Low Temperature Physics/Физика низких температур, 2015, т. 41, № 11, с. 1154–1163

Кулоновский потенциал взаимодействия и конденсат Бозе–Эйнштейна

В.Б. Бобров[1], А.Г. Загородний[2], С.А. Тригер[1]

[1]*Объединенный институт высоких температур РАН, ул. Ижорская, д. 13, стр. 2, г. Москва, 125412, Россия*
E-mail: vic5907@mail.ru, satron@mail.ru

[2]*Институт теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова НАН Украины*
ул. Метрологическая, д. 14-б, г. Киев, 03680, Украина
E-mail: azagorodny@bitp.kiev.ua

Статья поступила в редакцию 14 июля 2015 г., опубликована онлайн 25 сентября 2015 г.

На основании результатов статистической квантовой электродинамики показано, что кулоновский потенциал взаимодействия заряженных частиц не имеет фурье-компоненты при нулевом волновом векторе. Этот результат обеспечивает возможность применения для описания кулоновской системы большого канонического распределения Гиббса с независимым описанием заряженных частиц различных сортов. На этой основе установлена возможность существования энергетической щели в спектре одночастичных возбуждений в области малых импульсов при наличии конденсата Бозе–Эйнштейна в кулоновской системе, что не противоречит существованию коллективных возбуждений, которые характеризуются фонон-ротонным спектром.

На підставі результатів статистичної квантової електродинаміки показано, що кулонівський потенціал взаємодії заряджених часток не має фур'є-компоненти при нульовому хвильовому векторі. Цей результат забезпечує можливість застосування опису кулонівської системи великого канонічного розподілу Гіббса з незалежним описом заряджених часток різних сортів. На цій основі встановлено можливість існування енергетичної щілини в спектрі одночасткових збуджень в області малих імпульсів за наявності конденсату Бозе–Ейнштейна в кулонівській системі, що не суперечить існуванню колективних збуджень, які характеризуються фонон-ротонним спектром.

PACS: **67.40.–w** Бозон вырождения и сверхтекучесть ^{4}He;
67.10.Fj Квантовая статистическая теория;
52.27.Gr Сильносвязанная плазма;
67.85.De Динамические свойства конденсатов, возбуждений и сверхтекучего потока.

Ключевые слова: сверхтекучий He II, кулоновский потенциал взаимодействия, кулоновская система, конденсат Бозе–Эйнштейна.

1. Введение

Длительное время при теоретическом исследовании сверхтекучий He II рассматривался как инертная жидкость, состоящая из нейтральных атомов с нулевым спином и наличием атомарного конденсата Бозе–Эйнштейна (КБЭ) (см. подробнее [1–3] и цитированную там литературу). Поэтому результаты экспериментов [4–7], показывающих электрическую активность сверхтекучего He II, оказались неожиданными, поскольку атом гелия не обладает собственным дипольным моментом. Речь идет, прежде всего, о наблюдении электрического поля, в том числе в СВЧ диапазоне, возникающего при распространении волн второго звука либо при вынужденных колебаниях скорости нормальной компоненты. К настоящему времени для описания этого эффекта предложен целый ряд теоретических моделей [8–19]. Мы хотели бы обратить внимание на то, что последовательное теоретическое исследование электромагнитных явлений в среде подразумевает рассмотрение атома как составной частицы, представляющей собой связанное состояние ядра и электронов. Это приводит к необходимости исследования сверхтекучего гелия как кулоновской системы (КС), представляющей собой нерелятивистскую систему заряженных электронов и ядер, взаимодействующих между собой по закону Кулона, при наличии КБЭ для ядер [20]. Подобная постановка задачи при рассмотрении электрической активности в He II имела место в работах [10,14,15].

В этой связи необходимо подчеркнуть различие между понятиями КС и плазма — последняя представляет собой КС, в которой средняя плотность электронов, находящихся в делокализованных состояниях (состояниях рассеяния), сравнима со средней плотностью всех электронов в рассматриваемом веществе. С этой точки зрения нейтральная жидкость является КС, в которой средняя плотность делокализованных электронов чрезвычайно мала, так что такую систему во многих случаях можно рассматривать как систему исходных атомов (см. [21,22] и цитированную там литературу). В рамках адиабатического приближения для подсистемы ядер исходный атом представляет собой ядро с локализованными около него электронными состояниями. Очевидно, размер исходного атома, определяемый неоднородным распределением электронной плотности около ядра соответствующего атома, должен быть значительно меньше среднего расстояния между исходными атомами [22]. Однако использование адиабатического приближения приводит к неоднозначности при определении парного потенциала взаимодействия между исходными атомами, так как в этом подходе, помимо парного взаимодействия между атомами, имеет место трехчастичное взаимодействие и т.д. (см., например, [23]). С другой стороны, в рамках существующей теории квантовой нейтральной бозе-жидкости с КБЭ вид парного потенциала взаимодействия атомов, как показано в [24], имеет принципиальное значение. Это приводит к необходимости развития соответствующей теории для определения парного потенциала взаимодействия атомов в жидкости (см., например, [25]).

Альтернативный вариант, который широко распространен в теории плазмы [26], основан на равноправном рассмотрении электронов и ядер в КС без использования адиабатического приближения для подсистемы ядер. В применении к КС с КБЭ этот подход находится в начальной стадии развития [20], хотя исследование так называемого заряженного бозе-газа, представляющего собой модельную однокомпонентную систему заряженных бозонов в компенсирующем фоне, имеет длительную историю [27]. Суть проблемы сводится к тому, что для описания нейтральных жидкостей на основе КС необходимо учитывать эффекты сильного взаимодействия электронов и ядер [28].

В подавляющем большинстве случаев теоретическое исследование КС проводится с применением диаграммных методов теории возмущений [29–32], которые основаны на использовании большого канонического распределения Гиббса (далее по тексту — Большое распределение) [1,26]. Однако при построении Большого распределения для КС имеется весьма существенная проблема. Дело в том, что при традиционном рассмотрении (см., например, [33]) Большое распределение строится из соответствующих канонических распределений с различным числом заряженных частиц в каждом распределении с последующим суммированием по числу частиц. Но при таком построении Большого распределения для КС в каждом каноническом распределении должно выполняться условие квазинейтральности [34]

$$\sum_{a=e,n} z_a e n_a^0 = 0, \tag{1}$$

где $n_a^0 = \left\langle \hat{N}_a \right\rangle^{(\mathrm{can})} / V$ — средняя плотность числа частиц сорта a с зарядом $z_a e$ в объеме V, $\hat{N}_a$ — оператор полного числа частиц сорта a, электронам соответствует индекс e, ядрам — индекс n, угловые скобки $\langle \ldots \rangle^{(\mathrm{can})}$ обозначают усреднение с каноническим распределением. В этом случае числа электронов и ядер становятся зависимыми. Соответственно, «исчезает» основное преимущество Большого распределения, связанное с возможностью независимого рассмотрения каждого сорта частиц, что позволяет вычислить функции Грина для невзаимодействующих частиц каждого сорта с последующим построением диаграммной техники теории возмущений в квантовом случае [1].

Для того чтобы при использовании Большого распределения в КС можно было считать заряженные частицы разных сортов формально независимыми, необходимо убедиться в эквивалентности получаемых таким образом результатов, аналогичных результатам, найденным на основе канонического распределения Гиббса. Анализ этой проблемы, проведенный в [35], показывает, что в этом случае необходимым условием эквивалентности Большого и канонического распределений является равенство нулю фурье-компоненты потенциала кулоновского взаимодействия заряженных частиц при нулевом волновом векторе.

По-видимому, впервые подобное утверждение было сделано Веденовым и Ларкиным [36] при исследовании термодинамических свойств слабонеидеальной плазмы (см. также [37]). Оно также используется в теории заряженного Бозе газа [38] (см. также [27]) и теории твердых металлов [39]. Но в указанных работах это утверждение основано на использовании условия квазинейтральности для Большого распределения. Однако для обеспечения эквивалентности распределений Гиббса в КС требование равенства нулю фурье-компоненты потенциала кулоновского взаимодействия заряженных частиц при нулевом волновом векторе должно выполняться без использования условия квазинейтральности [35]. В настоящей работе будет дано доказательство этого равенства, что, как будет показано ниже, имеет принципиальное значение для КС с КБЭ.

2. Термодинамические потенциалы для кулоновской системы

Рассмотрим многокомпонентную КС в большом (макроскопическом), но конечном объеме V при температуре T.. Гамильтониан $\hat{H}$ такой системы имеет вид

$$\hat{H} = \hat{K} + \hat{U}, \quad \hat{K} = \sum_a \sum_{\mathbf{p}\sigma} \epsilon_a(p) \hat{a}^+_{\mathbf{p}\sigma} \hat{a}_{\mathbf{p}\sigma}, \quad \hat{U} = \hat{U}^{(0)} + \hat{U}^{(q)}, \tag{2}$$

$$\hat{U}^{(0)} == \frac{1}{2V} u(\mathbf{q}=0) \left\{ \sum_{a,b} z_a z_b e^2 \hat{N}_a \hat{N}_b - \sum_a z_a^2 e^2 \hat{N}_a \right\}, \tag{3}$$

$$\hat{U}^{(q)} = \frac{1}{2V} \times$$

$$\times \sum_{a,b} \sum_{\mathbf{q}\neq 0} \sum_{\{\mathbf{p}\sigma\}} u_{ab}(\mathbf{q}) \hat{a}^+_{\mathbf{p}_1 + \mathbf{q}/2, \sigma_1} \hat{b}^+_{\mathbf{p}_2 - \mathbf{q}/2, \sigma_2} \hat{b}_{\mathbf{p}_2 + \mathbf{q}/2, \sigma_2} \hat{a}_{\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}/2, \sigma_1}, \tag{4}$$

где $\hat{K}$ — оператор кинетической энергии, $\hat{U}$ — оператор потенциальной энергии взаимодействия заряженных частиц, $\epsilon_a(p) = \hbar^2 p^2 / 2m_a$ — энергия свободной частицы сорта a с массой m_a, зарядом $z_a e$ и спином σ_a, $\hat{a}^+_{\mathbf{p}\sigma}$ и $\hat{a}_{\mathbf{p}\sigma}$ — операторы рождения и уничтожения для частиц сорта a с импульсом $\hbar\mathbf{p}$ и проекцией спина σ, $\hat{N}_a = \sum_{\mathbf{p}\sigma} \hat{a}^+_{\mathbf{p}\sigma} \hat{a}_{\mathbf{p}\sigma}$, $u_{ab}(\mathbf{q}) = z_a z_b e^2 u(\mathbf{q})$ — фурье-компонента потенциала кулоновского взаимодействия частиц сортов a и b между собой,

$$u_{ab}(r) = \frac{z_a z_b e^2}{r} = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{q}} u_{ab}(\mathbf{q}) \exp(i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}). \tag{5}$$

При использовании канонического распределения Гиббса мы можем определить свободную энергию КС

$$F(T,V,\{N_a\}) = -T \ln Z(T,V,\{N_a\}), \quad Z = \mathrm{Tr} \exp(-\hat{H}/T), \tag{6}$$

где T — температура КС в энергетических единицах. С учетом равенств

$$\left[\hat{U}^{(0)}, \hat{K}\right] = 0, \quad \left[\hat{U}^{(0)}, \hat{U}^{(q)}\right] = 0, \tag{7}$$

а также соотношений (2)–(4) из (6) непосредственно следует

$$F = U^{(0)} + F^{(q)},$$

$$U^{(0)} = \frac{1}{2V} u(\mathbf{q}=0) \left\{ \sum_{a,b} z_a z_b e^2 N_a N_b - \sum_a z_a^2 e^2 N_a \right\}, \tag{8}$$

$$F^{(q)} = -T \ln Z^{(q)}, \quad Z^{(q)} = \mathrm{Tr} \exp(-H^{(q)}/T),$$

$$\hat{H}^{(q)} = \hat{K} + \hat{U}^{(q)}. \tag{9}$$

Здесь учтено, что при вычислении канонической статистической суммы $Z(T,V,\{N_a\})$ (6) оператор полного числа частиц $\hat{N}_a$ может рассматриваться как число $N_a = \left\langle \hat{N}_a \right\rangle^{(\mathrm{can})}$.

Для того чтобы величина $F(T,V,\{N_a\})$ (6) соответствовала свободной энергии в феноменологической термодинамике, необходимо доказать, (см., например, [40]), что $F(T,V,\{N_a\})$ представляет собой экстенсивную функцию, или, что эквивалентно, плотность свободной энергии $f = F/V$ конечна в термодинамическом пределе $V \to \infty$, $N_a \to \infty$, $n_a^0 = N_a/V = \mathrm{const}$ и зависит только от плотностей $\{n_a^0\}$ и температуры:

$$\lim_{V\to\infty} F(T,V,\{N_a\})/V =$$

$$= -\lim_{V\to\infty} T \ln Z(T,V,\{n_a^0 V\})/V = f(T,\{n_a^0\}). \tag{10}$$

Согласно (8) и (9), имеем

$$f = f^{(0)} + f^{(q)}, \quad f^{(0)} = \lim_{V\to\infty} U^{(0)}/V,$$

$$f^{(q)} = \lim_{V\to\infty} F^{(q)}/V. \tag{11}$$

В рамках традиционного рассмотрения КС предполагается, что потенциал $u_{ab}(r)$ (5) кулоновского взаимодействия заряженных частиц задан *a priori*, поэтому

$$u_{ab}(\mathbf{q}=0) = \int_V d^3 r\, u_{ab}(r), \quad \lim_{V\to\infty} V^{-1} u_{ab}(\mathbf{q}=0) = 0. \tag{12}$$

При использовании канонического распределения условие квазинейтральности (1) можно представить как $\sum_{a=e,n} z_a e N_a = 0$, так что $f^{(0)} = 0$. В результате для равновесной КС

$$f(T,\{n_a^0\}) = f^{(q)}(T,\{n_a^0\}). \tag{13}$$

Для определения величины $f^{(q)}$ следует учесть эффекты экранирования для фурье-компоненты потенциала кулоновского взаимодействия $u_{ab}(\mathbf{q}\neq 0)$ (см., подробнее, [26]). Это позволяет при доказательстве утверждения (10) для КС использовать методы, характерные для систем, в которых частицы взаимодействуют между собой посредством короткодействующих потенциалов [41,42]. В результате, термодинамические функции КС при использовании канонического распределения не зависят от величины $u(\mathbf{q}=0)$ при справедливости условия квазинейтральности (1).

Ситуация принципиально изменяется при рассмотрении термодинамических свойств КС с использованием Большого распределения. В этом случае задача сводится к определению термодинамического потенциала Ω, определяемого через большую статистическую сумму $\tilde{Z}$:

$$\Omega(T,V,\{\mu_a\}) = -T\ln\tilde{Z}(T,V,\{\mu_a\}), \tag{14}$$

где μ_a — химический потенциал для частиц сорта a. При определении функции $\tilde{Z}(T,V,\{\mu_a\})$ возможны два варианта. Первый вариант (индекс (1)) основан на следующем определении:

$$\tilde{Z}^{(1)}(T,V,\{\mu_a\}) =$$

$$= \sum_a \sum_{N_a=0}^{\infty} \exp\left(\sum_b \mu_b N_b/T\right) Z\left(T,V,\{N_b\},\sum_d z_d e N_d = 0\right), \tag{15}$$

т.е. большая статистическая сумма $\tilde{Z}^{(1)}$ составлена из статистических сумм Z, для каждой из которых выполняется условие $\sum_d z_d e N_d = 0$.

В этом случае обеспечивается «традиционная» эквивалентность канонического и большого канонического ансамблей, а значение величины $\tilde{Z}^{(1)}$ не зависит от $u(\mathbf{q}=0)$. Тем самым, термодинамические функции КС при использовании Большого распределения полностью определяются гамильтонианом $\hat{H}^{(q)}$ (9), как и в случае применения канонического распределения. Однако при таком определении величины $\tilde{Z}^{(1)}$ термодинамический потенциал Ω_0 (14) не может быть вычислен методами диаграммной техники.

Альтернативный вариант основан на предположении, что при вычислении большой статистической суммы условие $\sum_d z_d e N_d = 0$ для каждой статистической суммы Z в (15) может быть исключено из рассмотрения. Вместо этого должно быть выполнено аналогичное равенство, но для средних значений чисел частиц:

$$\sum_a z_a e \left\langle \hat{N}_a \right\rangle^{(\text{grand})} = 0. \tag{16}$$

Здесь угловые скобки $\langle \ldots \rangle^{(\text{grand})}$ обозначают усреднение с Большим распределением. При этом $\left\langle \hat{N}_a \right\rangle^{(\text{grand})} = V \cdot n_a(T,\{\mu_a\})$, где n_a — плотность числа частиц сорта a при использовании Большого распределения. Именно этот вариант реализуется при построении диаграммной техники теории возмущений для КС (см., например, [26]).

Чтобы убедиться в необходимости выполнения условия (16), используем известное соотношение в феноменологической термодинамике [33,40]

$$\Omega(T,V,\{\mu_a\}) = -P(T,\{\mu_a\})V, \tag{17}$$

а также теорему вириала для давления $P(T,\{\mu_a\})$ в КС (см. подробнее [32])

$$P(T,\{\mu_a\}) = \frac{2\hat{K}^{(\text{grand})}}{3V} + \frac{\hat{U}^{(\text{grand})}}{3V}, \tag{18}$$

где с учетом (3), (4)

$$\hat{U}^{(\text{grand})} = \hat{U}^{(0)(\text{grand})} + \hat{U}^{(q)(\text{grand})}. \tag{19}$$

Согласно (3), (18), (19) величина давления будет конечной в термодинамическом пределе при условии

$$\lim_{V\to\infty} \frac{1}{V^2} u(\mathbf{q}=0) \times$$

$$\times \left| \sum_{a,b} z_a z_b e^2 \hat{N}_a \hat{N}_b^{(\text{grand})} - \sum_a z_a^2 e^2 \hat{N}_a^{(\text{grand})} \right| < \infty. \tag{20}$$

Принимая во внимание известное равенство [33,40]

$$\left\langle \hat{N}_a \hat{N}_b \right\rangle^{(\text{grand})} = \left\langle \hat{N}_a \right\rangle^{(\text{grand})} \left\langle \hat{N}_b \right\rangle^{(\text{grand})} + VT\left(\frac{\partial n_a}{\partial \mu_b}\right)_T, \tag{21}$$

и предполагая, что $\left|(\partial n_a/\partial\mu_b)_T\right| < \infty$, из требования (20) приходим к условию квазинейтральности (16) как необходимому условию соответствия между феноменологической термодинамикой и использованием Большого распределения. В результате создается впечатление, что величина $u(\mathbf{q}=0)$ (12) выпадает из рассмотрения. Другими словами, в теории систем с кулоновским взаимодействием было принято считать, что

$$u_{ab}(\mathbf{q}=0) = 0 \tag{22}$$

в силу условия квазинейтральности (16) (см. подробнее [36–39]).

Однако в рассматриваемом случае (вариант (2)) большая статистическая сумма $\tilde{Z}^{(2)}$, а вместе с ней и термодинамические функции КС, зависят от величины $u(\mathbf{q}=0)$. Действительно, с учетом (8), (9) величина $\tilde{Z}^{(2)}(T,V,\{\mu_a\})$ имеет вид

$$\tilde{Z}^{(2)}(T,V,\{\mu_a\}) = \sum_a \sum_{N_a=0}^{\infty} \exp\left(\sum_b \mu_b N_b/T\right) \times$$

$$\times \exp\left[F^{(q)}\left(T,V,\{N_a\}\right)/T\right] \cdot \exp\left(U_0/T\right). \tag{23}$$

«Избавиться» от величины $\exp(U_0/T)$ в (22) не представляется возможным даже при переходе к термодинамическому пределу и справедливости условия (16). Но величина U_0 (8) зависит от $u(\mathbf{q}=0)$, в то время как при использовании канонического распределения такая зависимость отсутствует.

Таким образом, для обеспечения эквивалентности канонического распределения и большого канонического распределения, в котором заряженные частицы разных сортов рассматриваются как формально независимые, необходимо убедиться в справедливости утверждения (22) без использования условия квазинейтральности.

3. Кулоновский потенциал и теория поля

Обратим внимание на известную «проблему» при вычислении фурье-компоненты для потенциала кулоновского взаимодействия (5) в случае, когда вид потенциала $u_{ab}(r) = z_a z_b e^2/r$ считается известным:

$$u_{ab}(q \neq 0) = \int d^3 r u_{ab}(r) \exp(-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}) = \frac{4\pi z_a z_b e^2}{q^2} \int_0^\infty dx \cdot \sin x. \tag{24}$$

Но последний интеграл в (24) не определен. Поэтому при вычислении величины $u_{ab}(q \neq 0)$ по известному виду потенциала $u_{ab}(r)$ обычно используется следующая процедура регуляризации интеграла

$$u_{ab}(q \neq 0) = \frac{4\pi z_a z_b e^2}{q^2} \lim_{\alpha \to +0} \int_0^\infty dx \cdot \exp(-\alpha x) \sin x = \frac{4\pi z_a z_b e^2}{q^2}. \tag{25}$$

Чтобы установить причину, по которой требуется специальная процедура для определения фурье-компоненты $u_{ab}(q \neq 0)$ при заданном потенциале $u_{ab}(r)$, обратим внимание на то, что закон Кулона экспериментально установлен для макроскопических заряженных тел (см. [43] и цитированную там литературу). В то же время для определения потенциала взаимодействия между элементарными заряженными частицами следует исходить из микроскопических уравнений Максвелла. Поэтому установление явного вида потенциала взаимодействия между заряженными частицами (закона Кулона) как функции расстояния между ними в классической теории поля осуществляется на основе фурье-преобразования уравнений Максвелла [44]. При этом кулоновский потенциал определяет электростатическое взаимодействие заряженных частиц, поэтому для определения фурье-компоненты потенциала кулоновского взаимодействия используется уравнение Пуассона, что и приводит в конечном итоге к результату $u_{ab}(q \neq 0) = 4\pi z_a z_b e^2/q^2$.

По известному виду величины $u_{ab}(q \neq 0)$, переходя от ряда Фурье (5) к интегралу Фурье в пределе $V \to \infty$ и предполагая, что $\lim_{V \to \infty} V^{-1} u_{ab}(\mathbf{q} = 0) = 0$, легко получить закон Кулона для величины $u_{ab}(r)$. Таким образом, в классической теории поля величина $u_{ab}(r)$ устанавливается на основе $u_{ab}(q \neq 0)$, а не наоборот.

Однако, согласно уравнению Пуассона, величина $u_{ab}(\mathbf{q} = 0)$ остается неопределенной. В такой неопределенности, на основании классической теории поля, отсутствует проблема, так как непосредственный физический смысл имеет напряженность электрического поля, которая определяется волновыми векторами не равными нулю. При этом сама неопределенность $u_{ab}(\mathbf{q} = 0)$ при условии $\lim_{V \to \infty} V^{-1} u_{ab}(\mathbf{q} = 0) = 0$ не сказывается на виде потенциала $v_{ab}(r)$, поскольку соответствующий интеграл сходится.

Это означает, что для решения вопроса о значении величины $u_{ab}(\mathbf{q} = 0)$ необходимо обратиться к результатам квантовой теории поля, согласно которой заряженные частицы взаимодействуют между собой посредством квантованного электромагнитного поля.

В рамках квантовой статистической электродинамики [45] эффективное взаимодействие между заряженными частицами определяется функцией Грина для квантованного электромагнитного поля $D_{\mu\nu}(k)$ $(k = (\omega/c, \mathbf{q}))$, которая задается четырехмерным фурье-преобразованием пространственно-временной функции Грина $D_{\mu\nu}(x, y) = -\frac{i}{\hbar}\left\langle T(\hat{A}_\mu(x)\hat{A}_\nu(y))\right\rangle$. Здесь $\hat{A}_\mu(x)$ — оператор 4-вектора потенциала, отвечающего квантованному электромагнитному полю в представлении Гейзенберга; x, y — 4-векторы $(ct, \mathbf{r})$; $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$; символ T обозначает упорядочение по времени, а угловые скобки $\langle\ \rangle$ — статистическое усреднение. В отсутствие внешних источников $D_{\mu\nu}(x, y) = D_{\mu\nu}(x - y)$.

Для определения функции $D_{\mu\nu}(k)$ следует использовать дискретное импульсное представление (см. (5)) [46]. В этом случае фурье-преобразование для 4-вектора потенциала, отвечающего квантованному электромагнитному полю, не содержит члена с $\mathbf{q} = 0$, так как квант электромагнитного поля (фотон) имеет энергию $\hbar c|\mathbf{q}|$. Другими словами, фотоны обладают нулевой энергией покоя (в отличие от частиц), поэтому при квантовании 4-вектора потенциала электромагнитного поля отсутствует пространственно однородная составляющая. По этой причине значение волнового вектора $\mathbf{q}$ в функции Грина $D_{\mu\nu}(k)$ не может принимать нулевое значение.

Так как функция Грина $D_{\mu\nu}(k)$ характеризует эффективное взаимодействие между заряженными частицами, это означает, что изменение импульса $\hbar\mathbf{q}$ в процессе взаимодействия должно быть отлично от нуля. Другими словами, не может существовать физической субстанции, которая является «переносчиком» взаимодействия, если результатом такого взаимодействия является нулевая передача импульса.

В силу калибровочной инвариантности квантовой электродинамики для описания квантованного скалярного и продольного электромагнитного поля используются различные калибровки. В кулоновской калибровке, которая наиболее соответствует переходу к нерелятивистскому пределу при описании системы заряженных частиц, функция Грина $D^{(0)}_{\mu\nu}(k)$, отвечающая свободному электромагнитному полю, равна [45]:

$$D_{\mu\nu}^{(0)}(k)=\left(\delta_{\mu\nu}-\frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right)\frac{4\pi c^2}{k^2},$$

$$D_{\mu 0}^{(0)}(k)=D_{0\mu}^{(0)}(k)=0,\quad D_{00}^{(0)}(k)=\frac{4\pi}{q^2},\ \mu,\nu=1,2,3. \tag{26}$$

Таким образом, функция Грина $D_{00}^{(0)}(k)=4\pi/q^2$ соответствует кулоновскому потенциалу взаимодействия заряженных частиц, в то время как функция Грина $D_{\mu\nu}^{(0)}(k)$ $(\mu,\nu=1,2,3)$ характеризует взаимодействие заряженных частиц посредством поперечных фотонов.

При наличии заряженных частиц функция Грина для электромагнитного поля в кулоновской калибровке принимает вид

$$D_{\mu\nu}(k)=\left(\delta_{\mu\nu}-\frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right)\frac{4\pi c^2}{\varepsilon^{tr}(k)\omega^2-c^2q^2},\qquad \mu,\nu=1,2,3; \tag{27}$$

$$D_{\mu 0}(k)=D_{0\mu}(k)=0,\qquad D_{00}(k)=\frac{4\pi}{\varepsilon^{l}(k)q^2}, \tag{28}$$

где $\varepsilon^{tr}(k)$ и $\varepsilon^{l}(k)$ — поперечная и продольная диэлектрические проницаемости системы заряженных частиц и квантованного электромагнитного поля [45], которые полностью определяют линейные электромагнитные свойства такой системы [47].

Далее можно упростить рассмотрение, если учесть, что постоянная тонкой структуры $\alpha=e^2/\hbar c\cong 1/137$, которая характеризует силу взаимодействия между электрическими зарядами и поперечными фотонами, является малым параметром. В этом случае, рассматривая заряженные частицы в нерелятивистском пределе, приходим к выводу, что функция Грина $D_{00}(k)$ полностью соответствует экранированному кулоновскому взаимодействию заряженных частиц для равновесной КС в нерелятивистском пределе (см. подробнее [26]).

В результате, согласно квантовой статистической электродинамике, утверждение (22) для величины $u_{ab}(\mathbf{q}=0)$ справедливо в том смысле, что потенциал кулоновского взаимодействия $u_{ab}(r)$ представляется в виде ряда Фурье (5), в котором отсутствует член с $\mathbf{q}=0$:

$$u_{ab}(r)=\frac{1}{V}\sum_{\mathbf{q}\neq 0}u_{ab}(\mathbf{q})\exp(i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}). \tag{29}$$

Обратим внимание, что утверждение (22) в данном случае не связано с условием квазинейтральности. Это означает, что гамильтониан для нерелятивистской КС следует записывать в следующем виде (см. (2)–(4)):

$$\hat{H}=\hat{K}+\hat{U}^{(q)}. \tag{30}$$

Таким образом, мы можем утверждать, что использование канонического распределения и Большого распределения, в котором заряженные частицы разных сортов рассматриваются как формально независимые, должно приводить к эквивалентным результатам. Это, в свою очередь, означает возможность использования методов диаграммной техники для описания равновесной КС.

В частности, результаты (29), (30) имеют принципиальное значение для установления предельных соотношений для корреляционных функций в нерелятивистской КС. На основе методов диаграммной техники можно показать, что известное равенство в статистической квантовой электродинамике [45]

$$\Pi_{00}(0)\equiv\Pi_{00}(\omega=0,q\to 0)=-e^2\frac{\partial}{\partial\mu}\rho(x=0), \tag{31}$$

где $\Pi_{00}(k)$ — так называемый поляризационный оператор, определяющий продольную диэлектрическую проницаемость $\varepsilon^{l}(k)=1-D_{00}^{(0)}(k)\Pi_{00}(k)$; ρ — средняя плотность электронов, характеризующихся химическим потенциалом μ, в x-пространстве, для нерелятивистской КС с гамильтонианом (30) принимает вид

$$\Pi_{00}(\omega=0,q\to 0)=-\sum_{a,b}z_a z_b e^2\left(\frac{\partial n_a}{\partial\mu_b}\right)_T, \tag{32}$$

где $n_a=n_a(T,\{\mu_c\})$ — средняя плотность числа заряженных частиц сорта a, которая является функцией температуры T и набора химических потенциалов $\{\mu_c\}$ для всех сортов заряженных частиц в рассматриваемой системе (см. подробнее [48,49]).

В свою очередь, использование (32) приводит к особенностям критических явлений в нерелятивистской КС. В частности, имеется возможность для существования второй критической точки, которая непосредственно связана с состоянием истинного диэлектрика (см. [50–53] и цитированную тем литературу).

4. Конденсат Бозе–Эйнштейна в кулоновской системе

Рассмотрим теперь равновесную нерелятивистскую КС с КБЭ для ядер. Для определенности будем считать, что ядра (индекс c) имеют нулевой спин. Согласно общему определению, которое было предложено Пенроузом и Онсагером [54], наличие КБЭ связано с аномальным пространственным поведением одночастичной матрицы плотности, которое получило название недиагонального дальнего порядка (НДДП) (off-diagonal long-range order) [55]. Это утверждение для однородной и изотропной КС, в которой одночастичная матрица плотности ядер имеет вид $\gamma_c(\mathbf{r},\mathbf{r}')=\gamma_c(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)$, можно записать как

$$\lim_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\to\infty}\gamma_c(\mathbf{r},\mathbf{r}')=n_c^{BEC}\neq 0,\quad \gamma_c(\mathbf{r},\mathbf{r}')\equiv\left\langle\hat{\Psi}_c^{+}(\mathbf{r})\hat{\Psi}_c(\mathbf{r}')\right\rangle, \tag{33}$$

где n_c^{BEC} — плотность числа ядер в КБЭ, $\hat{\Psi}_c^{+}(\mathbf{r})$ и $\hat{\Psi}_c(\mathbf{r})$ — полевые операторы рождения и уничтожения для ядер, угловые скобки означают усреднение с Большим распределением. В нормальной КС $n_c^{BEC}=0$, т.е. КБЭ отсутствует. При этом необходимо учитывать, что процедура усреднения с распределением Гиббса отвечает состоянию термодинамического равновесия рассматриваемой системы. В статистической теории это состояние соответствует термодинамическому пределу [56]. Это означает, что при вычислении средних величин необходимо первоначально рассматривать систему в очень большом (макроскопическом), но конечном объеме V, а затем осуществить термодинамический предельный переход [56].

Процедура перехода к термодинамическому пределу подразумевает представление полевых операторов $\hat{\Psi}_c^+(\mathbf{r})$ и $\hat{\Psi}_c(\mathbf{r})$ в виде

$$\hat{\Psi}_c^+(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{p}}\hat{c}_{\mathbf{p}}^+\exp(-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}), \quad \hat{\Psi}_c(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{p}}\hat{c}_{\mathbf{p}}\exp(i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}), \tag{34}$$

где $\hat{c}_{\mathbf{p}}^+$ и $\hat{c}_{\mathbf{p}}$ — операторы рождения и уничтожения для ядер с импульсом $\hbar\mathbf{p}$ и нулевым спином. Тогда мы можем представить одночастичную матрицу плотности для ядер в однородной и изотропной КС в виде ряда Фурье

$$\gamma_c(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|) = \frac{f_c^{(V)}(\mathbf{p}=0)}{V} + \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{p}\neq 0} f_c^{(V)}(\mathbf{p})\exp(i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{r}'-\mathbf{r})). \tag{35}$$

Здесь $f_c^{(V)}(\mathbf{p}) = \left\langle \hat{c}_{\mathbf{p}}^+\hat{c}_{\mathbf{p}}\right\rangle^{(V)}$ — среднее число заполнения ядер в состоянии с импульсом $\hbar\mathbf{p}$ (или одночастичная функция распределения по импульсам), индекс (V) означает, что соответствующая функция отвечает системе в очень большом (макроскопическом), но конечном объеме V. При этом, средняя плотность числа ядер в КБЭ равна

$$n_c^{BEC} = f_c^{(V)}(\mathbf{p}=0)/V. \tag{36}$$

Таким образом, переход к термодинамическому пределу связан с представлением величины $f_c^{(V)}(\mathbf{p})$ в виде

$$f_c^{(V)}(\mathbf{p}) = \hat{N}_0\delta_{\mathbf{p},0} + f_c^{(T)}(p)(1-\delta_{\mathbf{p},0}), \tag{37}$$

где $f_c^{(T)}(p)$ — одночастичная функция распределения для ядер в «надконденсатном» состоянии при $\mathbf{p}\neq 0$. Тогда среднее число заполнения ядер с нулевым импульсом $\left\langle \hat{N}_0\right\rangle \equiv \left\langle \hat{c}_0^+\hat{c}_0\right\rangle = n_c^{BEC}\cdot V$ — макроскопическое, что и является определением КБЭ, а средняя плотность числа ядер n_c после перехода к термодинамическому пределу определяется соотношением

$$n_c = n_c^{BEC} + \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3} f_c^{(T)}(p). \tag{38}$$

В результате мы приходим к выводу, что при исследовании равновесной КС с КБЭ необходимо сначала рассматривать исходную систему в очень большом, но конечном объеме V, и только после выделения сингулярных членов, соответствующих макроскопическому числу ядер в КБЭ, переходить к термодинамическому пределу. Нетрудно убедиться, что аналогичное утверждение имеет место и при рассмотрении неоднородной системы с КБЭ [57]. При этом, как следует из соотношений (33)–(38), основная проблема связана с определением одночастичной функции распределения $f_c^{(V)}(\mathbf{p})$. Для решения этой задачи мы можем применить стандартные методы квантовой теории поля для нормальных систем, но с учетом конечности объема V с целью выделения сингулярных членов, обусловленных наличием КБЭ [58–62]. Это означает, что при переходе от координатного представления к импульсному представлению в диаграммной технике теории возмущений необходимо использовать не интегральное преобразование Фурье (см., например, [1]), а преобразование в виде ряда Фурье (см. (35)).

В частности, одночастичная функция распределения $f_c^{(V)}(\mathbf{p})$ однозначно определяется соотношением (см. подробнее [1])

$$f_c^{(V)}(\mathbf{p}) = \lim_{\tau\to+0} T\sum_{\omega_n} g_c^{(V)}(\mathbf{p},\omega_n)\exp(i\omega_n\tau), \quad \omega_n = 2\pi nT, \tag{39}$$

где n — целое число, включая нуль, $g_c^{(V)}(\mathbf{p},\omega_n)$ — одночастичная температурная функция Грина ядер, для вычисления которой и могут быть использованы методы диаграммной техники теории возмущений с учетом сформулированных выше ограничений. Реализация такого подхода, как и в теории нормальных систем [1], связана с необходимостью решения вопроса о выделении классов диаграмм с последующим их суммированием с целью построения тех или иных приближений для средних значений физических величин.

С другой стороны, для функции Грина $g_c^{(V)}(\mathbf{p},\omega_n)$ справедливо интегральное представление (см. подробнее [1])

$$g_c^{(V)}(\mathbf{p},\omega_n) = \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon \frac{s_c^{(V)}(\mathbf{p},\varepsilon)}{\varepsilon - i\omega_n}, \tag{40}$$

где $s_c^{(V)}(\mathbf{p},\omega)$ — спектральная функция, так что [63]

$$f_c^{(V)}(\mathbf{p}) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\frac{s_c^{(V)}(\mathbf{p},\omega)}{\exp(\hbar\omega/T)-1}. \tag{41}$$

Преимущество использования (41) связано с наличием точных соотношений для спектральной функции $s_c^{(V)}(\mathbf{p},\omega)$, называемых правилами сумм [63]. С учетом установленных особенностей (22), (29) для потенциала кулоновского взаимодействия в применении к КС имеем следующие точные выражения:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{2\pi}s_c^{(V)}(\mathbf{p},\omega)=1,\quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\omega s_c^{(V)}(\mathbf{p},\omega)=E_c^{(V)}(\mathbf{p}), \qquad (42)$$

$$E_c^{(V)}(\mathbf{p})=\epsilon_c(p)-\mu_c^{(V)}+\frac{1}{V}\sum_{\mathbf{q}\neq 0}u_{cc}(\mathbf{q})f_c^{(V)}(\mathbf{q}+\mathbf{p}), \qquad (43)$$

где $\mu_c^{(V)}$ — химический потенциал ядер в КС, находящейся в макроскопическом объеме V. Переходя в соотношениях (42), (43) к термодинамическому пределу, получаем с учетом (37)

$$E_c(p=0)=-\mu_c+\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}u_{cc}(q)f_c^{(T)}(q)\,. \qquad (44)$$

$$E_c(p\neq 0)=\epsilon_c(p)-\mu_c+u_{cc}(p)n_c^{BEC}+$$
$$+\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}u_{cc}(q)f_c^{(T)}(|\mathbf{q}+\mathbf{p}|), \qquad (45)$$

где $\mu_c=\lim_{V\to\infty}\mu_c^{(V)}$ — химический потенциал для ядер в термодинамическом пределе.

Таким образом, функция $E_c(p)$ испытывает в точке $p=0$ бесконечный разрыв, величина которого обусловлена наличием КБЭ и расходимостью кулоновского потенциала взаимодействия $u_{cc}(p)$ при $p\to 0$. Учитывая, что спектральная функция характеризует спектр одночастичных возбуждений в системе [64], это обстоятельство указывает на наличие соответствующей «щели» в энергетическом спектре «надконденсатных» возбуждений над энергетическим уровнем ядер, находящихся в КБЭ. При этом бесконечный разрыв в спектре одночастичных возбуждений при нулевом импульсе может быть устранен при учете эффектов экранирования кулоновского взаимодействия, характерных для КС [26]. В этом случае возникающая щель в энергетическом спектре одночастичных возбуждений ядер будет иметь конечное значение, величина которого определяется плотностью КБЭ n_c^{BEC}. Возникающая ситуация аналогична той, которая имеет место в теории сверхпроводимости с точностью до замены электронов на ядра.

Обратим внимание, что, согласно проведенному рассмотрению, возможность существования энергетической щели в спектре одночастичных возбуждений ядер при наличии КБЭ принципиально связана с особенностями представления кулоновского потенциала взаимодействия в виде ряда Фурье (22), (29). При рассмотрении традиционной модели однокомпонентной нейтральной жидкости с короткодействующим потенциалом взаимодействия его фурье-компонента не имеет особенностей в области малых волновых векторов. По этой причине в такой системе отсутствуют основания для существования подобной щели в энергетическом спектре одночастичных возбуждений при нулевом импульсе, что согласуется с традиционным описанием [1–3]. Необходимо также отметить, что наличие щели в одночастичном спектре возбуждений при малых импульсах не противоречит наличию фонон-ротонного спектра коллективных возбуждений в сверхтекучем He II, который определяется особенностями функции отклика «плотность–плотность» (см. подробнее [65]).

Заключение

Учитывая, что нерелятивистская КС является наиболее адекватной моделью для описания реального вещества, в том числе в сверхтекучем состоянии, представленные выше результаты могут иметь существенное значение для рассмотрения явлений, связанных с наличием КБЭ. В частности, открывается возможность исследовать вопрос о переходе от КС к модельному короткодействующему потенциалу взаимодействия бозе-частиц и дать строгое решение вопроса о возможности существования различных полюсных особенностей в одночастичной функции Грина и функции Грина плотность–плотность [66,67] для таких систем. Поскольку в используемом описании не вводятся аномальные средние, теорема Голдстоуна [46,68] к ним неприменима и вопрос о несовпадении полюсов остается актуальным.

Настоящая работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 14-19-01492).

1. А.А. Абрикосов, Л.П. Горьков, И.Е. Дзялошинский, *Методы квантовой теории поля в статистической физике*, ГИФМЛ, Москва (1962) [A.A. Abrikosov, L.P. Gor'kov, and I.E. Dzjaloshinskii, *Quantum Field Theoretical Methods in Statistical Physics,* Pergamon, Oxford (1965)].
2. A. Griffin, *Excitations in a Bose-condensed Liquid*, Cambridge University Press, Cambridge (1993).
3. C.J. Pethick and H. Smith, *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases*, Cambridge University Press, Cambridge (2008), 2-nd ed.
4. А.С. Рыбалко, *ФНТ* **30**, 1321 (2004) [*Low Temp. Phys*. **30**, 994 (2004)].
5. А.С. Рыбалко, С.П. Рубец, *ФНТ* **31**, 820 (2005) [*Low Temp. Phys*. **31**, 623 (2005)].
6. A. Rybalko, S. Rubets, E. Rudavskii, V. Tikhly, S. Tarapov, R. Golovashchenko, and V. Derkach, *Phys. Rev. B* **76**, 140503(R) (2007).
7. А.С. Рыбалко, С.П. Рубец, Э.Я. Рудавский, В.А. Тихий, С.И. Тарапов, Р.В. Головащенко, В.Н. Деркач, *ФНТ* **34**, 631 (2008) [*Low Temp. Phys*. **34**, 497 (2008)].
8. А.М. Косевич, *ФНТ* **31**, 50 (2005) [*Low Temp. Phys*. **31**, 37 (2005)].
9. В.Д. Нацик, *ФНТ* **31**, 1201 (2005) [*Low Temp. Phys*. **31**, 915 (2005)].
10. Э.А. Пашицкий, С.М. Рябченко, *ФНТ* **33**, 12 (2007) [*Low Temp. Phys*. **33**, 8 (2007)].
11. L.A. Melnikovsky, *J. Low Temp. Phys*. **148**, 559 (2007).

12. В.М. Локтев, М.Д. Томченко, *ФНТ* **34**, 337 (2008) [*Low Temp. Phys*. **34**, 262 (2008)].
13. В.Д. Нацик, *ФНТ* **34**, 625 (2008) [*Low Temp. Phys*. **34**, 493 (2008)].
14. С.И. Шевченко, А.С. Рукин, *Письма в ЖЭТФ* **90**, 46 (2009) [*JETP Lett*. **90**, 42 (2009)].
15. С.И. Шевченко, А.С. Рукин, *ФНТ* **36**, 748 (2010) [*Low Temp. Phys*. **36**, 596 (2010)].
16. Э.А. Пашицкий, А.А. Гурин, *ЖЭТФ* **138**, 1103 (2010) [*JETP* **111**, 975 (2010)].
17. M.D. Tomchenko, *J. Low Temp. Phys*. **158**, 854 (2010).
18. M.D. Tomchenko, *Phys. Rev. B* **83**, 094512 (2011).
19. Э.А. Пашицкий, А.А. Гурин, *ЖЭТФ* **142**, 305 (2012) [*JETP* **115**, 273 (2012)].
20. В.Б. Бобров, С.А. Тригер, *Краткие сообщения по физике ФИАН* **12**, 58 (2014) [*Bull. Lebedev Physics Institute* **42**, 13 (2015)].
21. V.B. Bobrov and S.A. Trigger, *Phys. Lett. A* **374**, 4188 (2010).
22. В.Б. Бобров, *ТМФ* **178**, 433 (2014) [*Theor. Math. Phys*. **178**, 374 (2014)].
23. N.W. Ashcroft and D. Stroud, *Solid State Phys*. **33**, 1 (1978).
24. E.A. Pashitskii, S.V. Mashkevich, and S.I. Vilchynskyy, *Phys. Rev. Lett*. **89**, 075301 (2002).
25. V.B. Bobrov, S.A. Trigger, G.J.F. van Heijst, and I.M. Sokolov, *Europhys. Lett.* **101**, 35002 (2013).
26. W. Ebeling, W.-D. Kraeft, D. Kremp, and G. Ropke, *Quantum Statistics of Charged Particle Systems*, Springer, Berlin (2013).
27. E.H. Lieb and J.P. Solovej, *Comm. Math. Phys*. **252**, 485 (2004).
28. E.H. Lieb and R. Seiringer, *The Stability of Matter in Quantum Mechanics,* Cambridge University Press, New York (2010).
29. А.Н. Старостин, В.К. Рерих, *ЖЭТФ* **127**, 186 (2005), [*JETP* **100**, 165 (2005)].
30. R. Redmer and G. Ropke, *Contr. Plasma Phys*. **50**, 970 (2010).
31. A. Alastuey and V. Ballenegger, *Phys. Rev. E* **86**, 066402 (2012).
32. V.B. Bobrov and S.A. Trigger, *Phys. Plasmas* **21**, 100703 (2014).
33. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Статистическая физика, ч. 1*. Наука, Москва (1976) [*Statistical Physics*, 3rd ed. Butterworth-Heinemann, Oxford (1980)].
34. J.L. Lebowitz and E.H. Lieb, *Phys. Rev. Lett*. **22**, 631 (1969).
35. V.B. Bobrov, I.M. Sokolov, and S.A. Trigger, *Phys. Plasmas* **19**, 062101 (2012).
36. А.А. Веденов, А.И. Ларкин, *ЖЭТФ* **36**, 1133 (1959) [*Sov. Phys. JETP* **9**, 806 (1959)].
37. D. Kremp, M. Schlanges, and W.-D. Kraeft, *Quantum Statistics of Nonideal Plasma,* Springer, Berlin-Heidelberg (2005).
38. L.L. Foldy, *Phys. Rev*. **124**, 649 (1961).
39. Е.Г. Бровман, Ю.М. Каган, *УФН* **112,** 369 (1974) [*Sov. Phys. Usp*. **17,** 125 (1974)].
40. Р. Балеску, *Равновесная и неравновесная статистическая механика,* Мир, Москва (1978) [*Equilibrium and None-quilibrium Statistical Mechanics*, Wiley, New York (1975)].
41. F.J. Dyson and A. Lenard, *J. Math. Phys*. **8**, 423 (1967).
42. A. Lenard and F.J. Dyson, *J. Math. Phys*. **9**, 698 (1968).
43. L.-C. Tu and J. Luo, *Metrologia* **41**, S136 (2004).
44. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Теория поля*, Наука, Москва (1973) [*The Classical Theory of Fields*, 4th ed., Butter-worth-Heinemann, Oxford (1975)].
45. Е.С. Фрадкин, *Труды ФИАН* **29**, 7 (1965) [*Quantum Field Theory and Hydrodynamics*, *Proc. P.N., Lebedev Physical Institute*, vol. **29**, Consultant Bureau, New York (1967)].
46. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. *Введение в теорию квантованных полей.* Наука, Москва (1984) [*Introduction to the Theory of Quantized Fields,* Wiley, New York (1980)].
47. А.Ф. Александров, Л.С. Богданкевич, А.А. Рухадзе, *Основы электродинамики плазмы,* Высшая школа, Москва (1978) [*Principles of Plasma Electrodynamics,* Springer, Heidelberg (1984)].
48. В.Б. Бобров, Н.И. Ключников, С.А. Тригер, *ТМФ* **89**, 263 (1991) [*Theor. Math. Phys*. **89**, 1198 (1991)].
49. V.B. Bobrov, N.I. Klyuchnikov, and S.A. Trigger, *Physica* A **181**, 150 (1992).
50. V.B. Bobrov and S.A. Trigger, *J. Phys. A* **43**, 365002 (2010).
51. V.B. Bobrov, *Phys. Rev. E* **86**, 026401 (2012).
52. V.B. Bobrov, S.A. Trigger, and A.G. Zagorodny, *Europhys. Lett.* **101**, 16002 (2013).
53. В.Б. Бобров, С.А. Тригер, *ТМФ* **183**, 120 (2015) [*Theor. Math. Phys*. **183**, 553 (2015)].
54. O. Penrose and L. Onsager, *Phys. Rev*. **104**, 576 (1956).
55. C. N. Yang, *Rev. Mod. Phys*. **34**, 694 (1962).
56. Н.Н. Боголюбов, Н.Н. Боголюбов (мл.), *Введение в квантовую статистическую механику,* Наука, Москва (1984) [*Introduction to Quantum Statistical Mechanics,* Gordon and Breach, London (1992)].
57. В.Б. Бобров, А.Г. Загородний, С.А. Тригер, *Доклады АН* **461**, 400 (2015) [*Doklady Physics* **60**, 147 (2015)].
58. В.Б. Бобров, Ю.П. Власов, С.А. Тригер, *ЖЭТФ* **102**, 107 (1992) [*JETP* **75**, 56 (1992)].
59. В.Б. Бобров, С.А. Тригер, П. Шрам, *ЖЭТФ* **107**, 1526 (1995) [*JETP* **80**, 853 (1995)].
60. C.-H. Zhang and H.A. Fertig, *Phys. Rev. A* **74**, 023613 (2006).
61. P. Navez, *Europhys. Lett.* **88**, 60008 (2009).
62. V.B. Bobrov, S.A. Trigger, and I.M. Yurin, *Phys. Lett. A* **374**, 1938 (2010).
63. О.К. Калашников, Е.С. Фрадкин, *ТМФ* **5**, 417 (1970) [*Theor. Math. Phys*. **5**, 1250 (1970)].
64. Л. Каданов, Г. Бейм, *Квантовая статистическая механика,* Мир, Москва (1964) [*Quantum statistical mechanics*. Benjamin, New York (1962)].
65. В.Б. Бобров, А.Г. Загородний, С.А. Тригер, *ФНТ* **41**, 760 (2015) [*Low Temp. Phys.* **41**, 589 (2015)].
66. S.A. Trigger and P.P.J.M. Schram, *Physica B* **228**, 107 (1996).
67. T. Kita, *Phys. Rev. B* **81**, 214513 (2010).
68. Y. Nambu, *Spontaneous Symmetry Breaking in Particle Physics, Nobel Lecture*, перевод: *УФН* **179**, 1323 (2009).

Coulomb interaction potential and Bose–Einstein condensate

V.B. Bobrov, A.G. Zagorodny, and S.A. Trigger

Using the results of statistical quantum electrodynamics it is shown that the Coulomb interaction potential for charged particles has no the Fourier component for the wave vector equals zero. This result provides applicability of the grand canonical ensemble to description of the Coulomb system with independent values of the numbers of various types of charged particles. On this basis, the single-particle excitations in the system with Bose–Einstein condensate are analyzed. The possibility of an energy gap existence in the spectrum of these excitations is established for small wave vector values. The obtained result is not in contradiction with existence of the collective phonon–roton excitations spectrum in the density–density correlation function.

PACS: **67.40.–w** Boson degeneracy and superfluidity of ^{4}He;
67.10.Fj Quantum statistical theory;
52.27.Gr Strongly-coupled plasmas;
67.85.De Dynamic properties of condensates; excitations, and superfluid flow.

Keywords: superfluid He II, Coulomb interaction potential, Coulomb system; Bose–Einstein condensate.