УДК 519.512

А. Б. Касумов, канд. техн. наук
Азербайджанский технический университет
(Азербайджан, AZ1073, Баку, просп. Г. Джавида, 25,
тел. (+99412) 4383201, E-mail: adil.gasimov@mail.ru)

Исследование нестационарных характеристик длины очереди однолинейной системы массового обслуживания, зависящих от числа требований

(Статью представил д-р техн. наук М. В. Мыслович)

Рассмотрена однолинейная система массового обслуживания, на вход которой поступает поток марковского типа, зависящий от числа требований, находящихся в системе. Определены нестационарные и стационарные распределения длины очереди с использованием однолинейной системы массового обслуживания с параметрами, зависящими от числа требований.

Розглянуто однолінійну систему масового обслуговування, на вхід якої надходить потік марковського типу, що залежить від числа вимог, які перебувають у системі. Визначено нестаціонарні та стаціонарні розподілення довжини черги з використанням однолінійної системи масового обслуговування з параметрами, що залежать від числа вимог.

Ключевые слова: однолинейная система, длина очереди, скорость обслуживания, марковский процесс, преобразование Лапласа.

Известно, что во многих случаях для повышения надежности технического устройства, в частности узла электрической схемы системы, необходимо резервирование по мощности нагрузки или напряжению, что приводит к существенному изменению режима эксплуатации. Постоянное включение избыточных элементов (таких как конденсаторы, сопротивления, полупроводниковые диоды и триоды) требует учета перераспределения мощностей (токов) и напряжений. Такие задачи актуальны и при резервировании элементов сильноточных схем (силовых трансформаторов, кабелей и др.). Перераспределение мощностей и напряжений существенно влияет на интенсивность отказов схемы.

Представляется целесообразным исследовать нестационарные и стационарные вероятности характеристики однолинейной системы с очередью и счетным числом состояний в случае произвольной зависимости интенсивности входящего потока λ от числа требований i, находящихся в системе обслуживания, $\lambda_i = \lambda(i)$. Исследования нестационарных вероятностных характеристик таких систем являются весьма актуальной и важной задачей и представляют существенный теоретический и практический интерес.

Постановка задачи. Имеется однолинейная система массового обслуживания. На ее вход поступает поток марковского типа, параметр которого λ_i в момент t зависит от числа требований i, находящихся в системе в этот момент времени, т.е. вероятность поступления требования в интервале времени $(t, t+\Delta t)$, где Δt мало, равна $\lambda_i \Delta t + 0(\Delta t)$. Скорость обслуживания α_i также зависит от i. При этом величина работы по обслуживанию требований равна η_i. Случайная величина η_i имеет функцию распределения $H_i(x)$ с математическим ожиданием τ_i. Назовем длиной очереди число требований в системе. Обозначив через $v(t)$ длину очереди в момент t, найдем распределение длины очереди в момент t:

$$P_k(t) = P\{v(t) = k\}.$$

Решение задачи. Рассмотрим очередь длиной $v(t)$. Поскольку распределение количества работы для обслуживания требования произвольно, $v(t)$ не является марковским процессом. Для получения марковского процесса введем дополнительную переменную $\xi(t)$ — величину работы в момент времени t, которую необходимо выполнить для обслуживания требования, обслуживаемого в этот момент, если такое имеется. Следует заметить, что векторный процесс

$$\zeta(t) = \begin{cases} 0, \text{ если } v(t) = 0, \\ \{v(t), \xi(t)\}, \text{ если } v(t) > 0 \end{cases}$$

является марковским случайным процессом и частным случаем кусочно-линейных марковских процессов, введенных И. Н. Коваленко [1].

Введем обозначения для распределения процесса $\zeta(t)$:

$$\varphi_0(t) = P\{v(t) = 0\}, \;\; \varphi_i(x,t) = P\{v(t) = 1, \; \xi(t) < x\}, \;\; \varphi_0(t) = P_0(t).$$

Функции $\varphi_i(x, t)$ удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\varphi'_0(t) = -\lambda_0 \varphi_0(t) + \alpha_1 \frac{\partial \varphi_1(0, t)}{\partial x}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \varphi_1(x,t)}{\partial x} - \alpha_1 \frac{\partial \varphi_1(x,t)}{\partial x} =$$

$$=-\lambda_1\varphi_1(x,t)-\alpha_1\frac{\partial\varphi_1(0,t)}{\partial x}+\alpha_2\frac{\partial\varphi_2(0,t)}{\partial x}H_1(x)+\lambda_0P_0(t)H_1(x), \quad (2)$$

. . . .

$$\frac{\partial\varphi_i(x,t)}{\partial x}-\alpha_i\frac{\partial\varphi_i(x,t)}{\partial x}=-\lambda_i\varphi_i(x,t)-$$

$$-\alpha_i\frac{\partial\varphi_i(0,t)}{\partial x}+\alpha_{i+1}\frac{\partial\varphi_{i+1}(0,t)}{\partial x}H_i(x)+\lambda_{i-1}\varphi_{i-1}(x,t),\,(i\ge 2) \quad (3)$$

с начальными условиями

$$P_0(0)=P_0^{(0)},\ \varphi_i(x,0)=\varphi_i^{(0)}(x_i),\ P_i^{(0)}=\varphi_i^{(0)}(\infty),\,(i\ge 1).$$

Положим в (2) и (3) $x\to 0$. Принимая во внимание тот факт, что $\varphi_i(x,t)$ — ограниченная монотонно неубывающая функция, находим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\partial\varphi_i(x,t)}{\partial x}=0,\ (i\ge 1).$$

Тогда система (1)—(3) преобразуется к следующему виду:

$$\varphi_0'(t)+\lambda_0\varphi_0(t)=\alpha_1\frac{\partial\varphi_1(0,t)}{\partial x},$$

$$-\frac{\partial\varphi_1(\infty,t)}{\partial t}-\lambda_1\varphi_1(\infty,t)-\alpha_1\frac{\partial\varphi_1(0,t)}{\partial x}+\alpha_2\frac{\partial\varphi_2(0,t)}{\partial x}+\lambda_0\varphi_0(t)=0, \quad (4)$$

$$-\frac{\partial\varphi_i(\infty,t)}{\partial t}-\lambda_i\varphi_i(\infty,t)-\alpha_i\frac{\partial\varphi_1(0,t)}{\partial x}+\alpha_{i+1}\frac{\partial\varphi_{i+1}(0,t)}{\partial x}+\lambda_{i-1}\varphi_{i-1}(\infty,t)=0.$$

Складывая первое уравнение системы (4) со вторым, получившееся в результате уравнение — с третьим и так далее, находим

$$\alpha_{i+1}\frac{\partial\varphi_{i+1}(0,t)}{\partial x}=\lambda_i\varphi_i(\infty,t)+\sum_{j=0}^{i}\frac{\partial\varphi_j(\infty,t)}{\partial t}.$$

Поскольку $\varphi_i(\infty,t)=P_i(t)$, получаем

$$\alpha_{i+1}\frac{\partial\varphi_{i+1}(0,t)}{\partial x}=\lambda_iP_i(t)+\sum_{j=0}^{i}P_j'(t) \quad (5)$$

с использованием $P_j(t)$, $0\le j\le 1$.

Применяя к системе (1)—(3) двойное преобразование Лапласа, получаем следующую систему уравнений:

$$(u+\lambda_0)\widetilde{P}_0(u)=\alpha_1\frac{\partial\widetilde{\varphi}_1(0,u)}{\partial x}+P_0^{(0)}, \quad (6)$$

$$(u - s\alpha_1 + \lambda_1)\,\widetilde{\varphi}_1(s,u) =$$

$$= -\alpha_1 \frac{\partial \widetilde{\varphi}_1(0,u)}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial \widetilde{\varphi}_2(0,u)}{\partial x}\,\widetilde{h}_1(s) + \lambda_0 \widetilde{P}_0(u)\,\widetilde{h}_1(s) + \widetilde{\varphi}_1^{(0)}(s), \tag{7}$$

$$(u - s\alpha_i + \lambda_i)\,\widetilde{\varphi}_i(s,u) = \alpha_i \frac{\partial \widetilde{\varphi}_i(0,u)}{\partial x} +$$

$$+ \alpha_{i+1} \frac{\partial \widetilde{\varphi}_{i+1}(0,u)}{\partial x}\,\widetilde{h}_i(s) + \lambda_{i-1} \widetilde{\varphi}_{i-1}(s,u) + \widetilde{\varphi}_i^{(0)}(s), \;\; i \geq 2. \tag{8}$$

Применив к (5) преобразование Лапласа, получим

$$\alpha_{i+1} \frac{\partial \widetilde{\varphi}_{i+1}(0,u)}{\partial x} = \lambda_i \widetilde{P}_i(u) + u \sum_{j=0}^{i} \widetilde{P}_j(u) - \sum_{j=0}^{i} P_j^{(0)}. \tag{9}$$

Рассмотрим уравнение (8). Поскольку $\widetilde{\varphi}_i(s,u)$ является аналитической функцией при $\operatorname{Re}\{u\} > 0$ и $\operatorname{Re}\{1\} > 0$, при $u - s\alpha_i + \lambda_i = 0$ левая часть (8) равна нулю. Приравнивая нулю правую часть (8), при $S = \dfrac{u + \lambda_i}{\alpha_i}$ получаем

$$-\alpha_i \frac{\partial \widetilde{\varphi}_i(0,u)}{\partial x} + \alpha_{i+1} \frac{\partial \widetilde{\varphi}_{i+1}(0,u)}{\partial x}\;\widetilde{h}_i\left(\frac{u+\lambda_i}{\alpha_i}\right) +$$

$$+ \lambda_{i-1} \widetilde{\varphi}_{i-1}\left(\frac{u+\lambda_i}{\alpha_i}, u\right) + \widetilde{\varphi}_i^{(0)}\left(\frac{u+\lambda_i}{\alpha_i}\right) = 0. \tag{10}$$

Подставив (9) в (10), запишем

$$-\lambda_{i-1} \widetilde{P}_{i-1}(u) - u \sum_{j=0}^{i-1} \widetilde{P}_j(u) + \sum_{j=0}^{i-1} \widetilde{P}_j^{(0)} +$$

$$+ \widetilde{h}_i\left(\frac{u+\lambda_i}{\alpha_i}\right)\left((\lambda_i + n)\,\widetilde{P}_i(u) + u \sum_{j=0}^{i-1} \widetilde{P}_j(u) - \sum_{j=0}^{i} \widetilde{P}_j^{(0)}\right) +$$

$$+ \lambda_{i-1} \widetilde{\varphi}_{i-1}\left(\frac{u+\lambda_i}{\alpha_i}, u\right) + \widetilde{\varphi}_i^{(0)}\left(\frac{u+\lambda_i}{\alpha_i}\right) = 0.$$

Отсюда для $\widetilde{P}_i(u)$ находим

$$\widetilde{P}_i(u) = \frac{1}{(u+\lambda_i)\,\widetilde{h}_i\left(\dfrac{u+\lambda_i}{\alpha_i}\right)} \left[\lambda_{i-1} \widetilde{P}_{i-1}(u) + \widetilde{h}_i\left(\frac{u+\lambda_i}{\alpha_i}\right) P_i^{(0)} - \left(1 - \widetilde{h}_i\left(\frac{u+\lambda_i}{\alpha_i}\right)\right) \times\right.$$

$$\times\left(u\sum_{j=0}^{i-1}P_j^{(0)}-u\sum_{j=0}^{i-1}\widetilde{P}_j(u)\right)-\lambda_{i-1}\widetilde{\varphi}_{i-1}\left(\frac{u+\lambda_i}{\alpha_i},u\right)-\widetilde{\varphi}_i^{(0)}\left(\frac{u+\lambda_i}{\alpha_i}\right)\Bigg]. \quad (11)$$

Подставляя (9) в (8), получаем следующую формулу:

$$\widetilde{\varphi}_i(s,u)=\frac{1}{(u-s\alpha_i+\lambda_i)}[-\lambda_{i-1}\widetilde{P}_{i-1}(u)+\widetilde{h}_i(s)P_i^{(0)}(u)(u+\lambda_i)\widetilde{h}_i(s)-$$

$$-\left(u\sum_{j=0}^{i-1}P_j(u)-\sum_{j=0}^{i-1}P_j^{(0)}\right)(1-\widetilde{h}_i(s))+\lambda_{i-1}\widetilde{\varphi}_{i-1}(s,u)+\widetilde{\varphi}_i^{(0)}(s)\Bigg]. \quad (12)$$

По формулам (11) и (12) находим рекуррентные выражения $\widetilde{P}_i(u)$ и $\widetilde{\varphi}_i(s,u)$ через $\widetilde{P}_{i-1}(u)$ и $\widetilde{\varphi}_{i-1}(s,u)$.

Рассмотрим уравнение (7). При $s=\dfrac{u+\lambda_i}{\alpha_i}$ из (7) получаем

$$-\alpha_1\frac{\partial\widetilde{\varphi}_1(0,u)}{\partial x}+\alpha_2\frac{\partial\widetilde{\varphi}_2(0,u)}{\partial x}\widetilde{h}_1\left(\frac{u+\lambda_1}{\alpha_1}\right)+$$

$$+\lambda_0\widetilde{P}_0(u)\widetilde{h}_1\left(\frac{u+\lambda_1}{\alpha_1}\right)+\widetilde{\varphi}_1^{(0)}\left(\frac{u+\lambda_1}{\alpha_1}\right)=0. \quad (13)$$

Подставляя (9) в (13), находим

$$\widetilde{P}_1(u)=\frac{1}{(u+\lambda_1)\widetilde{h}_1\left(\dfrac{u+\lambda_1}{\alpha_1}\right)}\left[((u-\lambda_0)\widetilde{P}_0(u)-P_0^{(0)})\left(1-\widetilde{h}_1\left(\frac{u+\lambda_1}{\alpha_1}\right)\right)+\right.$$

$$\left.+P_1^{(0)}\widetilde{h}_1\left(\frac{u+\lambda_1}{\alpha_1}\right)-\widetilde{\varphi}_0^{(0)}\left(\frac{u+\lambda_1}{\alpha_1}\right)\right]. \quad (14)$$

Подставляя (9) в (7), получаем

$$\widetilde{\varphi}_1(s,u)=\frac{1}{(u-s\alpha_1+\lambda_1)}[\widetilde{P}_1(u)(u+\lambda_1)\widetilde{h}_1(s)-((u+\lambda_0)\widetilde{P}_0(u)-P_0^{(0)})\times$$

$$\times(1-\widetilde{h}_1(s))-\widetilde{h}_1(s)P_1^{(0)}+\widetilde{\varphi}_1^{(0)}(s)]=$$

$$=\frac{1}{(u-s\alpha_1+\lambda_1)\widetilde{h}_1\left(\dfrac{u+\lambda_1}{\alpha_1}\right)}\left[((u+\lambda_0)\widetilde{P}_0(u)-P_0^{(0)})\left(\widetilde{h}_1(s)-\widetilde{h}_1\left(\frac{u+\lambda_1}{\alpha_1}\right)\right)+\right.$$

$$\left.+\widetilde{\varphi}_1^{(0)}(s)\widetilde{h}_1\left(\frac{u+\lambda_1}{\alpha_1}\right)-\widetilde{\varphi}_1^{(0)}\left(\frac{u+\lambda_1}{\alpha_1}\right)\widetilde{h}_1(s)\right]. \quad (15)$$

Процесс называется собственным, если $\sum_{j=0}^{\infty} P_j(t)=1$ при всех $t>0$ и при любых начальных условиях. В преобразованиях Лапласа это условие имеет вид

$$\sum_{j=0}^{\infty} \widetilde{P}_j(u)=\frac{1}{u},$$

откуда определяется $\widetilde{P}_0(u)$.

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема. Если процесс $\zeta(t)$ является собственным, то справедливы рекуррентные соотношения

$$\widetilde{P}_i(u)=\frac{1}{(u+\lambda_i)\widetilde{h}_i\left(\frac{u+\lambda_i}{\alpha_i}\right)}\left[\lambda_{i-1}\widetilde{P}_{i-1}(u)+P_i^{(0)}\widetilde{h}_i\left(\frac{u+\lambda_i}{\alpha_i}\right)+\left(u\sum_{j=0}^{i-1}\widetilde{P}_j(u)-\sum_{j=0}^{i-1}\widetilde{P}_j^{(0)}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(1-\widetilde{h}_i\left(\frac{u+\lambda_i}{\alpha_i}\right)\right)-\lambda_i\widetilde{\varphi}_{i-1}\left(\frac{u+\lambda_i}{\alpha_i},u\right)-\widetilde{\varphi}_i^{(0)}\left(\frac{u+\lambda_i}{\alpha_i}\right)\right],$$

$$\widetilde{\varphi}_i(s,u)=\frac{1}{(u-s\alpha_i+\lambda_i)}[\widetilde{P}_i(u)(u+\lambda_i)\,\widetilde{h}_i(s)-\lambda_{i-1}\widetilde{P}_{i-1}(u)-P_i^{(0)}\widetilde{h}_i(s)+$$

$$\left.+\lambda_{i-1}\widetilde{\varphi}_{i-1}(s,u)-\left(u\sum_{j=0}^{i-1}P_j(u)-\sum_{j=0}^{i-1}P_j^{(0)}\right)(1-\widetilde{h}_i(s)+\widetilde{\varphi}_i^{(0)}(s))\right],$$

где $\widetilde{P}_0(u)$ определяется при условии

$$\sum_{i=0}^{\infty}\widetilde{P}_i(u)=\frac{1}{u}.$$

Из теории преобразования Лапласа известно, что если $\varphi(x)$ — функция, ограниченная при всех значениях x и стремящаяся к конечному пределу при $x\to\infty$, а $\alpha(s)$ — преобразование Лапласа этой функции, то справедлива формула $\lim\limits_{s\to 0}\{s\alpha(s)\}=\varphi(\infty)$. Обозначим $P_i=\lim\limits_{t\to\infty}P_i(t)$, $\varphi(x)=\lim\limits_{t\to\infty}\varphi_i(x,t)$.

Следствие. При условии существования стационарного эргодического распределения $\zeta(t)$ для P_i и $\widetilde{\varphi}(s)$ справедливы следующие рекуррентные соотношения:

$$\widetilde{P}_i=\frac{\lambda_{i-1}\left(P_{i-1}-\widetilde{\varphi}_{i-1}\left(\frac{\lambda_i}{\alpha_i}\right)\right)}{\lambda_i h_i\left(\frac{\lambda_i}{\alpha_i}\right)},$$

$$\widetilde{\varphi}_i(s)=\frac{1}{(\alpha_i s-\lambda_i)}[\lambda_{i-1}P_{i-1}-\lambda_i P_i\widetilde{h}_i(s)-\lambda_{i-1}\widetilde{\varphi}_{i-1}(s)], \qquad (16)$$

$$P_1=\frac{\lambda_0 P_0\left(1-h_1\left(\frac{\lambda_1}{\alpha_1}\right)\right)}{\lambda_1\widetilde{h}_1\left(\frac{\lambda_1}{\alpha_1}\right)},\quad \widetilde{\varphi}_1(s)=\frac{\lambda_0 P_0\left[\widetilde{h}_1\left(\frac{\lambda_1}{\alpha_1}\right)-\widetilde{h}_1(s)\right]}{(\alpha_1 s-\lambda_1)\,\widetilde{h}_1\left(\frac{\lambda_1}{\alpha_1}\right)},$$

где P_0 определяется из условия $\sum_{i=0}^{\infty}P_i=1$.

Действительно, умножая (11), (12), (14), (15) и условие $\sum_{i=0}^{\infty}P_i(u)=\frac{1}{u}$ на u и полагая, что $u\to 0$, получаем выражения (16), по которым легко определить P_i. При больших значениях i для вычисления P_i удобно использовать ЭВМ.

Предположение о том, что распределение работы по обслуживанию требования зависит от длины очереди в момент, когда это требование начинает обслуживаться, позволяет рассмотреть в виде частных случаев схемы, широко применяемые на практике.

В случае, если скорость обслуживания зависит от состояния и меняется от состояния к состоянию, достаточно положить $H_1(x)\equiv\ldots$ $\ldots\equiv H_i(x)\equiv\ldots\equiv H(x)$.

Возможен случай, когда скорость обслуживания требования остается постоянной, и допустим, что она равна единице, а время обслуживания зависит от длины очереди в начале обслуживания. Тогда можно считать, что $H_i(x)$ — это распределение времени обслуживания, если в начале обслуживания длина очереди была равна i и $\alpha_i=1$ (в этом случае величина работы и величина времени обслуживания численно одинаковы).

Пример применения полученных рекуррентных формул. Пусть два одинаковых устройства с интенсивностью отказов каждого λ восстанавливаются одним обслуживающим прибором. Время восстановления является случайной величиной η с законом распределения $H(x)$ и преобразованием Лапласа—Стилтьеса $\widetilde{h}(s)$. Скорость восстановления равна единице. В рассматриваемом примере $\lambda_i=(2-i)\lambda$ определим $\widetilde{P}_0(u)$, $\widetilde{P}_1(u)$ и $\widetilde{P}_2(u)$ при начальных условиях $P_0^{(0)}=P_0(0)$, $\varphi_1(x,0)=\varphi_1^{(0)}(x)$, $\varphi_2(x,0)=\varphi_2^{(0)}(x)$. Пусть

$$\widetilde{\varphi}_i^{(0)}(s)=\int_0^{\infty}e^{-sx}d\varphi_i^{(0)}(x),\quad i=1,2\,.$$

Из (14)—(15) находим

$$\widetilde{P}_1(u)=\frac{1}{(u+\lambda)\,\widetilde{h}\,(u+\lambda)}[((u+2\lambda)\,\widetilde{P}_0(u)-P_0^{(0)})(1-\widetilde{h}\,(u+\lambda))+$$

$$+P_1^{(0)}\widetilde{h}\,(u+\lambda)-\widetilde{\varphi}_1^{(0)}(u+\lambda)],$$

$$\widetilde{P}_2(u)=\frac{1}{u}[\lambda_1(\widetilde{P}_1(u)-\widetilde{\varphi}_1(u,u))+P_2^{(0)}-\widetilde{\varphi}_2^{(0)}(u)].$$

Для определения $\widetilde{P}_0(u)$ используем условие $\widetilde{P}_0(u)+\widetilde{P}_1(u)+\widetilde{P}_2(u)=\frac{1}{u}$. Тогда

$$P_0(u)=\frac{\begin{pmatrix}\widetilde{h}(u+\lambda)+P_0^{(0)}(1-\widetilde{h}\,(u))-\widetilde{h}\,(u+\lambda)\times \\ \times(P_1^{(0)}-\widetilde{\varphi}_1^{(0)}(u)-P_2^{(0)}-\widetilde{\varphi}_2^{(0)}(u)+\varphi_1(u+\lambda)(1-\widetilde{h}\,(u)))\end{pmatrix}}{u\widetilde{h}\,(u+\lambda)+(u+2\lambda)(1-\widetilde{h}\,(u))},$$

$$P_1(u)=\frac{1}{(u+\lambda)\,\widetilde{h}\,(u+\lambda)}[((u+2\lambda)\,\widetilde{P}_0(u)-P_0^{(0)})(1-\widetilde{h}\,(u+\lambda))+$$

$$+P_1^{(0)}\widetilde{h}\,(u+\lambda)-\varphi_1^{(0)}(u+\lambda)],$$

$$\widetilde{P}_2(u)=\frac{1}{u}\Bigg[P_2^{(0)}-\widetilde{\varphi}_2^{(0)}(u)+$$

$$+\lambda\left(\frac{(u+2\lambda)\,\widetilde{P}_0(u)-P_0^{(0)}}{\widetilde{h}\,(u+\lambda)}\frac{\lambda\,(1-\widetilde{h}\,(u))-u\,(h\,(u)-\widetilde{h}\,(u+\lambda)}{\lambda\,(u+\lambda)}\right)+$$

$$+\frac{P_1^{(0)}}{u+\lambda}-\frac{\widetilde{\varphi}_1^{(0)}(u+\lambda)}{(u+\lambda)\,\widetilde{h}\,(u+\lambda)}-\frac{\varphi_1^{(0)}(u)}{\lambda}+\frac{\widetilde{h}\,(u)\widetilde{\varphi}_1^{(0)}(u+\lambda)}{\lambda\widetilde{h}\,(u+\lambda)}\Bigg].$$

В стационарном случае

$$P_0=\frac{\widetilde{h}\,(\lambda)}{\widetilde{h}\,(\lambda)+2\lambda\tau},\quad P_1=\frac{2\,(1-\widetilde{h}\,(\lambda))}{\widetilde{h}\,(\lambda)+2\lambda\tau},\quad P_2=\frac{2\,(\lambda\tau+\widetilde{h}\,(\lambda)-1)}{\widetilde{h}\,(\lambda)+2\lambda\tau}.$$

Легко видеть, что исследуемый процесс $\zeta\,(t)$ является обобщением известных процессов гибели и размножения.

Таким образом, получены явные формулы для нестационарных и стационарных распределений длины очереди однолинейной системы с параметрами, зависящими от длины очереди.

Вывод. Предложенные рекуррентные соотношения позволяют определить стационарные и нестационарные распределения однолинейной системы массового обслуживания поступающего марковского потока, а также скорость обслуживания, зависящую от числа требований, находящихся в системе, и изучить простые достаточные условия существования стационарного эргодического распределения марковского процесса, характеризующего функционирование системы. Исследование таких систем является весьма актуальной и важной задачей и представляет существенный теоретический и практический интерес. В дальнейших исследованиях, посвященных рассматриваемому кругу вопросов, представляет интерес найти необходимые и достаточные условия существования стационарного эргодического распределения рассматриваемых процессов.

A single-line queueing system is considered. Markov's type stream arrives on this one-line system's input which depends on the number of requirements being in the system. Non-stationary and stationary distributions of the length of line with the use of a single-line queueing system with the parameters depending on the number of requirements are defined.

1. *Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н.* Введение в теорию массового обслуживания. — М. : Наука, 1966. — 431 с.
2. *Ивницкий В. А., Касумов А. Б.* Системы обслуживания с ненадежным прибором и зависимыми параметрами. — Баку : Элм, 1986. — 167 с.
3. *Касумов А. Б.* Исследование однолинейной системы массового обслуживания с параметрами, зависящими от ее состояния // Изд. АН Азерб. ССР. Сер. физ. тех и мат. наук. — 1999. — № 3, 4. — С. 49—54.
4. *Касумов А. Б.* Исследование однолинейной системы массового обслуживания с ненадежным обслуживающим прибором с параметрами, зависящими от ее состояния // Вест. Бакинского университета физ-мат. наук. — 2000. — № 3. — С. 120—126.

Поступила 15.12.09

КАСУМОВ Адиль Беюг оглы, канд. техн. наук, доцент Азербайджанского технического университета (г. Баку). В 1968 г. окончил Азербайджанский госуниверситет. Область научных исследований – теория массового обслуживания, математические методы в теории надежности.