



УДК 314.1 : 004.942

А. Д. Подольцев, д-р техн. наук, **И. Н. Кучерявая**, канд. техн. наук
Ин-т электродинамики НАН Украины
(Украина, 03680, Киев-57, пр-т. Победы, 56,
тел.: (044) 454 25 68, E-mail: podol@ied.org.ua)

Компьютерное моделирование демографических процессов в Украине с учетом пространственного распределения народонаселения

(Статью представил канд. техн. наук В.В. Аристов)

Для прогнозирования демографической ситуации в Украине разработана математическая модель с учетом пространственного распределения народонаселения на территории Украины и динамики его изменения во времени. В основу модели положено уравнение баланса вещества, используемое для моделирования физических процессов диффузии, конвекции и реакции, которое является двумерным дифференциальным уравнением в частных производных. Для компьютерной реализации предложенной модели использован численный метод конечных элементов, реализованный в программе Comsol 3.3. По результатам моделирования построена динамика демографических показателей для Украины в целом и для ее областей на период до 2020 г.

Для прогнозування демографічної ситуації в Україні розроблено математичну модель з урахуванням просторового розподілу народонаселення на території України та динаміки його змінення у часі. В основу моделі покладено рівняння балансу речовини, яке використовується для моделювання фізичних процесів дифузії, конвекції та реакції і являє собою двовимірне диференціальне рівняння у частинних похідних. Для комп'ютерної реалізації запропонованої моделі використано чисельний метод кінцевих елементів, реалізований у програмі Comsol 3.3. За результатами моделювання побудовано динаміку демографічних показників для України в цілому і для її областей на період до 2020 р.

К л ю ч е в ы е с л о в а: математическая демография, демографические показатели, пространственное распределение населения, компьютерное моделирование, прогнозирование.

На современном этапе в условиях широкой компьютеризации и доступности коммерческих расчетных пакетов и программных средств получил развитие один из разделов демографии — математическая демография [1, 2]. Математическая демография изучает численность, территориальное размещение и состав населения, закономерности изменений этих показателей во времени и пространстве на основе математических методов с применением математических моделей, реализуемых на компьютере.

В современной математической демографии используются положения математического анализа, теории вероятностей, математической статистики, а также математическое моделирование, компьютерные вычисления и возможности автоматизированной обработки расчетных данных [1, 3, 4]. Демографические характеристики, полученные на основе сбора данных или статистических исследований, а также прогнозируемые характеристики представляются в количественной форме. С помощью компьютерных средств визуализации отображаются их качественные изменения в географическом пространстве и во времени.

Основы системного анализа в области мировой демографии и математических моделей глобального развития изложены в работе [5], где представлена сложная структура мировой модели и взаимозависимости в коэффициентной форме между различными демографическими показателями и факторами, влияющими на них. В числе таких факторов — материальный уровень жизни, наличие и темпы использования природных ресурсов, загрязнение окружающей среды, качество жизни в целом, уровень экономического развития, продуктивность сельского хозяйства.

Математическая теория роста численности населения Земли обоснована и развита в работах [6—8], где представлена модель, описывающая характер изменения во времени общей численности человечества. В результате исследования продолжительного периода времени (с 1750 г. до 2010 г.) показано, что во второй половине 20-го века произошло замедление роста численности народонаселения мира и с тех пор проявляется тенденция к ее стабилизации. Утверждается, что основные демографические показатели, такие как уровень урбанизации, плотность населения, его географическое распределение, уровень культуры и образования, определяются главной величиной — общей численностью населения планеты. На основе математических расчетов и их анализа С.П.Капица сформулировал принцип о том, что, исходя из демографических данных, можно сделать шаг к количественному описанию развития человечества. Кроме того, он выдвинул демографический императив о том, что именно демография и рост народонаселения в мире обуславливают характер социально-экономических и геополитических процессов, происходящих в глобальной демографической системе.

Макромодель С. П. Капицы получила дальнейшее развитие в трудах С. П. Курдюмова и его учеников [9, 10]. Ими предложена математическая модель глобальных эволюционных демографических процессов с учетом пространственного распределения народонаселения и процессов миграции. На основе развитого математического аппарата может быть также смоделирована глобальная демографическая динамика с использованием диффе-

ренциального уравнения в частных производных. Предложенная в [10] теория режимов с обострением позволяет исследовать процессы в демографической системе, характеристики которой неограниченно возрастают.

В [4, 11] представлены основные теоретические модели рождаемости и смертности — модели естественного движения населения. На основании усредненных коэффициентов рождаемости и смертности в [11] сделан долгосрочный (на столетие) прогноз роста населения мира.

В работе [12] выполнено математическое моделирование изменения во времени (по годам) численности населения и его возрастных групп. Как и в большинстве работ, в [12] применен подход, основанный на том, что будущий рост показателей населения предопределен предыдущим. Моделирование проведено на основе дифференциального уравнения в частных производных. Начальным условием для долгосрочного прогноза до 2020 г. стали реальные показатели, характеризующие демографическую ситуацию в России в 1998 г.

Важнейшей задачей, решаемой средствами математической демографии, является составление прогноза динамики численности населения определенного региона на основе точных данных об имеющейся численности населения и закономерностях ее изменения в течение ближайшего прошедшего периода времени. Основы региональной математической демографии и соответствующие математические модели, в том числе дискретные вероятностные модели, представлены в работе [2].

Объектом данного исследования является население Украины в целом и отдельных ее областей. Выполним численное моделирование и прогноз эволюции демографической ситуации в Украине до 2020 г., опираясь на статистические данные 2008—2009 гг. [13, 14]. Для решения задачи будем использовать дифференциальное уравнение в частных производных, описывающее физический процесс диффузии, конвекции и реакции для сложного геометрического объекта, моделирующего реальную конфигурацию каждой области страны (рис. 1, см. вклейку). Решение дифференциального уравнения в частных производных проведем методом конечных элементов в коммерческой программе Comsol 3.3 [15]. В интегрированной среде программы Comsol выполним также визуализацию, графическую и цифровую обработку результатов компьютерных расчетов. Особенностью данной работы, в отличие от опубликованных ранее, является выполнение конечно-элементного анализа пространственных демографических процессов в Украине.

Пространственная модель демографических процессов в Украине. В качестве расчетной области рассмотрим двумерный геометрический объект, границы которого совпадают в определенном масштабе с границами

Украины, спроектированными с географической карты (см. рис. 1). Все процессы выполнены в декартовой системе координат xOy с пространственным масштабом 1 км и временным масштабом 1 год. При разработке математической модели, описывающей демографические пространственные процессы, использованы следующие основные характеристики и параметры:

$n(x, y, t)$, чел/км², — поверхностная плотность населения в точке с координатами (x, y) в момент времени t ;

$N(t) = \int_S n(x, y, t) dS$, чел, — общая численность населения на выбран-

ной территории S в момент времени t ; при $S = S_{\text{Ук}}$ общая численность населения Украины — $N_{\text{Ук}}$.

$k_b(x, y, t)$, 1/г, — коэффициент рождаемости, равный относительной величине прироста вследствие рождаемости населения в точке (x, y) в момент времени t ;

$k_d(x, y, t)$, 1/г, — коэффициент смертности, равный относительной величине убыли из-за смертности населения в точке (x, y) в момент времени t ;

\mathbf{J} , чел/(км · с), — поток населения — векторная величина, характеризующая число людей, пересекающих за один год единицу поверхности в направлении ее внешней нормали.

Динамику численности населения моделируем на основе дифференциального уравнения в частных производных, характеризующего баланс населения:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{J} + k_b n - k_d n + s, \quad \mathbf{J} = -D \nabla n + n \mathbf{u}, \quad (1)$$

где \mathbf{J} — величина потока населения, определяемая с учетом процессов диффузии и конвекции; D — коэффициент диффузии, определяющий скорость перемещения населения из области с большей плотностью в область с меньшей плотностью населения; \mathbf{u} — скорость конвективного переноса населения (моделирует процессы перемещения потоков населения по территории Украины в направлении, совпадающем с направлением \mathbf{u}).

Источник s в правой части уравнения (1) характеризует процессы увеличения или уменьшения плотности населения в данной точке и отражает как процессы внутренней миграции $s_{\text{вн}}$ (перемещение населения между областями), так и внешнюю миграцию $s_{\text{внеш}}$ (перемещение за пределы Украины), $s = s_{\text{вн}} + s_{\text{внеш}}$. При этом, исходя из условия баланса, для процессов внутренней миграции должно выполняться равенство

$$\int_{S_{\text{Ук}}} s_{\text{вн}} dS = 0.$$

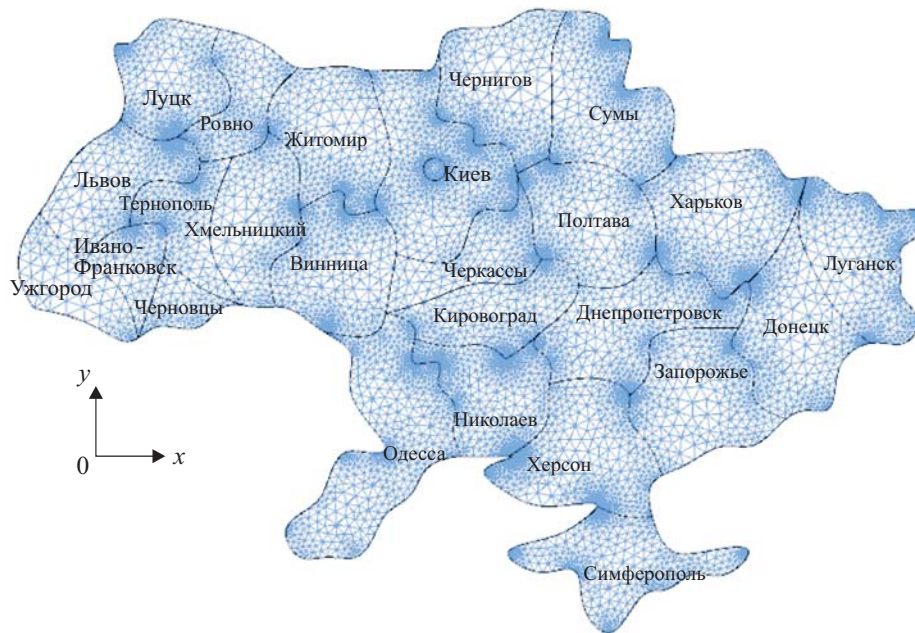


Рис. 1. Цифровая модель, построенная на основе карты Украины, с нанесенной расчетной треугольной сеткой



Рис. 2. Распределение плотности населения на территории Украины по состоянию на 2009 г.; в г. Киеве плотность представлена в масштабе 1:15

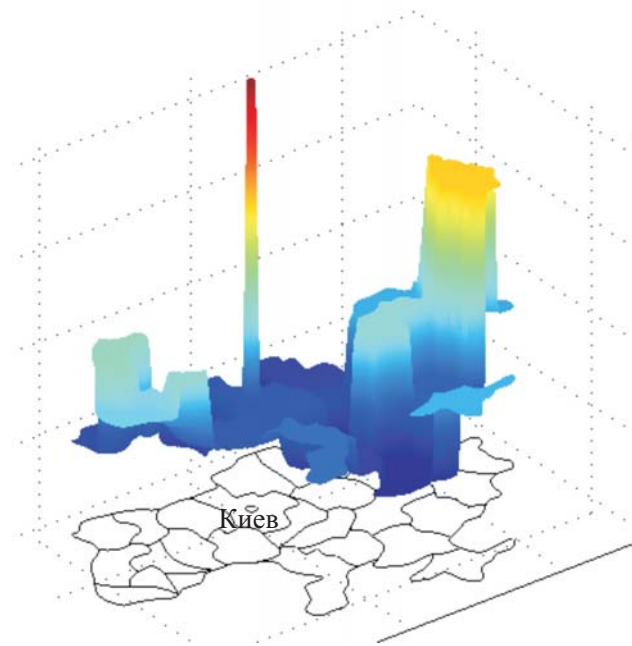


Рис. 3. Распределение плотности населения, представленное в объемном виде

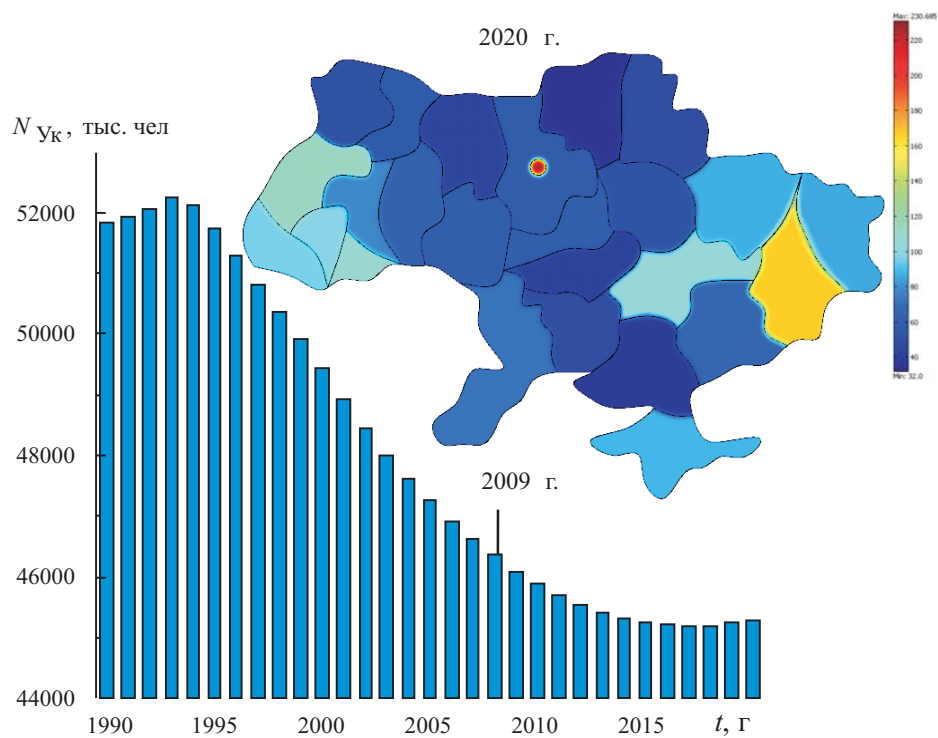


Рис. 5. Изменение численности населения Украины $N_{Ук}$ до 2020 г.; на вставке показано прогнозируемое распределение плотности населения Украины по областям в 2020 г.; масштаб данных на вставке такой же, как на рис. 2, а

Уравнение (1) дополним начальным условием

$$n(x, y, t)|_{t_0} = n_0(x, y), \quad (2)$$

для определения которого использованы статистические данные из официальных источников [13, 14] по состоянию на первый квартал 2009 г., в частности численность населения каждой области и ее площадь. Рассчитанное по этим данным начальное распределение плотности населения n_0 показано на рис. 2 (см. вклейку).

В качестве граничного условия на внешней границе расчетной области (границе Украины) принято равенство нулю нормальной составляющей потока населения:

$$J_n = 0, \quad (3)$$

т.е. миграционные процессы не учтены.

Следует заметить, что в дифференциальном уравнении (1) учтены процессы конвекции, диффузии и реакции в материальной среде. Применительно к демографическим процессам конвекция моделирует перемещение населения из одного региона в другой, т.е. перемещение в заданном направлении с заданной скоростью, например отселение людей из зоны Чернобыля. Диффузия определяет скорость перемещения населения из зоны с большей плотностью населения в зону с меньшей плотностью, например переселение определенной категории населения из Киева в область. Отрицательное значение коэффициента диффузии означает переселение в обратном направлении, что наблюдается в больших городах.

Результаты моделирования. Для построения цифровой геометрической модели территории Украины использована географическая карта Украины с территориальным делением. После сканирования и обработки ее изображения с помощью пакета AutoCAD создана цифровая модель территории Украины и ее областей, с нанесенной треугольной конечно-элементной сеткой (см. рис. 1). Построенная таким образом цифровая модель являлась расчетной областью, в которой с помощью пакета Comsol выполнялось численное решение дифференциального уравнения (1) с начальными и граничными условиями (2) и (3).

На рис. 2 и 3 (см. вклейку) приведены два различных способа отображения одной и той же информации: с использованием цветовой гаммы на плоскости и в виде объемного отображения. Как видим, наибольшая плотность населения в городе Киеве и Донецкой области, наименьшая — в Черниговской области.

Миграционные процессы в Киеве и области очень сложны и имеют ряд специфических особенностей, которые не учитывались. Процессы естественного движения населения (рождаемость и смертность) в столице

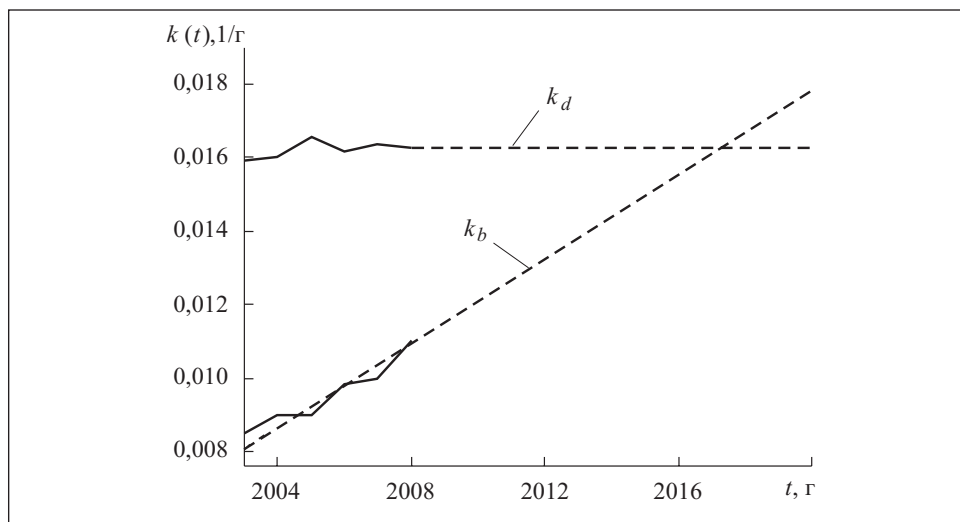


Рис. 4. Экстраполяционные зависимости от времени коэффициентов рождаемости $k_b(t)$ и смертности $k_d(t)$: — статистические данные [13, 14]; - - - результат линейной экстраполяции

приравнены ко всем регионам страны. В общем случае демографические процессы в Киеве требуют отдельного рассмотрения с учетом имеющихся особенностей. Возможно рассмотрение задачи на микроуровне (отдельно для столицы) с поэтапным переходом на макроуровень — к модели для всей страны, где были бы использованы данные, полученные на микроуровне. Однако такая цель не ставилась.

Для моделирования демографических процессов в Украине на ближайшую перспективу в дифференциальное уравнение (1) введены временные зависимости коэффициентов рождаемости $k_b(t)$ и смертности $k_d(t)$ в рассматриваемом промежутке времени. Были использованы опубликованные значения этих коэффициентов в период с 2003 по 2008 г. (рис. 4). До 2020 г. они определены путем линейной экстраполяции значений $k_b(t)$ и $k_d(t)$ за истекший период. Построенные экстраполяционные зависимости использованы при моделировании демографических показателей Украины в предположении, что во всех областях страны коэффициенты $k_b(t)$ и $k_d(t)$ имеют одинаковые значения в определенный момент времени t . В расчетах использованы следующие значения основных величин, входящих в уравнение (1): $D = 10^{-6} \text{ км}^2/\text{с}$, $s=0$, $\mathbf{u} = 0$.

Полученный прогноз до 2020 г. изменения плотности и численности населения в Украине, отдельных ее областях и г. Киеве представлен на рис. 5 (см. вклейку) и рис. 6. Как видно из этих рисунков, при принятом законе изменения во времени коэффициентов рождаемости и смертности

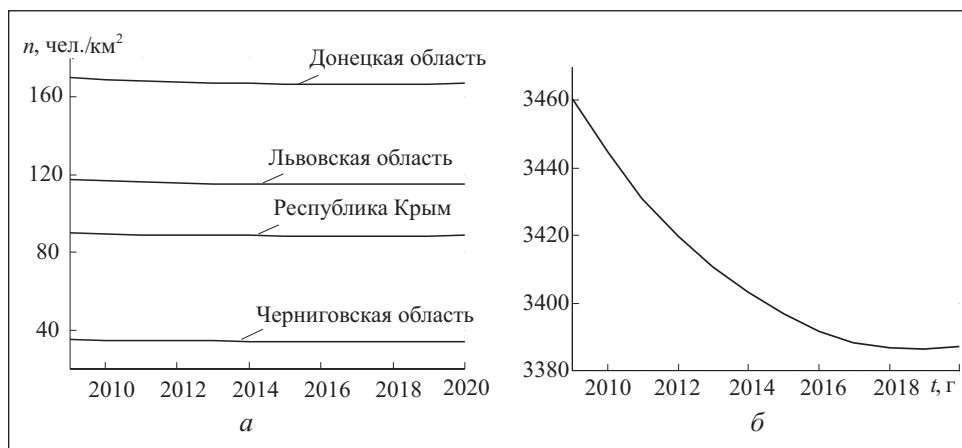


Рис. 6. Графики прогнозируемого изменения плотности населения в некоторых областях Украины (а) и в г. Киеве (б) до 2020 г., построенные по результатам моделирования

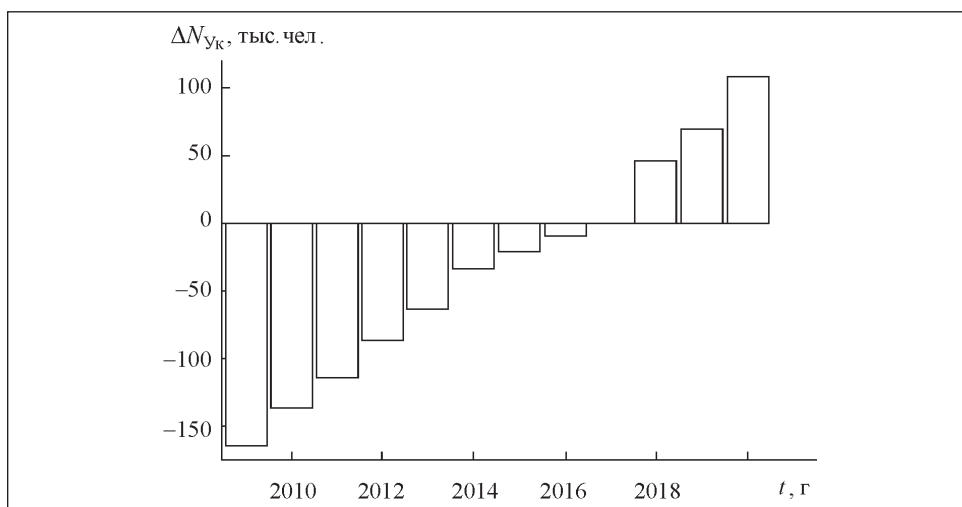


Рис. 7. Прогнозируемое изменение прироста населения Украины $\Delta N_{ук}$ в период с 2009 по 2020 годы

(см. рис. 4) до 2017 г. численность населения Украины будет медленно уменьшаться. Для сравнения на рис. 5 приведены данные более раннего периода, начиная с 1990 г.

В 2017 г. показатели рождаемости и смертности станут равными по величине, а в последующие годы вследствие превышения рождаемости над смертностью численность населения Украины начнет увеличиваться. Это

подтверждается данными, приведенными на рис. 7, где показано изменение прироста населения Украины по годам, вычисляемое по формуле

$$\Delta N_{\text{ук}} = (k_b - k_d) \int_{t-0,5S_{\text{ук}}}^{t+0,5} \int ndSdt.$$

При расчете значения $\Delta N_{\text{ук}}$ использованы временные зависимости коэффициентов рождаемости и смертности, приведенные на рис. 4.

На рис. 7 отрицательные значения прироста населения в 2009—2016 гг. характеризуют процесс сокращения общей численности, а положительные значения — увеличение численности населения Украины.

Выводы. Разработанная математическая модель и программные средства после уточнения и дополнения необходимыми базами данных и дополнительной системой дифференциальных уравнений могут быть использованы для моделирования протекания в ближайшей и отдаленной перспективе взаимосвязанных демографических, социальных, экономических процессов, а также процессов потребления энергоресурсов на территории Украины с учетом существующих региональных особенностей. Моделирование таких процессов дает возможность получить динамику удельных показателей на душу населения на ближайшую перспективу, однако рассмотрение и решение подобных задач выходит за рамки данной работы.

This work proposes the mathematical model for prognostication of demographic situation in Ukraine and its separate regions. The model takes into account the spatial distribution of population within the territory of Ukraine and population change dynamics in time. The model is based on matter-balance equation used for modeling of diffusion-convection-reaction processes. The equation is a two-dimensional partial differential equation solved by finite-element method in code package Comsol 3.3. The dynamics of demographic indices for Ukraine up to 2020 is plotted according to results of computer modeling.

1. *Староверов О. В.* Азы математической демографии. — М. : Наука, 1997. — 158 с.
2. *Rogers A.* Introduction for Multiregional Mathematical Demography. — NY : John Wiley, 1975. — 220 p.
3. *Колемаев В. А., Староверов О. В., Турундаевский В. Б.* Теория вероятностей и математическая статистика. — М. : Высшая школа, 1991. — 400 с.
4. *Коротаев А. В., Малков А. С., Халтурина Д. А.* Законы истории: математическое моделирование развития мир-системы. Демография, экономика, культура. — М. : Ком-Книга, 2007. — 224 с.
5. *Форрестер Дж.* Мировая динамика. — М. : Наука, 1978. — 168 с.
6. *Капица С. П.* Математическая модель роста населения мира//Математическое моделирование. — 1992. — 4, № 6. — С. 65—79.
7. *Капица С. П.* Сколько людей жило, живет и будет жить на земле. Очерк теории роста человечества. — Москва, 1999. — 134 с. — <http://rogov.zwz.ru/Macroevolution/kapica.pdf>

8. Капица С.П. Феноменологическая теория роста населения Земли//Успехи физ. наук. — 1996. — **166**, № 1. — С. 63—80.
9. Белавин В. А., Капица С. П., Курдюмов С. П. Математическая модель глобальных демографических процессов с учетом пространственного распределения//ЖВМ и МФ. — 1998. — **38**, № 6. — С. 885—902.
10. Белавин В. А., Курдюмов С. П. Режимы с обострением в демографической системе. Сценарий усиления нелинейности//Там же. — 2000. — **40**, № 2. — С. 238—251.
11. Гольдин В. Я., Пестрякова Г. А. Нестационарная математическая модель роста населения земли//Математическое моделирование. — 1998. — **10**, № 3. — С. 39—47.
12. Орлов Ю. Н., Суслин В. М. Кинетические уравнения для некоторых моделей демографии. //Математическое моделирование. — 2003. — **15**, № 3. — С. 43—54.
13. <http://www.ukrcensus.gov.ua>
14. <http://www.ukrstat.gov.ua>
15. Comsol Multiphysics Modeling and Simulation. Version 3.3. — <http://www.comsol.com>

Поступила 31.08.09;
после доработки 21.10.09

ПОДОЛЬЦЕВ Александр Дмитриевич, д-р техн.наук, вед. науч. сотр. Ин-та электродинамики НАН Украины. В 1974 г. окончил Киевский политехнический ин-т. Область научных исследований — методы математического моделирования для научных приложений, в том числе для электротехнических, технологических, биофизических исследований.

КУЧЕРЯВАЯ Ирина Николаевна, канд. техн. наук, ст. науч. сотр. Ин-та электродинамики НАН Украины. В 1982 г. окончила Киевский государственный университет им. Т.Г. Шевченко. Область научных исследований — применение математического моделирования и компьютерных средств для решения электромагнитных, тепловых, биофизических задач.

