводе уравнения движения элемента вязкоупругой ортотропной оболочки с сосредоточенными массами будем исходить из следующего [3]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - \frac{m}{h} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - \frac{m}{h} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, \\ \frac{q}{h} + \frac{1}{h} \left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} \right) + k_x \sigma_x + k_y \sigma_y + \frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma_x \frac{\partial w}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left(\sigma_y \frac{\partial w}{\partial y} + \tau_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \frac{m}{h} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Влияние сосредоточенных масс на вязкоупругую оболочку имеет инерционный характер и учитывается в уравнении движения (4) с помощью δ -функции Дирака [5]:

$$m(x, y) = \rho h + \sum_{i=1}^I M_i \delta(x - x_i) \delta(y - y_i), \quad (5)$$

где ρ — плотность материала оболочки. Подставляя (1) и (3) в (4), с учетом (5) получим следующую систему интегро-дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\begin{aligned} B_{11}(1-\Gamma_{11}^*) \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} + B_{12}(1-\Gamma_{12}^*) \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} + 2B(1-\Gamma^*) \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} - \\ - \left[\rho + \frac{1}{h} \sum_{i=1}^I M_i \delta(x - x_i) \delta(y - y_i) \right] \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \\ B_{22}(1-\Gamma_{22}^*) \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial y} + B_{21}(1-\Gamma_{21}^*) \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} + 2B(1-\Gamma^*) \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} - \\ - \left[\rho + \frac{1}{h} \sum_{i=1}^I M_i \delta(x - x_i) \delta(y - y_i) \right] \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, \\ \frac{h^2}{12} \left\{ B_{11}(1-\Gamma_{11}^*) \frac{\partial^4 (w - w_0)}{\partial x^4} + [8B(1-\Gamma^*) + B_{12}(1-\Gamma_{12}^*) + B_{21}(1-\Gamma_{21}^*)] \frac{\partial^4 (w - w_0)}{\partial x^2 \partial y^2} + \right. \\ \left. + B_{22}(1-\Gamma_{22}^*) \frac{\partial^4 (w - w_0)}{\partial y^4} \right\} - k_x [B_{11}(1-\Gamma_{11}^*) \varepsilon_x + B_{12}(1-\Gamma_{12}^*) \varepsilon_y] - \\ - k_y [B_{22}(1-\Gamma_{22}^*) \varepsilon_y + B_{21}(1-\Gamma_{21}^*) \varepsilon_x] - \end{aligned}$$

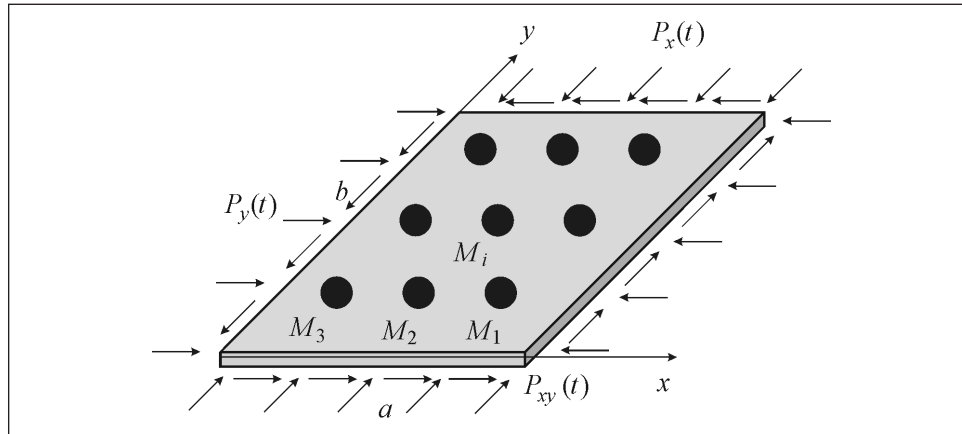


Рис. 1

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial w}{\partial x} [B_{11}(1-\Gamma_{11}^*)\varepsilon_x + B_{12}(1-\Gamma_{12}^*)\varepsilon_y] + 2B \frac{\partial w}{\partial y} (1-\Gamma^*)\gamma_{xy} \right\} - \left[\rho + \frac{1}{h} \sum_{i=1}^I M_i \delta(x-x_i) \delta(y-y_i) \right] \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (6)$$

где ε_x , ε_y и γ_{xy} определяются из соотношений (2).

Математические модели, полученные с помощью системы (6), при соответствующих граничных и начальных условиях одновременно учитывают вязкоупругие свойства, а также неоднородность материала оболочки. Эта система интегро-дифференциальных уравнений в частных производных с пятью различными ядрами релаксации является достаточно общей. Из нее в частном случае можно получить различные уравнения по различным теориям [2—10]. В случае, когда $k_x = k_y = 1/R$, получим уравнения для вязкоупругой ортотропной сферической оболочки, при $k_x = 0$, $k_y = 1/R$ — уравнения для вязкоупругой ортотропной круговой цилиндрической оболочки и при $k_x = k_y = 0$ — уравнения для вязкоупругой ортотропной пластины.

Математическая модель задачи о динамической устойчивости вязкоупругой ортотропной прямоугольной пластины с сосредоточенными массами. Для построения математической модели задачи о динамической устойчивости вязкоупругой ортотропной прямоугольной пластины с сосредоточенными массами под действием нагрузок в поперечном, продольном и сдвиговых направлениях в уравнении (6) необходимо учитывать силы соответственно равные [3] $P_x(t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$, $P_y(t) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ и $P_{xy}(t) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ (рис. 1).

Численный метод для систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерры. Как известно [6—10], многие динамические задачи вязкоупругости сводятся к решению нелинейных интегро-дифференциальных уравнений вида

$$\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M a_{klmn} \ddot{w}_{nm} + \omega_{kl}^2 w_{kl} = X_{kl} \left(t, w_{11}, \dots, w_{NM}, \int_0^t \varphi_{kl}(t, \tau, w_{11}(\tau), \dots, w_{NM}(\tau)) d\tau \right), \quad (7)$$

$$w_{kl}(0) = w_{0kl}, \quad \dot{w}_{kl}(0) = \dot{w}_{0kl}, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad l = 1, 2, \dots, M.$$

Здесь $w_{kl} = w_{kl}(t)$ — искомые функции аргумента t ; f_{kl} , X_{kl} и φ_{kl} — заданные непрерывные функции в области изменения аргументов; a_{klmn} , ω_{kl} — заданные постоянные числа.

Численный метод, предложенный в [11, 12], сначала применим к системам нелинейных интегро-дифференциальных уравнений, описывающих одномерные динамические задачи вязкоупругости, вида

$$\sum_{n=1}^N a_{kn} \ddot{w}_n + \omega_k^2 w_k = X_k \left(t, w_1, \dots, w_N, \int_0^t \varphi_k(t, \tau, w_1(\tau), \dots, w_N(\tau)) d\tau \right), \quad (8)$$

$$w_k(0) = w_{0k}, \quad \dot{w}_k(0) = \dot{w}_{0k}, \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

где $w_k = w_k(t)$ — неизвестные функции времени; X_k , φ_k — непрерывные функции в области изменения своих аргументов; a_{kn} , ω_k — заданные постоянные числа.

К системам (8) сводятся многие нелинейные динамические задачи вязкоупругости, в частности задачи о колебаниях и динамической устойчивости вязкоупругих стержней, балок, несущих сосредоточенную массу. Запишем систему (8) в матричном виде:

$$\mathbf{A} \ddot{\mathbf{w}} + \boldsymbol{\omega}^2 \mathbf{w} = \mathbf{X} \left(t, \mathbf{w}, \int_0^t \boldsymbol{\Phi}(t, \tau, \mathbf{w}(\tau)) d\tau \right), \quad \mathbf{w}(0) = \mathbf{w}_0, \quad \dot{\mathbf{w}}(0) = \dot{\mathbf{w}}_0, \quad (9)$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NN} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_N \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega}^2 = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_N^2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_N \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Phi} = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \dots \\ \Phi_N \end{pmatrix}.$$

Решая систему (9) относительно \mathbf{w} , для числовых значений неизвестных в точках $t_i = ih$, $i=0, 1, 2, \dots$ (h — шаг интерполяции) получим следующую рекуррентную формулу:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{i+1} = & \dot{\mathbf{w}}_0 t_{i+1} + \mathbf{w}_0 + \mathbf{A}^{-1} \sum_{j=0}^i A_j (t_{i+1} - t_j) \times \\ & \times \left[-\boldsymbol{\omega}^2 \mathbf{w}_j + \mathbf{X} \left(t_j, \mathbf{w}_j, \sum_{k=0}^j B_k \boldsymbol{\Phi}(t_j, t_k, \mathbf{w}_k) \right) \right], \end{aligned} \quad (10)$$

где \mathbf{A}^{-1} — обратная матрица к матрице \mathbf{A} ; A_j, B_k — коэффициенты квадратурной формулы,

$$\begin{aligned} A_j = h, \quad j=1, \dots, i; \quad B_0 = h^\alpha / 2, \quad B_i = h^\alpha \left[i^\alpha - (i-1)^\alpha \right] / 2, \\ B_k = h^\alpha \left[(k+1)^\alpha - (k-1)^\alpha \right] / 2, \quad k=1, 2, \dots, i-1. \end{aligned}$$

Если в уравнение (7) также ввести матрицы \mathbf{A} , $\boldsymbol{\omega}^2$, \mathbf{X} и $\boldsymbol{\Phi}$, то для определения $\mathbf{w} = \mathbf{w}(t)$ вновь получаем матричное уравнение (9), числовые решения которого находятся из рекуррентного соотношения (10).

Таким образом, для нахождения численных значений искомой функции можно получить достаточно простую рекуррентную зависимость (10). Обоснование данного метода приведено в [12].

Расчет нелинейных колебаний вязкоупругой ортотропной прямоугольной пластины. Рассмотрим случай нелинейных колебаний вязкоупругой ортотропной прямоугольной пластины с сосредоточенными массами, шарнирно опертой по краям. В этом случае математическая модель задачи описывается системой уравнений (6) при $k_x = k_y = 0$, решение которой, удовлетворяющее граничным условиям задачи, будем искать методом Бубнова—Галеркина в виде

$$\begin{aligned} u(x, y, t) = & \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M u_{nm}(t) \cos \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}, \\ v(x, y, t) = & \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M v_{nm}(t) \sin \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{m\pi y}{b}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$w(x, y, t) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M w_{nm}(t) \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b},$$

где $u_{nm} = u_{nm}(t)$, $v_{nm} = v_{nm}(t)$, $w_{nm} = w_{nm}(t)$ — неизвестные функции времени.

Подставляя (11) в систему уравнений (6), выполняя процедуру Бубнова — Галеркина с использованием безразмерных величин

$$\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{w_{kl}}{h}, \frac{w_{0kl}}{h}, \frac{u_{kl}}{h}, \frac{v_{kl}}{h}, \omega t, \frac{qb^4}{\sqrt{E_1 E_2} h^4}, \frac{M_i}{M_0}, \frac{\Gamma(t)}{\omega}, \frac{\Gamma_{ij}(t)}{\omega}, \quad i, j = 1, 2,$$

и сохраняя прежние обозначения относительно безразмерных u_{kl} , v_{kl} , w_{kl} , получаем следующую систему нелинейных интегро-дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M A_{klnm} \ddot{u}_{nm} + \left[\frac{6\Delta\delta^2 k^2}{\pi^2 \lambda^2 \eta} (1-\Gamma_{11}^*) + \frac{6g\delta^2 l^2 (1-\mu_1 \mu_2)}{\pi^2 \eta} (1-\Gamma^*) \right] u_{kl} = \\ & = -\frac{6\delta^2 kl}{\pi^2 \lambda \eta} [\Delta\mu_2 (1-\Gamma_{12}^*) + g (1-\mu_1 \mu_2) (1-\Gamma^*)] v_{kl} + \\ & + \frac{6\Delta\delta}{\pi^3 \lambda^3 \eta} \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,j=1}^M n i^2 \mu_{nik} \beta_{mjl} (1-\Gamma_{11}^*) (w_{nm} w_{ij} - w_{0nm} w_{0ij}) + \\ & + \frac{6\Delta\delta \mu_2}{\pi^3 \lambda \eta} \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,j=1}^M m i j \gamma_{nik} \alpha_{mjl} (1-\Gamma_{12}^*) (w_{nm} w_{ij} - w_{0nm} w_{0ij}) + \\ & + \frac{6g\delta (1-\mu_1 \mu_2)}{\pi^3 \lambda \eta} \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,j=1}^M (m i j \gamma_{nik} \alpha_{mjl} + n j^2 \mu_{nik} \beta_{mjl}) (1-\Gamma^*) (w_{nm} w_{ij} - w_{0nm} w_{0ij}), \\ & \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M B_{klnm} \ddot{v}_{nm} + \left[\frac{6\delta^2 l^2}{\pi^2 \Delta \eta} (1-\Gamma_{22}^*) + \frac{6g\delta^2 k^2 (1-\mu_1 \mu_2)}{\pi^2 \lambda^2 \eta} (1-\Gamma^*) \right] v_{kl} = \\ & = -\frac{6\delta^2 kl}{\pi^2 \Delta \lambda \eta} [\mu_1 (1-\Gamma_{21}^*) + \Delta g (1-\mu_1 \mu_2) (1-\Gamma^*)] u_{kl} + \\ & + \frac{6\delta}{\Delta \pi^3 \eta} \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,j=1}^M m j^2 \beta_{nik} \mu_{mjl} (1-\Gamma_{22}^*) (w_{nm} w_{ij} - w_{0nm} w_{0ij}) + \\ & + \frac{6\delta \mu_1}{\Delta \pi^3 \lambda^2 \eta} \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,j=1}^M n i j \alpha_{nik} \gamma_{mjl} (1-\Gamma_{21}^*) (w_{nm} w_{ij} - w_{0nm} w_{0ij}) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{6g\delta(1-\mu_1\mu_2)}{\pi^3\lambda^2\eta} \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,j=1}^M (nij\alpha_{nik}\gamma_{mjl} + n^2j\beta_{nik}\gamma_{mjl})(1-\Gamma^*)(w_{nm}w_{ij} - w_{0nm}w_{0ij}), \\
 & \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M C_{klm}\ddot{w}_{nm} + \left[\frac{\Delta k^4}{2\lambda^4\eta}(1-\Gamma_{11}^*) + \frac{2gk^2l^2(1-\mu_1\mu_2)}{\lambda^2\eta}(1-\Gamma^*) + \right. \\
 & \left. + \frac{\Delta\mu_2k^2l^2}{2\lambda^2\eta}(1-\Gamma_{12}^*) + \frac{\mu_1k^2l^2}{2\Delta\lambda^2\eta}(1-\Gamma_{21}^*) + \frac{l^4}{2\Delta\eta}(1-\Gamma_{22}^*) \right] (w_{kl} - w_{0kl}) = \\
 & = \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,j=1}^M w_{nm} \left[\frac{6\Delta\delta}{\pi^3\lambda^3\eta} a_{nmijkl}(1-\Gamma_{11}^*) + \frac{6g\delta(1-\mu_1\mu_2)}{\pi^3\lambda\eta} c_{nmijkl}(1-\Gamma^*) + \right. \quad (12) \\
 & \left. + \frac{6\mu_1\delta}{\pi^3\lambda\Delta\eta} f_{nmijkl}(1-\Gamma_{21}^*) \right] u_{ij} + \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,j=1}^M w_{nm} \left[\frac{6\Delta\delta\mu_2}{\pi^3\lambda^2\eta} b_{nmijkl}(1-\Gamma_{12}^*) + \right. \\
 & \left. + \frac{6g\delta(1-\mu_1\mu_2)}{\pi^3\lambda^2\eta} d_{nmijkl}(1-\Gamma^*) + \frac{6\delta}{\pi^3\Delta\eta} e_{nmijkl}(1-\Gamma_{22}^*) \right] v_{ij} - \\
 & - \sum_{n,i,r=1}^N \sum_{m,j,s=1}^M w_{nm} \left[\frac{3\Delta}{16\lambda^4\eta} h_{nmijklrs}(1-\Gamma_{11}^*) - \frac{3\Delta\mu_2}{16\lambda^2\eta} p_{nmijklrs}(1-\Gamma_{12}^*) + \right. \\
 & \left. + \frac{3g(1-\mu_1\mu_2)}{8\lambda^2\eta} g_{nmijklrs}(1-\Gamma^*) + \frac{3}{16\Delta\eta} q_{nmijklrs}(1-\Gamma_{22}^*) - \right. \\
 & \left. - \frac{3\mu_1}{16\Delta\lambda^2\eta} r_{nmijklrs}(1-\Gamma_{21}^*) \right] (w_{ij}w_{rs} - w_{0ij}w_{0rs}) + \frac{96\alpha_{kl}(1-\mu_1\mu_2)}{\pi^6\eta kl} q,
 \end{aligned}$$

где

$$A_{klm} = 1 + 4 \sum_{i=1}^I M_i \cos^2 k\pi x_i \sin^2 l\pi y_i, \quad B_{klm} = 1 + 4 \sum_{i=1}^I M_i \sin^2 k\pi x_i \cos^2 l\pi y_i,$$

$$C_{klm} = 1 + 4 \sum_{i=1}^I M_i \sin^2 k\pi x_i \sin^2 l\pi y_i$$

при $n = k$ и $m = l$, в иных случаях

$$A_{klm} = 4 \sum_{i=1}^I M_i \cos k\pi x_i \cos n\pi x_i \sin l\pi y_i \sin m\pi y_i,$$

$$B_{klm} = 4 \sum_{i=1}^I M_i \sin k\pi x_i \sin n\pi x_i \cos l\pi y_i \cos m\pi y_i,$$

$$C_{klmn} = 4 \sum_{i=1}^I M_i \sin k\pi x_i \sin n\pi x_i \sin l\pi y_i \sin m\pi y_i;$$

$$\Delta = \sqrt{\frac{E_1}{E_2}}; \quad \delta = \frac{b}{h}; \quad g = \frac{G}{\sqrt{E_1 E_2}}; \quad \lambda = \frac{a}{b}; \quad \omega = \sqrt{\frac{\sqrt{E_1 E_2} h^2 \eta}{6\rho(1-\mu_1 \mu_2)}} \left(\frac{\pi}{b}\right)^4;$$

$\eta = 1 + \Delta \mu_2 + 2(1 - \mu_1 \mu_2)g$; $M_0 = ab\rho h$ — масса всей пластины; остальные коэффициенты этой системы приведены в [4].

Полученная система (12) решена численным методом, предложенным выше. При этом в качестве ядер релаксации $\Gamma(t)$, $\Gamma_{ij}(t)$, $i, j = 1, 2$, использованы сингулярные ядра Колтунова—Ржаницына вида [1]

$$\Gamma(t) = A e^{-\beta t} t^{\alpha-1}, \quad 0 < \alpha < 1; \quad \Gamma_{ij}(t) = A_{ij} e^{-\beta_{ij} t} t^{\alpha_{ij}-1}, \quad 0 < \alpha_{ij} < 1. \quad (13)$$

Была исследована сходимость метода Бубнова—Галеркина. При вычислении значений прогиба удерживалось семь первых гармоник ($N = 7$, $M = 1$). В результате расчетов установлено, что дальнейшее увеличение числа членов не оказывает существенного влияния на амплитуду колебаний вязкоупругой ортотропной прямоугольной пластины.

На рис. 2 графически представлено влияние степени анизотропии $\Delta = \sqrt{E_1/E_2}$ на колебательный процесс пластины и влияние сосредоточенных масс M_i на ее поведение (полагаем, что сосредоточенная масса приложена к центру пластины). Как видно из рис. 2, увеличение параметров Δ и M_i приводит к уменьшению амплитуды колебаний.

Расчет деформирования вязкоупругой ортотропной прямоугольной пластины с сосредоточенными массами. Рассмотрим случай динамической устойчивости вязкоупругой прямоугольной ортотропной пластины с сосредоточенными массами, подвергающейся быстро возрастающей нагрузке вдоль стороны a силой $P(t) = \upsilon t$ (υ — скорость нагружения). Считая, что края пластины шарнирно оперты, выражения для прогиба и перемещений на основе многочленной аппроксимации выберем в виде (11). Подставляя (11) в систему уравнений (6), выполняя процедуру Бубнова—Галеркина с использованием безразмерных величин

$$\frac{x}{a}, \quad \frac{y}{b}, \quad \frac{w_{kl}}{h}, \quad \frac{w_{0kl}}{h}, \quad \frac{u_{kl}}{h}, \quad \frac{v_{kl}}{h}, \quad P^* = \frac{P}{\sqrt{E_1 E_2}} \left(\frac{b}{h}\right)^2, \quad \frac{q}{\sqrt{E_1 E_2}} \left(\frac{b}{h}\right)^4,$$

$$\frac{\sqrt{S}}{\omega} \Gamma(t), \quad t^* = \frac{P}{P_{кр}} = \frac{\upsilon t}{P_{кр}} = \frac{\omega t}{\sqrt{S}} = \frac{P^*}{P_{кр}^*},$$

$$S = P_{кр}^*{}^3 \left(\frac{\pi c \sqrt{E_1 E_2} h^3}{\upsilon b^4} \right)^2, \quad P_{кр}^* = \frac{P_{кр}}{\sqrt{E_1 E_2}} \left(\frac{b}{h}\right)^2 = \frac{\pi^2}{3(1-\mu^2)},$$

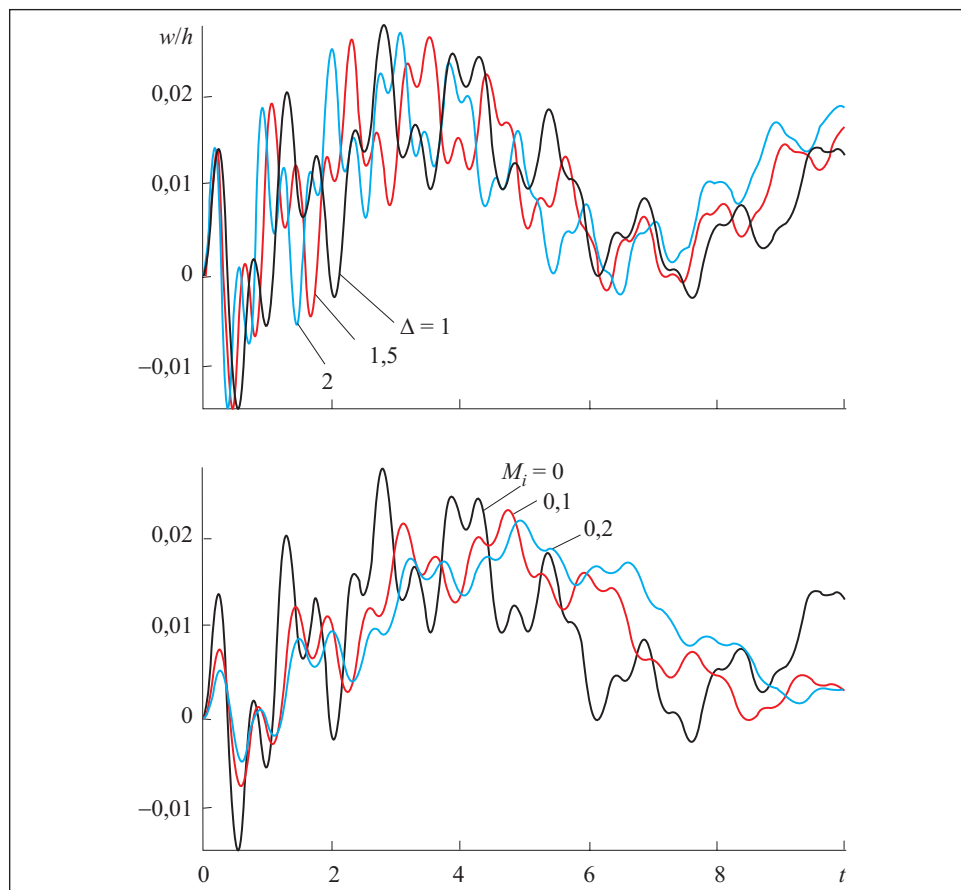


Рис. 2. Зависимость прогиба от времени при различных значениях Δ и M_i

и сохраняя прежние обозначения относительно безразмерных u_{kl} , v_{kl} , w_{kl} , получаем систему нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, аналогичную приведенной выше, где c — скорость звука в материале пластины; $P_{кр}$ — статическая критическая нагрузка; S — безразмерный параметр скорости нагружения.

Полученную систему будем решать предложенным выше численным методом. В расчетах в качестве ядер релаксации будем также использовать ядра Колтунова—Ржаницына вида (13).

Аналогично [3] в качестве критерия, определяющего критическое время, а также критическую нагрузку, принимаем условие, согласно которому стрела прогиба не должна превышать величину, равную толщине плас-

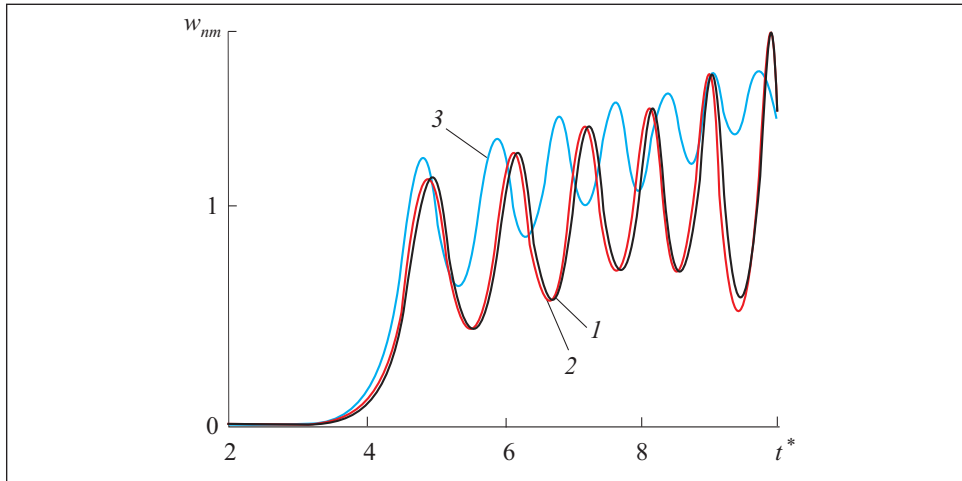


Рис. 3. Зависимость прогиба от времени для различных случаев учета вязкоупругих свойств материала: 1 — упругая пластина; 2 — вязкоупругие свойства материала учтены только в одном направлении ($A = 0,05$); 3 — вязкоупругие свойства материала учтены одинаково по всем направлениям ($A = A_{ij} = 0,05, i = 1, 2, j = 1, 2$)

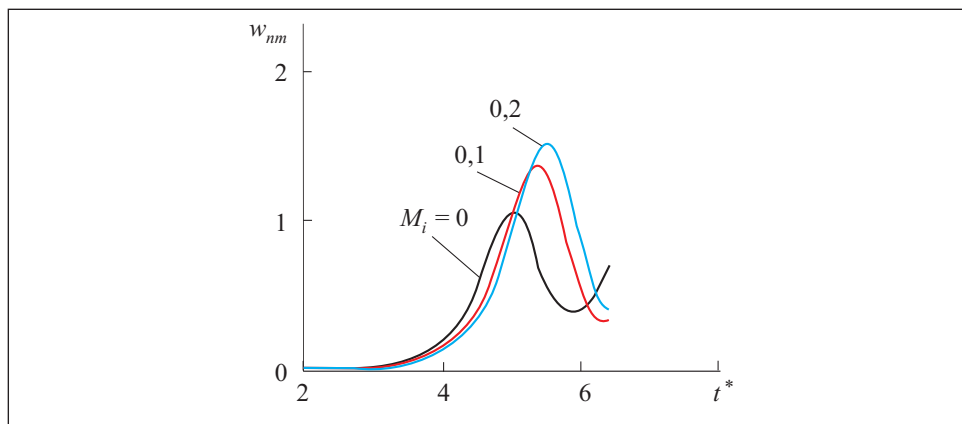


Рис. 4. Зависимость прогиба от времени при различном воздействии сосредоточенных масс

тины. В качестве параметра, определяющего устойчивость пластины, принят коэффициент динамичности K_d , равный отношению динамической критической нагрузки к эйлеровой статической. Результаты вычислений, полученные при различных физико-механических и геометрических параметрах пластины, представлены в виде графиков на рис. 3.

Как видно из рис. 3, учет вязкоупругих свойств материала одновременно по всем направлениям приводит к более раннему интенсивному

увеличению прогиба. Кроме того, результаты, полученные в случае, когда вязкоупругие свойства материала учитываются только в одном направлении, близки к результатам, полученным для упругой пластины. Следовательно, в этом случае вязкоупругие свойства материала необходимо учитывать по всем направлениям.

На рис. 4 приведены результаты исследования влияния сосредоточенных масс на поведение вязкоупругой пластины. Видно, что по мере увеличения параметра M_i вся кривая перемещается вправо в сторону больших значений t^* . Следует заметить, что влияние сосредоточенных масс существенно проявляется при малых значениях параметра S .

Выводы. В результате исследования нелинейных задач о колебаниях и динамической устойчивости вязкоупругих ортотропных прямоугольных пластин с сосредоточенными массами установлено следующее:

вязкоупругие свойства материала необходимо учитывать не только по сдвиговому, но и одновременно по остальным направлениям;

увеличение сосредоточенной массы приводит к более интенсивному уменьшению амплитуды и частоты колебаний, чем в случае упругой пластины;

учет вязкоупругих свойств материала приводит к уменьшению значений критической нагрузки и времени;

учет сосредоточенных масс как для упругой пластины, так и для пластины с вязкоупругими свойствами приводит к увеличению критической нагрузки.

Mathematical models of problems on nonlinear vibrations and dynamic stability of viscoelastic orthotropic rectangular plates of composite materials with concentrated masses have been constructed on the basis of Kirchhoff-Lave theory. The problem is reduced to solution of a set of nonlinear integro-differential Volterra type equations with singular kernels of relaxation. A numerical method was developed as applied to the systems of nonlinear integro-differential equations for the problems of dynamics of viscoelastic systems.

1. Колтунов М. А. Ползучесть и релаксация. — М. : Высшая школа, 1976. — 276 с.
2. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных оболочек. — М. : Наука, 1961. — 384 с.
3. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. — М. : Наука, 1972. — 432 с.
4. Верлань А. Ф., Эшматов Б. Х. Математическое моделирование колебаний ортотропных вязкоупругих пластин с учетом геометрической нелинейности // Электрон. моделирование. — 2005. — 27, № 4. — С. 3—17.
5. Amba-Rao C. L. On the Vibration of a Rectangular Plate Carrying a Concentrated Mass // J. Appl. Mech. — 1964. — Vol. 31. — P. 550—551.
6. Khodjaev D. A., Eshmatov B. Kh. Nonlinear Vibration of Viscoelastic Plate with Concentrated Mass // J. of Applied Mechanics and Technical Physics. — 2007. — 48, № 6. — P. 905—914.
7. Eshmatov B. Kh., Khodjaev D. A. Nonlinear Vibration and Dynamic Stability of a Viscoelastic Cylindrical Panel with Concentrated Mass // Acta Mechanica. — 2007. — № 1—4 (190). — P. 165—183.

8. *Eshmatov B. Kh.* Nonlinear Vibrations and Dynamic Stability of Viscoelastic Orthotropic Rectangular Plates // *J. of Sound and Vibration*. — 2007. — 300. — P. 709—726.
9. *Эшматов Б. Х., Ходжаев Д. А.* Динамическая устойчивость вязкоупругой пластины с сосредоточенными массами // *Прикладная механика*. — 2008. — **44**, № 2. — С. 109—118.
10. *Верлань А. Ф., Эшматов Х., Эшматов Б. Х и др.* Математическое моделирование нелинейных колебаний и исследование динамической устойчивости вязкоупругих прямоугольных пластин и цилиндрических панелей. I // *Электрон. моделирование*. — 2009. — **31**, № 3. — С. 3—19.
11. *Бадалов Ф. Б., Эшматов Х., Юсупов М.* О некоторых методах решения систем интегро-дифференциальных уравнений, встречающихся в задачах вязкоупругости // *ПММ*. — 1987. — **51**, № 5. — С. 867—871.
12. *Эшматов Х.* Интегральный метод математического моделирования задач динамики вязкоупругих систем: Дис... д-ра техн. наук. — Киев, 1991. — 337 с.

Поступила 26.03.10;
после доработки 05.05.10

ВЕРЛАНЬ Анатолий Федорович, д-р техн. наук, зав. отделом Ин-та проблем моделирования в энергетике им. Г. Е. Пухова НАН Украины. В 1956 г. окончил Киевский политехнический ин-т. Область научных исследований — методы математического и компьютерного моделирования в задачах исследования динамических систем, электрических цепей; численные методы и алгоритмы решения интегральных уравнений.

ЭШМАТОВ Хасан, д-р техн. наук, зав. кафедрой информационных технологий Ташкентского ин-та ирригации и мелиорации. В 1969 г. окончил Самаркандский госуниверситет. Область научных исследований — математическое моделирование.

ХОДЖАЕВ Дадахан Акмарханович, ассистент кафедры информационных технологий Ташкентского ин-та ирригации и мелиорации. В 1996 г. окончил Ташкентский госуниверситет. Область научных исследований — механика деформируемого твердого тела.

ЭШМАТОВ Бахтиер Хасанович, канд. физ.-мат. наук, проф. факультета механики и космической техники университета Буффало, США. В 1997 г. окончил Ташкентский госуниверситет. Область научных исследований — математическое моделирование.

