УДК 519.2:521.19

О. А. Дышин, канд. физ.-мат. наук,
И. А. Азизов, аспирант
Государственный научно-исследовательский
проектный ин-т «Нефтегазпроект»
(Азербайджан, AZ 1012, Баку, пр. Зардаби, 88,
тел. +99 412 31-90-05, +99 412 497-54-58; E-mail: azizov.ilham@siemens.com)

Полумарковские модели управления рисками в магистральных газонефтетрубопроводных системах

(Статью представил д-р техн. наук С. Е. Саух)

Задача управления технико-технологическими рисками в магистральных газонефтепроводах при условии ограниченности средств, выделенных на предотвращение и ликвидацию возможных аварий, рассматривается в виде полумарковской модели принятия решений для управляемого марковского процесса в непрерывном времени с критерием максимума среднего дохода с дисконтированием. Для нахождения оптимальной нерандомизированной марковской стационарной стратегии предложена процедура, основанная на применении псевдобулевых методов бивалентного программирования.

Задачу керування техніко-технологічними ризиками в магістральних газонафтопроводах за умови обмеженості коштів, що виділено на запобігання та ліквідацію можливих аварій, розглянуто у вигляді напівмарковської моделі прийняття рішень для керованого марковського процесу у неперервному часі з критерієм максимуму середнього доходу з дисконтуванням. Для визначення оптимальної нерандомізованої марковської стаціонарної стратегії запропоновано процедуру, основану на застосуванні псевдобулевих методів бівалентного програмування.

К л ю ч е в ы е с л о в а: полумарковский процесс принятия решений с переоценкой, марковская стационарная стратегия, регулярный полумарковский процесс, псевдобулевы методы бивалентного программирования.

Существует несколько основных групп событий, которые оказывают непосредственное влияние на уровень риска эксплуатации магистральной газонефтетрубопроводной системы (МГНТС) [1]: I — политическая, II — экономическая, III — технико-технологическая, IV — экологическая. Наибольший удельный вес имеет III группа событий, в которой возникает наибольшее число отказов, потенциально зависящих от множества факторов, в том числе человеческого.

Под допустимым решением в состоянии угрозы появления аварии определенного типа или в состоянии наступившей аварии данного типа (будем различать эти два состояния), подразумевается реализация некоторого комплекса мероприятий, обеспечивающего нормальное функционирование МГНТС (т.е. переход системы безопасности в режим ожидания), при этом число таких комплексов конечно для каждого состояния. В состоянии ожидания система безопасности принимает единственное решение: не принимать никаких мер безопасности (за исключением профилактических) и поддерживать режим нормального функционирования МГНТС.

Общая математическая теория управляемых случайных процессов с дискретным и непрерывным временем, включая скачкообразные марковские управляемые процессы, время скачков которых имеет вероятностную меру с ограниченной плотностью распределения, изложена в [2]. Систематическое изложение теории управляемых марковских процессов с дискретным временем (по другой терминологии — многошаговых марковских процессов решения) приведено в [3]. Единообразная и математически строгая теория широкого класса задач динамического программирования и стохастического оптимального управления в дискретном времени содержится в [4]. Математическое описание марковских управляемых процессов без учета времени пребывания в отдельных состояниях и алгоритмов динамического программирования для нахождения оптимальных управлений этими процессами приведено в [5].

Марковские и полумарковские модели принятия решений для случайных процессов с доходами (или издержками) в непрерывном времени изучены в [6], где даны некоторые важные обобщения исходных постановок и разработаны алгоритмы решения задач оптимального управления (без ограничений на управляющие параметры) для процессов с экспоненциальными и не экспоненциальными функциями распределения времен пребывания в отдельных состояниях соответственно для марковских и полумарковских моделей.

Рассматриваемую задачу управления рисками в МГНТС при ограниченных объемах средств, выделенных на мероприятия по предупреждению или ликвидации последствий аварий, сформулируем в виде полумарковской модели принятия решений для управляемого марковского процесса в непрерывном времени и дисконтированными (с коэффициентом $0 < \alpha < 1$) доходами (в нормальном режиме функционирования) или издержками (в аварийных ситуациях). При этом аварии отождествляем с последовательно соединенными независимыми элементами, восстанавливаемыми за конечное время [7]. Оптимальную нерандомизированную стационарную стратегию определяем с помощью псевдобулевых методов бивалентного программирования, отыскивая все решения системы ограничений. Эти решения определяются на основе алгоритма пересечения решений отдельных неравенств-ограничений, предложенного в [8] для нахождения базисных решений системы линейных неравенств с булевыми переменными и использованного в [9] для решения линейной задачи выбора оптимального ряда изделий для выполнения работ при ограниченных объемах средств.

Постановка задачи. Пусть каждому состоянию $i \in S$, $S = \{0, 1, 2, ..., N\}$, рассматриваемой МГНТС поставлено в соответствие конечное множество K_i решений, элементы которого обозначим $k = 1, 2, ..., k_i$. Если система находится в состоянии $i \in S$ и принимается решение $k \in K_i$, то ее дальнейшее поведение определяется вероятностным законом

$$Q_{ij}^{(k)}(t) = p_{ij}^{(k)} F_{ij}^{(k)}(t), \; j \in S, \tag{1}$$

где $p_{ij}^{(k)}$ — вероятность перехода системы в состояние i; $F_{ij}^{(k)}(t)$ — функция распределения времени пребывания системы в состоянии i при принятии решения k и при условии, что следующий переход произойдет в состояние j.

Будем полагать выполненными следующие условия:

1. Состояние $i = 0$ соответствует нормальному функционированию МГНТС, а $i \neq 0$ — аварийным (или предаварийным) ситуациям.

2. Функции $F_{0j}^{(k)}(t)$ и $F_{j0}^{(k)}(t)$, $j \in \widetilde{S} = S \setminus \{0\}$, $k \in K_j$, вместе со своими первыми производными непрерывны при $t > 0$, за исключением, быть может, конечного числа точек, и возрастают на бесконечности не быстрее экспоненциальной функции.

3. За единицу времени пребывания в состоянии i в случае принятия решения k выплачивается средний доход $r_i^{(k)}$ (при $i \neq 0$ число $r_i^{(k)}$ отрицательно и равно издержкам системы за единицу времени пребывания в состоянии i при условии выхода из этого состояния с использованием решения k).

4. Величины $\left| r_i^{(k)} \right|$ ограничены при всех $i \in S$, $k \in K_i$ и вероятности $p_i^{(k)}$ удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{j \in S} p_{ij}^{(k)} = 1, \quad i \in S, \quad k \in K_i, \quad p_{ij}^{(k)} \geq 0, \; i, j \in S, \quad k \in K_i.$$

Таким образом, в каждом состоянии $i \in S$ имеется k_i решений из конечного множества K_i. Выбор некоторого решения k из K_i в состоянии $i \in S$ означает задание величин $Q_{ij}^{(k)}(t)$, $p_{ij}^{(k)}$, $F_{ij}^{(k)}(t)$, $r_i^{(k)}$, $j \in S$.

При $i = 0$ $K_0 = \{0\}$; $p_{0j}^{(0)} \neq 0 \, (j \in S)$ — вероятность перехода в состояние j. Вероятности $p_{0j}^{(0)}$ $(j \in S)$ вычисляются на практике как доля аварий типа j в общей совокупности аварий различных типов в МГНТС на основе банка данных предыстории процесса. В этом случае $F_{0j}^{(0)}(t)$ — функция распределения времени безотказной работы МГНТС между соседними авариями типа j.

При $i = 1, \ldots, N$ для любого $k \in K_i$ $p_{i0}^{(k)} = 1$, $p_{ij}^{(k)} = 0\,(j \neq 0)$; $F_{j0}^{(k)}(t)$ — функция распределения времени восстановления работоспособности МГНТС с использованием решения k при аварии типа j.

В силу непрерывности во времени исследуемого процесса будем пользоваться переоценкой экспоненциального вида с нормой α, т.е. если в некоторый момент времени выплачивается единичный доход, то через время t этот доход уже будет стоить $e^{-\alpha t}$ единиц. Тогда, если r_i — доход за единицу времени, то суммарный доход за время t имеет вид

$$\int_0^t r_i e^{-\alpha\tau} d\tau = \frac{r_i}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t}). \tag{2}$$

Обозначим i_n состояние системы после n-го перехода, u_n — принятое решение, а τ_n — время пребывания в этом состоянии (n = 0, 1, 2, ...; i_0 — начальное состояние). Допустимую стратегию π для управляемой МГНТС определим как последовательность $\{\pi_0, \pi_1, \pi_2, \ldots\}$, где $\pi_n(\bullet / z_n)$ — вероятностная мера, сосредоточенная на функции ограничений $U(S)$ на принятые решения (управления), определяемой системой неравенств

$$\sum_{j \in \tilde{S}} c_{kj} x_{kj} \leq b_k, \;\; k \in K = \underset{j \in \tilde{S}}{U} K_j, \tag{3}$$

и зависящая от истории управляемой системы к моменту n-го перехода $z_n = (i_0, u_0, \tau_0, \ldots, i_{n-1}, u_{n-1}, \tau_{n-1}, i_n)$. Мера $\pi_n(\bullet / z_n)$ задает рандомизированное правило выбора решения u_n на основе информации z_n. Такую стратегию π называют рандомизированной [6].

Стратегия π называется марковской, если $\pi_n(\bullet / z_n) = \pi_n(\bullet / i_n)$ (n = 0, 1, 2, ...). Марковская стратегия π называется стационарной, если $\pi_n(\bullet / i_n) = \pi(\bullet / i_n)$. Плотность меры такой стратегии при $i_n = i, u_n = k\,(k \in K_i)$ обозначим $d_i^{(k)}$. Если стратегия π — марковская стационарная, то управляемый процесс является полумарковским. Впервые полумарковские процессы рассмотрены в 1954 г. [10]. Основные результаты теории полумарковских процессов изложены в [11]. Управляемые полумарковские модели процессов с доходами приведены в [12].

Обозначим через $w_i(t, \alpha, \pi)$ суммарный доход за время t системы, принимающей решения согласно стратегии π с нормой переоценки α при условии, что функционирование системы начинается в момент t = 0 из состояния i. Через $\upsilon_i(t, \alpha, \pi) = w_i(t, \alpha, \pi)/t$ обозначим суммарный средний доход системы за время t при тех же условиях.

Пусть c_{kj} — затраты, связанные с реализацией мероприятия k в случае аварии j и x_{kj} — булева переменная: $x_{kj} = 1$, если k применяется для аварии j, $x_{kj} = 0$ в противном случае. Будем предполагать, что общий объем средств, отпущенных в МГНТС на мероприятие вида k ограничен константой b_k, т.е. выполняются неравенства (3).

Если затраты c_{kj} таковы, что выполнимо каждое из ограничений (3), то система (3) определяет в пространстве $\mathbf{R}^d$, $d = \dim K$, некоторое конечное множество дискретных точек. Тогда на основании следствия 2 теоремы 7.4 и теоремы 7.7 из работы [7] существует нерандомизированная стационарная стратегия π^*, называемая α-оптимальной, которая максимизирует суммарный средний доход $\boldsymbol{\upsilon}(\alpha,\pi)$ при произвольной стратегии π и норме переоценки α ($\alpha > 0$). При этом $\boldsymbol{\upsilon}(\alpha,\pi)$ есть $(N+1)\times 1$-мерный вектор $(\upsilon_0(\alpha,\pi)$, $\upsilon_1(\alpha,\pi)$, ..., $\upsilon_N(\alpha,\pi))$, где

$$\upsilon_i(\alpha,\pi) = \lim_{t\to\infty} \upsilon_i(\alpha, t, \pi),\ i \in S. \tag{4}$$

Необходимо найти α-оптимальную нерандомизированную марковскую стационарную стратегию π^*, максимизирующую суммарный средний доход $\boldsymbol{\upsilon}(\alpha,\pi)$ при произвольном начальном распределении процесса

$$\mathbf{a} = (a_0, a_1, ..., a_N), \tag{5}$$

$$\sum_{i\in S} a_i = 1,\ a \ge 0,\ \ i \in S. \tag{6}$$

Не уменьшая общности, в качестве начального распределения возьмем вектор $\mathbf{a} = (1, 0, ..., 0)$, т.е. начальное состояние системы (нормальное функционирование). На основе полумарковской модели принятия решений данную задачу приведем к эквивалентной задаче бивалентного программирования с использованием псевдобулевых методов.

Оптимизационная схема полумарковской модели принятия решений. Вероятности переходов рассматриваемого для МГНТС полумарковского процесса принятия решений в моменты скачков из состояния i в состояние j при принятии решения $k \in K_i$ определяются стохастической $(N + 1) \times (N + 1)$-матрицей $P^{(k)} = [p_{ij}^{(k)}]$, которая задает так называемую вложенную цепь Маркова. Здесь и далее [ ] — обозначение матрицы. Элементы $p_{ij}^{(k)}$ при любых $i, j \in S$ и $k \in K_i$ позволяют определить по формуле (1) совместную вероятность $Q_{ij}^{(k)}(t)$ того, что длительность пребывания в состоянии i не превосходит t и из состояния i при $k \in K_i$ процесс переходит в состояние j с вероятностью $p_{ij}^{(k)}$. Функции $Q_{ij}^{(k)}(t)$ в (1) удовлетворяют условиям

$$Q_{ij}^{(k)}(0) = 0,\ \ i, j \in S,\ \ k \in K_i, \tag{7}$$

$$\sum_{j\in S} Q_{ij}^{(k)}(\infty)=\sum_{j\in S} p_{ij}^{(k)}=1,\, i\in S,\, k\in K_i. \tag{8}$$

С помощью матрицы $Q^{(k)}(t)=[Q_{ij}^{(k)}(t)]$, называемой матрицей переходных распределений, определим функцию

$$H_i^{(k)}(t)=\sum_{j\in S} Q_{ij}^{(k)}(t),\;\; i\in S,\;\; k\in K_i, \tag{9}$$

являющуюся функцией распределения времени пребывания процесса в состоянии i при принятии решения $k\in K_i$.

Случайный процесс $\{Z_t;\; t\geq 0\}$ со значениями $Z_t=i$, если в момент t система находится в состоянии i, является полумарковским процессом и задается величинами $N, a, Q_{ij}^{(k)}(t),\;\; i, j\in S, k\in K_i$.

Полумарковский процесс называется регулярным, если за конечный промежуток времени он с вероятностью единица побывает в любом состоянии не более конечного числа раз. Таким образом, регулярный полумарковский процесс за конечный промежуток времени всегда совершает лишь конечное число переходов. Далее будем рассматривать только регулярные полумарковские процессы.

В случае одноэлементных множеств решений K_i в результате стандартных для теории восстановления [13] рассуждений получаем следующее уравнение восстановления [6]:

$$\upsilon_i(t)=(1-H_i(t))\frac{r_i}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})+\sum_{j\in S}\int_0^t\left\{\frac{r_i}{\alpha}(1-e^{-\alpha\tau})+\right.$$

$$\left.+e^{-\alpha\tau}\upsilon_j(t-\tau)\right\}dQ_{ij}(\tau),\;\; i\in S,$$

где $\upsilon_i(t)$ — краткая запись суммарного среднего дохода $\upsilon_i(t,\alpha,\pi)$ за время t.

В случае конечных множеств K_i уравнение восстановления с учетом вероятностей $d_i^{(k)}$ принятия решений k в состоянии i запишем в виде

$$\upsilon_i(t)=\sum_{k\in K_i} d_i^{(k)}(1-H_i^{(k)}(t))\frac{r_i^{(k)}}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})+$$

$$+\sum_{j\in S}\sum_{k\in K_i}\int_0^t d_i^{(k)}\left\{\frac{r_i^{(k)}}{\alpha}(1-e^{-\alpha\tau})+e^{-\alpha\tau}\upsilon_j(t-\tau)\right\}dQ_{ij}^{(k)}(\tau),\;\; i\in S, \tag{10}$$

где $r_i^{(k)}$ — доход системы за единицу времени пребывания в состоянии i при решении $k\in K_i$; $\upsilon_j(t)$ — суммарный средний доход, получаемый системой за время t с учетом переоценки (2) (с заменой r_i на $r_j^{(k)}$) при условии, что процесс начинается в момент $t = 0$ из состояния j.

Величины $\upsilon_i(\alpha, \pi)$ из (4) кратко запишем в виде $\upsilon_i(\alpha)$, и для вывода уравнения воспользуемся понятием интеграла Лапласа—Стилтьеса. По определению [14] для любой функции $F(t)$, производная $F'(t)$ которой является функцией-оригиналом, удовлетворяющей неравенству $F'(t) < Ce^{at}$ для всех $t > 0$, при всех комплексных s, когда $\operatorname{Re} s > a$, существует функция

$$F^*(s) = L_s^*\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\, dF(t), \tag{11}$$

т.е. функция e^{-st} при $\operatorname{Re} s > a$ интегрируема по функции $F(t)$. Функцию $F^*(s)$ из (11) называют преобразованием Лапласа—Стилтьеса функции $F(t)$. Из (8) и (9) следует, что $H_i^{(k)}(\infty) = 1,\ i \in S,\ k \in K_i$, поэтому первая сумма в (10) при $t \to \infty$ обращается в нуль. Интегрируя по частям выражение (11) для $L_s^*\{F(t)\}$, получаем

$$s\, L_s\{F(t)\} = L_s^*\{F(t)\} - F(0), \tag{12}$$

где

$$F(s) = L_s\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt$$

есть преобразование Лапласа функции $F(t)$. Из (12) при $s \neq 0$ находим

$$L_s\{F(t)\} = \frac{1}{s}(L_s^*\{F(t)\} - F(0)). \tag{13}$$

Интегрированием по частям с учетом (9) находим

$$\sum_j \int_0^t (1 - e^{-\alpha\tau})\, dQ_{ij}^{(k)}(\tau) = (1 - e^{-\alpha\tau}) \sum_j dQ_{ij}^{(k)}(\tau)\Big|_0^t - \sum_j a \int_0^t e^{-\alpha\tau} H_i(\tau)\, d\tau. \tag{14}$$

Переходя в (14) к пределу при $t \to \infty$ и применяя формулу (13) для $s = \alpha$ ($\alpha > 0$), с учетом соотношений (7) и (8) получаем

$$\sum_j \int_0^\infty (1 - e^{-\alpha\tau})\, dQ_{ij}^{(k)}(\tau) = 1 - \alpha\, L_{s=\alpha}\{H_i^{(k)}(t)\} =$$

$$= 1 - \alpha \frac{1}{\alpha} L_{s=\alpha}^*\{H_i^{(k)}(t)\} = 1 - h_i^{(k)}(\alpha), \tag{15}$$

где $h_i^{(k)}(\alpha)=L^*_{s=\alpha}\{H_i^{(k)}(t)\}$. Применяя к функции

$$\Phi_i^{(k)}(t)=\int_0^t e^{-\alpha\tau}\upsilon_j(t-\tau)\,dQ_{ij}^{(k)}(t)$$

теорему о предельном переходе в интеграле по параметру, от которого зависят пределы интегрирования и подынтегральная функция [15, §53.1, теорема 1], при $t\to\infty$ получаем

$$\Phi_{ij}^{(k)}(\infty)=\int_0^\infty e^{-\alpha\tau}\upsilon_j(\alpha)\,dQ_{ij}^{(k)}(\tau)=\upsilon_j(\alpha)\,q_{ij}^{(k)}(\alpha), \tag{16}$$

где $q_{ij}^{(k)}(\alpha)=L^*_{s=\alpha}\{Q_{ij}^{(k)}(\alpha)\}$. Переходя теперь в уравнении (10) к пределу при $t\to\infty$, с учетом (15) и (16) получаем следующее уравнение:

$$\upsilon_i(\alpha)=\sum_{k\in K_i}d_i^{(k)}\left(\rho_i^{(k)}(\alpha)+\sum_{j\in S}q_{ij}^{(k)}(\alpha)\,\upsilon_j(\alpha)\right), \tag{17}$$

где

$$\rho_i^{(k)}(\alpha)=\frac{r_i^{(k)}}{\alpha}(1-h_i^{(k)}(\alpha)). \tag{18}$$

Для одноэлементных множеств $K_i=\{k_i\}$ $(d_i^{(k_i)}=1)$ формула (17) была получена в работе [6, формула (5.37)].

Пусть

$$p_i(\alpha)=\sum_{k\in K_i}d_i^{(k)}\rho_i^{(k)}(\alpha)$$

и $\boldsymbol{\rho}(\alpha)=(\rho_0(\alpha),\dots,\rho_N(\alpha))^T$, $\boldsymbol{\upsilon}(\alpha)=(\upsilon_0(\alpha),\dots,\upsilon_N(\alpha))^T$, где T — символ транспонирования матрицы. Тогда

$$\boldsymbol{\upsilon}(\alpha)=\boldsymbol{\rho}(\alpha)+q(\alpha)\,\boldsymbol{\upsilon}(\alpha), \tag{19}$$

где

$$q(\alpha)=[q_{ij}(\alpha)],\;\; q_{ij}(\alpha)=\sum_{k\in K_i}d_i^{(k)}q_{ij}^{(k)}(\alpha).$$

Из (19) находим

$$\boldsymbol{\upsilon}(\alpha)=[I-q(\alpha)]^{-1}\boldsymbol{\rho}(\alpha). \tag{20}$$

Равенство (20) справедливо, так как при $\alpha > 0$ матрица $[I - q(\alpha)]$ невырожденная, I — единичная матрица размера $(N+1)\times(N+1)$. Умножив обе части равенства (19) слева на вектор **a** из (5), (6), получим

$$\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\upsilon}(\alpha) = \sum_{i\in S}\sum_{j\in\widetilde{S}}\sum_{k\in K_j} a_i\,\mu_{ij}(\alpha)\,\rho_j^{(k)}(\alpha)\,d_j^{(k)},$$

$$[I - q(\alpha)]^{-1} = [\mu_{ij}(\alpha)]. \tag{21}$$

Величины $\mu_{ij}(\alpha)$ зависят от $d_i^{(k)}$, $k \in K_i$, $i \in S$, так как элементы матрицы $[I - q(\alpha)]$ можно выразить через $d_i^{(k)}$, $k \in K_i$, $i \in S$.

Пусть $\{d_j^{(k)}\}$ $(k \in K_j)$ — нерандомизированная марковская стационарная стратегия системы в состоянии j:

$$d_j^{(k)} \in \{0,1\},\ \sum_{j\in S} d_j^{(k)} = 1.$$

Положим $x_{00} = 1$ и $x_{kj} = d_j^{(k)}$, $k \in K_j$, $j \in \widetilde{S}$. Максимизация дохода (21) приводит к следующей задаче оптимизации для булевых переменных $\mathbf{x} = \{x_{kj}\}$, $k \in K_j$, $j \in \widetilde{S}$:

$$f(\alpha, \mathbf{x}) = \sum_{i\in S}\sum_{j\in\widetilde{S}}\sum_{k\in K_j} a_i\,\mu_{ij}(\alpha, \mathbf{x})\,\rho_j^{(k)} x_{kj} \to \max, \tag{22}$$

$$\sum_{k\in K_j} x_{kj} = 1,\ \ j \in \widetilde{S}, \tag{23}$$

$$\sum_{j\in\widetilde{S}} c_{kj} x_{kj} \le b_k,\ \ k \in K_j,\ \ j \in \widetilde{S}, \tag{24}$$

$$x_{kj} \in \{0,1\},\ \ k \in K_j,\ \ j \in \widetilde{S}. \tag{25}$$

Построение оптимальной нерандомизированной марковской стационарной стратегии. Обозначим систему (24), (25) через C. В терминологии [16] C является системой псевдобулевых неравенств. Обозначим, далее, систему C при дополнительных условиях (23) через $\overline{C}$ и через $\mathbf{x}_k^{(r)} = (x_{k1}^{(r)}, \ldots, x_{kN}^{(r)})$, $r = 1, \ldots, r_k$ — допустимые решения k-го неравенства системы $\overline{C}$.

Для построения решений системы $\overline{C}$ при известных допустимых решениях каждого неравенства (24) применим подход, предложенный в [8] для нахождения базисных решений системы $\overline{C}$. Суть этого подхода заключается в следующем.

Решения системы $\overline{C}$ отыскиваются в виде $\mathbf{P}=\{s_j\}, j=1, \ldots, N$, где s_j — множество номеров k, для которых допустимо равенство $x_{kj}=1$. Решения находятся за m шагов, где m — число ограничений (24). В исходном состоянии каждое из множеств $s_j^{(0)}$ вектора $\mathbf{P}^{(0)}$ включает все возможные значения $k\in K_j$. На k-м шаге происходит пересечение вектора $\mathbf{P}^{(k-1)}$ с одним из решений k-го неравенства. Полагая, что k-му неравенству соответствует $k = k_1$, а также, что α_j есть j-й элемент допустимого решения данного неравенства, $\alpha_j \in\{0,1,p\}$ (p — неопределенный параметр из множества $\{0,1\}$, обозначаемый в дальнейшем прочерком), можно записать следующие формальные правила для k-го шага алгоритма построения решений системы $\overline{C}$:

1) если значение α_j не фиксировано, то $s_j^{(k)}=s_j^{(k-1)}$;

2) если $\alpha_j=1$, то при $k_1\in s^{(k-1)}$ полагаем $s^{(k)}=\{k_1\}$, а при $k_1 \overline{\in} s^{(k-1)}$ полагаем $s_j^{(k)}=\varnothing$;

3) если $\alpha_j=0$, то полагаем $s_j^{(k)}=s_j^{(k-1)}\setminus\{k_1\}$.

При этом пересечение семейств решений осуществляется с учетом дополнительных ограничений (23).

На m-м шаге алгоритма получаем вектор $\mathbf{P}^{(m)}=\{\alpha_1^{(m)}, ..., \alpha_N^{(m)}\}$, каждая компонента $\alpha_j^{(m)}$ которого либо является одноэлементным множеством $\{k\}, k\in K,\ K=\{1, ..., m\}$ и, следовательно, $\mathbf{P}^{(m)}$ есть решение системы $\overline{C}$, либо представляет собой некоторый набор чисел k из множества K. В последнем случае с помощью сочетания элементов многозначных компонент из вектора $\mathbf{P}^{(m)}$ получаем несколько решений системы $\overline{C}$. В результате находим совокупность всех решений системы $\overline{C}$, из которых выбираем оптимальное решение, доставляющее максимум целевой функции $f(\alpha,\mathbf{x})$. Это решение определяется непосредственным сравнением значений $f(\alpha,\mathbf{x})$ при определении $\mathbf{x}$ системы $\overline{C}$. Численная реализация изложенного алгоритма решения задачи (22)—(25) для полумарковской модели принятия решений при авариях в магистральном газопроводе представлена в следующем примере.

Пример. Рассмотрим две возможные аварии газопровода: авария 1 (j = = 1) —закупорка, авария 2 (j = 2) — пропуск задвижки. Альтернативные мероприятия в случае аварии 1:

1) остановка газопровода и восстановление нормального состояния;

2) продувка газопровода;

3) применение вязкоупругой системы очистки;

в случае аварии 2:

1) остановка газопровода и восстановление нормального состояния;

2) замена задвижки.

Полагаем, что в обеих авариях первое мероприятие — остановка газопровода — осуществляется за одно и то же время $T = 1$ ч. Поэтому, учитывая малую стоимость соответствующих восстановительных работ по сравнению с убытками при простое всей системы, можно считать первые мероприятия в обоих случаях одинаковыми по затратам. Запишем мероприятия в случае аварии 1 в виде $k = 1$, $k = 2$, $k = 3$, а мероприятия в случае аварии 2 — в виде $k = 1$ и $k = 4$. Тогда число элементов системы составит $N = 2$, а общее число различных мероприятий для ликвидации совокупности аварий $\{1, 2\}$ — $m = 4$.

Отождествим аварии j газопроводной системы с ее элементами, соединенными последовательно (по надежности). При этом будем полагать, что восстановление каждого элемента требует некоторого времени, которым нельзя пренебречь, и во время восстановления любого элемента все другие элементы продолжают работать. Отказы и восстановления элемента не влияют на надежность других элементов. Время восстановления элемента не зависит от того, происходят в это время отказы других элементов или нет. Иными словами, каждый элемент отказывает и восстанавливается независимо от других. В этом случае поток отказов и восстановлений есть сумма N независимых процессов восстановления с конечным временем восстановления [8].

Обозначим через $F_j(t)$ функцию распределения времени безотказной работы системы между двумя последовательными авариями типа j, а через $G_j^{(k)}(t)$ — функцию распределения времени восстановления системы после аварии типа j при принятии решения k. Будем полагать, что $F_j(t)$ и $G_j^{(k)}(t)$ подчиняются экспоненциальным законам с функциями интенсивности соответственно λ_j и $\mu_j^{(k)}$:

$$F_j(t) = 1 - e^{-\lambda_j t}, \quad G_j^{(k)}(t) = 1 - e^{-\mu^{(k)} t}, \tag{26}$$

где $\lambda_j = 1/T_{j1}$; $\mu_j^{(k)} = 1/T_{j2}^{(k)}$; T_{j1} и $T_{j2}^{(k)}$ — среднее время жизни системы между двумя последовательными авариями типа j и среднее время восстановления системы после аварии типа j при решении k. Пусть $d_i^{(k)}$ — нерандомизированная стационарная стратегия системы в состоянии i ($i \in S$) при решении k (т.е. вероятность принятия решения k в состоянии i),

$$d_i^{(k)} \in \{0, 1\}, \quad \sum_{k \in K_i} d_i^{(k)} = 1, \quad i \in S. \tag{27}$$

Тогда закон распределения жизни и закон распределения времени восстановления системы в целом запишем в виде

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad G(t) = 1 - e^{-\mu t},$$

где

$$\lambda = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j, \ \mu = \sum_{j=1}^{N} \sum d_j^{(k)} \mu_j^{(k)}.$$

Пусть

$$T_{11} = 8 \text{ ч}, \ \ T_{21} = 8 \text{ ч}, \ \ T_{12}^{(1)} = 1 \text{ ч}, \ \ T_{12}^{(2)} = 2 \text{ ч},$$

$$T_{12}^{(3)} = 1\text{ч}, \ \ T_{22}^{(1)} = 1\text{ч}, \ \ T_{22}^{(4)} = 0{,}5 \text{ ч}. \tag{28}$$

Пусть, далее, $i = 0$ — состояние нормального функционирования, $i = 1$ соответствует аварии 1, а $i = 2$ — аварии 2; $S = \{0, 1, 2\}$, $\widetilde{S} = \{1, 2\}$. Согласно (28) с учетом (25)—(27) получаем

$$F_0(t) = F(t) = 1 - e^{-0,25t}, \ F_j(t) = 1 - e^{-0,125t}, \ j = 1, 2,$$

$$G_1^{(1)}(t) = 1 - e^{-t}, \ G_1^{(2)}(t) = 1 - e^{-0,5t}, \ G_1^{(3)}(t) = 1 - e^{-t},$$

$$G_2^{(1)}(t) = 1 - e^{-t}, \ G_2^{(4)}(t) = 1 - e^{-2t}.$$

Допустим, пропускная способность газопровода равна $7 \cdot 10^6$ м^3/день и стоимость 1000 м^3 газа — 230 у. е. Тогда издержки от простоя газопровода в течение времени $T = 1$ ч составят $7 \cdot 10^3 \cdot 230/24 = 66850$ у. е. Обозначим через c_{kj} затраты на мероприятие k в случае аварии j. Тогда, пренебрегая затратами на восстановительные работы в мероприятии $k = 1$, получаем $c_{11} = c_{12} = c_1 = 66850$ у. е. Пусть, далее, $c_{21} = 300$, $c_{31} = 400$, $c_{42} = 600$ у. е. Будем считать, что в состоянии $i = 0$ принято единственное решение ($k = 0$) — продолжать нормальное функционирование, и в этом состоянии задано следующее распределение вероятностей:

$$p_{00}^{(0)} = 0{,}7, \ \ p_{01}^{(0)} = 0{,}1, \ \ p_{02}^{(0)} = 0{,}2. \tag{29}$$

Функции (1) и (9) запишем так:

$$Q_{00}^{(0)}(t) = 0{,}7(1 - e^{-0,25t}), \ Q_{01}^{(0)}(t) = 0{,}1(1 - e^{-0,125t}),$$

$$Q_{02}^{(0)}(t) = 0{,}2(1 - e^{-0,125t}), \ Q_{10}^{(1)}(t) = 1 - e^{-t}, \ Q_{10}^{(2)}(t) = 1 - e^{-0,5t},$$

$$Q_{10}^{(3)}(t) = 1 - e^{-t}, \ Q_{11}^{(k)}(t) = Q_{12}^{(k)}(t) = 0, \ (k = 1, 2, 3),$$

$$Q_{20}^{(1)}(t) = 1 - e^{-t}, \ Q_{20}^{(4)}(t) = 1 - e^{-2t});$$

$$H_0^{(0)}(t) = 0{,}7(1 - e^{-0,25t}) + 0{,}3(1 - e^{-0,125t}),$$

$$H_1^{(1)}(t) = 1 - e^{-t}, \ H_1^{(2)}(t) = 1 - e^{-0,5t}, \ H_1^{(3)}(t) = 1 - e^{-t},$$

$$H_2^{(1)}(t) = 1 - e^{-t}, H_2^{(4)}(t) = 1 - e^{-2t}.$$

С учетом обозначений $x_{00}=1$, $x_{kj}=d_j^{(k)}$, $k\in K_j$, $j\in\widetilde{S}$, матрица $q(\alpha,\mathbf{x})=$ $=[q_{ij}(\alpha,\mathbf{x})]\,(i,j\in S)$ с элементами

$$q_{ij}(\alpha,\mathbf{x})=\sum_{k\in K_i}x_{ki}\,q_{ij}^{(k)}(\alpha),\ \ i,j\in S$$

примет вид

$$q(\alpha,x)=\begin{bmatrix}\dfrac{0{,}175}{\alpha+0{,}25} & \dfrac{0{,}0125}{\alpha+0{,}125} & \dfrac{0{,}025}{\alpha+0{,}125}\\ \dfrac{x_{11}+x_{31}}{\alpha+1}+\dfrac{x_{21}}{\alpha+0{,}5} & 0 & 0\\ \dfrac{x_{12}}{\alpha+1}+\dfrac{x_{42}}{\alpha+2} & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Найдем определитель матрицы $[I-q(\alpha,\mathbf{x})]$:

$$D(\alpha,\mathbf{x})=-\frac{0{,}025}{\alpha+0{,}125}\left(\frac{x_{12}}{\alpha+1}+\frac{2x_{42}}{\alpha+2}\right)+1-\frac{0{,}175}{\alpha+0{,}25}-\frac{0{,}0125}{\alpha+0{,}125}\left(\frac{x_{11}}{\alpha+1}+\frac{x_{21}}{\alpha+0{,}5}\right).$$

Матрица $[I-q(\alpha,\mathbf{x})]^{-1}=[\mu_{ij}(\alpha,\mathbf{x})]\,(i,j\in S)$ имеет элементы

$$\mu_{00}(\alpha,\mathbf{x})=0,\ \ \mu_{01}(\alpha,\mathbf{x})=\frac{1}{D(\alpha,\mathbf{x})}\cdot\frac{0{,}0125}{\alpha+0{,}125},\ \ \mu_{02}(\alpha,\mathbf{x})=\frac{1}{D(\alpha,\mathbf{x})}\cdot\frac{0{,}025}{\alpha+0{,}125},$$

$$\mu_{10}(\alpha,\mathbf{x})=\frac{1}{D(\alpha,\mathbf{x})}\left(\frac{x_{11}+x_{31}}{\alpha+1}+\frac{x_{21}}{\alpha+0{,}5}\right),$$

$$\mu_{11}(\alpha,\mathbf{x})=\frac{1}{D(\alpha,\mathbf{x})}\left(1-\frac{0{,}175}{\alpha+0{,}25}-\frac{0{,}025}{\alpha+0{,}125}\left(\frac{x_{12}}{\alpha+1}+\frac{2x_{42}}{\alpha+2}\right)\right),$$

$$\mu_{12}(\alpha,\mathbf{x})=\frac{1}{D(\alpha,\mathbf{x})}\,\frac{0{,}025}{\alpha+0{,}125}\left(\frac{x_{11}+x_{31}}{\alpha+1}+\frac{x_{21}}{\alpha+0{,}5}\right),$$

$$\mu_{20}(\alpha,\mathbf{x})=\frac{1}{D(\alpha,\mathbf{x})}\left(\frac{x_{12}}{\alpha+1}+\frac{2x_{42}}{\alpha+2}\right),$$

$$\mu_{21}(\alpha,\mathbf{x})=\frac{1}{D(\alpha,\mathbf{x})}\,\frac{0{,}0125}{\alpha+0{,}125}\left(\frac{x_{12}}{\alpha+1}+\frac{2x_{42}}{\alpha+2}\right),$$

$$\mu_{22}(\alpha,\mathbf{x})=\frac{1}{D(\alpha,\mathbf{x})}\left(1-\frac{0{,}175}{\alpha+0{,}25}-\frac{0{,}0125}{\alpha+0{,}125}\left(\frac{x_{11}+x_{31}}{\alpha+1}+\frac{x_{21}}{\alpha+0{,}5}\right)\right).$$

В (18) величины $r_i^{(k)}$ имеют значения (у. е.)

$$r_0^{(0)} = 66850,\quad r_1^{(1)} = -66850,\; r_1^{(2)} = -150,\; r_1^{(3)} = -400,$$

$$r_2^{(1)} = -66850,\; r_2^{(4)} = -1200,$$

а величины $\rho_i^{(k)}$ записываются в виде

$$\rho_0^{(0)}(\alpha) = \frac{66850}{\alpha}\left(1 - \frac{0{,}175}{\alpha + 0{,}25} - \frac{0{,}0375}{\alpha + 0{,}125}\right),$$

$$\rho_1^{(1)}(\alpha) = -\frac{66850}{\alpha}\left(1 - \frac{1}{\alpha + 1}\right),\; \rho_1^{(2)}(\alpha) = -\frac{150}{\alpha}\left(1 - \frac{0{,}5}{\alpha + 0{,}5}\right),$$

$$\rho_1^{(3)}(\alpha) = -\frac{400}{\alpha}\left(1 - \frac{1}{\alpha + 1}\right),\; \rho_2^{(1)}(\alpha) = -\frac{66850}{\alpha}\left(1 - \frac{1}{\alpha + 1}\right),$$

$$\rho_2^{(4)}(\alpha) = -\frac{1200}{\alpha}\left(1 - \frac{2}{\alpha + 2}\right).$$

Найдем решения системы $\overline{C}$ с помощью алгоритма пересечения решений отдельных неравенств (24), полагая, что правые части b_k этих неравенств удовлетворяют условиям

$$c_{11} < b_1 < 2c_1,\; b_2 > c_{21},\; b_3 > c_{31},\; b_4 > c_{42}. \tag{30}$$

С учетом условий (30) находим следующие допустимые решения отдельных неравенств системы $\overline{C}$:

$$k_1 = 1 : 1 — (1, 0);\; 2 — (0, 1);\; 3 — (0, 0);$$

$$k_1 = 2 : 1 — (1, 0);\; 2 — (0, 0);$$

$$k_1 = 3 : 1 — (1, 0);\; 2 — (0, 0);$$

$$k_1 = 4 : 1 — (0, 1);\; 2 — (0, 0).$$

Имея $\mathbf{P}^{(0)} = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 4\}\}$, на последнем четвертом шаге алгоритма получаем

$$\mathbf{P}_{1221}^{(4)} = \{\{1\},\{4\}\},\; \mathbf{P}_{1222}^{(4)} = \{\{1\}, \varnothing\},\; \mathbf{P}_{2121}^{(4)} = \{\{2\}, \varnothing\},\; \mathbf{P}_{2122}^{(4)} = \{\{2\},\{1\}\},$$

$$\mathbf{P}_{2211}^{(4)} = \{\{3\}, \varnothing\},\; \mathbf{P}_{2212}^{(4)} = \{\{3\},\{1\}\},\; \mathbf{P}_{3121}^{(4)} = \{\{2\},\{4\}\},$$

$$\mathbf{P}_{3122}^{(4)} = \{\{2\}, \varnothing\},\; \mathbf{P}_{3211}^{(4)} = \{\{3\},\{4\}\},\; \mathbf{P}_{3212}^{(4)} = \{\{3\}, \varnothing\},$$

где $\varnothing$ — символ пустого множества.

Итак, решениями системы $\overline{C}$ являются векторы:

$$1)\ \{\{1\},\{4\}\};\ 2)\ \{\{2\}, \{1\}\};\ 3)\ \{\{2\},\{4\}\};$$

$$4)\ \{\{3\},\{1\}\};\ 5)\ \{\{3\},\{4\}\}.$$

Им соответствуют следующие значения булевых переменных $\{x_{kj}\}$:

$$1)\, x_{11} = 1, x_{42} = 1;\;\; 2)\, x_{21} = 1, x_{12} = 1;\;\; 3)\, x_{21} = 1, x_{42} = 1;$$
$$4)\, x_{31} = 1, x_{12} = 1;\;\; 5)\, x_{31} = 1, x_{42} = 1$$

(не указанные переменные в каждом i-м решении равны нулю). С учетом (28), (29) $f\,(\alpha, \mathbf{x})$ при $\alpha = 0{,}1$ (что соответствует инфляции, равной 10 %) и начальном распределении $\mathbf{a} = (1, 0, ..., 0)$ принимает соответственно значения:

$$f_1 = -\,48753{,}6;\;\; f_2 = -\,5325890{,}7;\; f_3 = -\,14011{,}6;\;\; f_4 = -\,23789{,}9;\; f_5 = -\,175{,}2.$$

Таким образом, при $\alpha = 0{,}1$ и $\mathbf{a} = (1, 0, \ldots, 0)$ оптимальной нерандомизированной марковской стационарной стратегией будет стратегия $x_{11} = 0, x_{21} = 0, x_{31} = 1, x_{12} = 0, x_{42} = 1$, соответствующая решению $\{\{3\},\{4\}\}$ системы $\overline{C}$.

Вывод. Предложенный метод построения оптимальной нерандомизированной марковской стационарной стратегии для решения задачи управления рисками в сложных технических системах при условии ограниченности средств основан на применении полумарковской модели принятия решений для управляемого марковского процесса в непрерывном времени с дисконтированным средним доходом и решении оптимизационной задачи бивалентного программирования с нелинейной целевой функцией и линейными ограничениями. Численная реализация алгоритма решения приведена для реальной задачи управления рисками в магистральном газопроводе при заданных ограничениях на средства, выделенные на каждое мероприятие по ликвидации аварий.

Данный метод может быть использован в любой отрасли промышленности при решении задачи управления технико-технологическими рисками, связанными с предотвращением и ликвидацией возможных аварий.

The task of the control of technical-technological risks in the main oil-and-gas pipelines under limited resources appropriated for the possible accident prevention and elimination is considered as Semi-Markov model of decision-making for the controlled Markov process in the continuous time with a criterion of mean income maximum with a discounting. To find the optimal nonrandomized Markov stationary strategy a procedure is offered which is based on the application of the pseudo-Boolean methods of bivalent programming.

1. *Шахбазов Э. К.* Управление рисками в проблеме обеспечения энергетической безопасности. — Баку : изд-во «Карабах», 2007. — 144 с.
2. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Управляемые случайные процессы. — Киев. : Наук. думка, 1977. — 251 с.
3. *Дынкин Е. Б., Юшкевич А. А.* Управляемые марковские процессы и их приложения. — М. : Наука, 1975. — 338 с.
4. *Бертсекас Д., Шрив С.* Стохастическое оптимальное управление: случай дискретного времени. — М. : Наука, 1985. — 280 с.

5. *Ховард Р. А.* Динамическое программирование и марковские процессы. — М. : Сов. радио, 1964. — 189 с.
6. *Майн Х., Осаки С.* Марковские процессы принятия решений. — М. : Наука, 1977. — 176 с.
7. *Гнеденко Б. В., Беляев Ю. К., Соловьев А. Д.* Математические методы в теории надежности. — М. : Наука, 1965. — 524 с.
8. *Городецкий В. И., Лебедев А. Н., Пономарев В. В.* Псевдобулевы методы бивалентного программирования в задачах структурного синтеза АСУ//Сб. «Автоматизированные системы управления». Вып. 4. — Ленинград : изд-во Ленинградского ун-та, 1977. — С. 50—55.
9. *Дышин О. А.* Решение задачи выбора оптимального ряда при ограниченных объемах производства//Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. — 1988. — № 1. — С. 166—168.
10. *Takacs L.* Bizonyos tipusu rekurrens sztochasztikus folyamatok vizsgalatarol//Magyar tud. akad. mat. kutato. int. közl. — 1954. — Vol. 3, № 1— 2.
11. *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Полумарковские процессы и их приложения. — Киев. : Наук. думка, 1976. — 184 с.
12. *Ross S.M.* Average Cost Semi-Markov Decision Processes//Journal of Applied Probability. — 1970. — Vol.7. — № 3.
13. *Кокс Д. Р., Смит В. Л.* Теория восстановления. — М. : Сов. радио, 1967. — 298 с.
14. *Байхельт Ф., Франкен П.* Надежность и техническое обслуживание. Математический подход. — М. : Радио и связь, 1988. — 392 с.
15. *Кудрявцев Л. Д.* Курс математического анализа. Т. II. — М. : Высшая школа, 1981. — 584 с.
16. *Саати Т.* Целочисленные методы оптимизации и связанные с ними экстремальные проблемы. — М. : Мир, 1973. — 302 с.

Поступила 27.05.09;
после доработки 09.02.10

ДЫШИН Олег Александрович, канд. физ.-мат. наук, вед. науч. сотр. Государственного научно-исследовательского проектного ин-та «Нефтегазпроект» (г. Баку). В 1961 г. окончил Бакинский госуниверситет. Область научных исследований — системный анализ, дифференциальные интегральные уравнения.

АЗИЗОВ Ильхам Анарович, аспирант Государственного научно-исследовательского проектного ин-та «Нефтегазпроект» (г. Баку). В 2005 г. окончил Азербайджанскую государственную нефтяную академию. Область научных исследований — системный анализ, управляемые случайные процессы.