Low Temperature Physics/Физика низких температур, 2015, т. 41, № 10, с. 997–1000

Диссипативная функция ферромагнетика и теория кинетических уравнений Онсагера

В.Г. Барьяхтар, А.Г. Данилевич

Інститут магнетизма НАН и МОН Украины, бульв. Акад. Вернадского, 36б, Киев, 03142, Украина

Национальный технический университет Украины «КПИ»
E-mail: vbar@imag.kiev.ua, victor.baryakhtar@gmail.com, alek_tony@ukr.net

Статья поступила в редакцию 20 мая 2015 г., опубликована онлайн 25 августа 2015 г.

Показано, что использование общей теории кинетических уравнений Онсагера позволяет построить модель диссипативной функции ферромагнетика и соответствующее релаксационное слагаемое в уравнении Ландау–Лифшица. Изложена модель построения диссипативной функции ферромагнетиков различной симметрии. Показана фундаментальная роль эффективного магнитного поля, впервые введенного Ландау и Лифшицем.

Показано, що застосування загальної теорії кінетичних рівнянь Онсагера дозволяє побудувати модель дисипативної функції феромагнетика та відповідний релаксаційний доданок в рівнянні Ландау–Ліфшиця. Викладено модель побудови дисипативної функції феромагнетиків різної симетрії. Показано фундаментальну роль ефективного магнітного поля, уперше введеного Ландау та Ліфшицем.

PACS: **76.20.+q** Общая теория резонансов и релаксации;
75.25.+z Расположение спинов в магнитоупорядоченных материалах.

Ключевые слова: динамика магнитного момента, затухание спиновых волн, диссипативная функция, закон дисперсии.

Введение

Как неоднократно отмечалось, уравнение Ландау–Лифшица (ЛЛ) сыграло и продолжает играть определяющую роль в физике магнитных явлений и в целом ряде технических приложений магнитных материалов. Напомним, что в работе [1] впервые было сформулировано уравнение движения для намагниченности и введено понятие об эффективном магнитном поле, которое позволило самосогласованным образом описывать широкий класс динамических явлений в магнитных материалах. До настоящего времени не найдено ни одного примера, когда бы динамическая часть уравнения ЛЛ противоречила результатам экспериментов. Естественно, что за прошедшие 80 лет количество конкретных результатов, полученных на основе этого уравнения, исчисляется тысячами работ.

Необходимо отметить, что бездиссипативное уравнение ЛЛ имеет важное значение в теории солитонов. В работах [2,3] было показано, что бездиссипативное уравнение ЛЛ является наиболее общей формой полностью интегрируемой системы. Легко видеть, что такое уравнение, как точно интегрируемая система, имеет такие интегралы движения, как квадрат магнитного момента M^2 и свободная энергия F. Кроме этих двух, уравнение ЛЛ имеет бесконечное счетное число интегралов движения, а метод построения таких интегралов движения приведен в книге [4].

В работе [1] сложнее обстояло дело с обоснованием в уравнении ЛЛ релаксационного слагаемого. Тогда авторами релаксационный член был выписан, исходя из общих физических соображений, без аргументации его получения с помощью диссипативной функции, как это позже делалось ними для других моделей [5,6]. Один из очевидных недостатков релаксационного слагаемого ЛЛ — одна релаксационная константа для описания как однородных, так и неоднородных состояний ферромагнетика.

Авторами [1] указывалось, что релаксационный член обусловлен только релятивистскими взаимодействиями и не учитывает обменных взаимодействий. Естественно, что в последующие годы появился ряд теоретических и экспериментальных работ [7,8], в которых было показано, что с помощью релаксационного слагаемого в виде ЛЛ нельзя описывать реальные свойства многих магнитоупорядоченных систем.

Вместе с тем хорошо известно, что диссипативная функция вещества может быть определена с помощью кинетических уравнений Онсагера. Напомним вид уравнений Онсагера [9,10]

$$J_i = g_{ik} Y_k \,. \tag{1}$$

В этой формуле J_i — компоненты обобщенных потоков и Y_k — компоненты обобщенных сил, g_{ik} — кинетические коэффициенты, они удовлетворяют соотношениям $g_{ik} = g_{ki}$, если в системе нет магнитных полей. В теории Онсагера они определяют изменение энтропии S со временем

$$T\frac{dS}{dt} = J_i Y_i \,. \tag{2}$$

Используя уравнения Онсагера, для диссипативной функции Q имеем:

$$Q = -T\frac{dS}{dt} = -g_{ik} Y_i Y_k \,. \tag{3}$$

Эта формула показывает, что для построения диссипативной функции вещества необходимо знать кинетические коэффициенты Онсагера, они должны быть такими, чтобы форма $g_{ik} Y_i Y_k$ была положительно определенной.

Модель построения уравнения движения магнитного момента

В случае магнитоупорядоченной системы, например ферромагнетика, общая теория кинетических уравнений Онсагера дает механизм, который позволяет провести построение релаксационного слагаемого в уравнении Ландау–Лифшица [11]. Покажем, что в этом случае можно построить не только диссипативную функцию, но и динамическую часть уравнения движения намагниченности.

Определим энтропию S квазиравновесного состояния ферромагнетика через свободную энергию системы

$$TS = -F \,, \tag{4}$$

где T — температура, а свободная энергия F — некоторый функционал от намагниченности. По определению энтропии это должна быть аддитивная функция намагниченности ферромагнетика. Выберем ее в виде квазиравновесной энергии ферромагнетика. Тогда из (4) следует, что

$$T\frac{dS}{dt} = -\frac{dF}{dt} = -\int \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t}\frac{\delta F}{\delta \mathbf{M}(\mathbf{x},t)} dV = \int \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} \mathbf{H}_{\text{eff}} \, dV \,, \tag{5}$$

где $\mathbf{M}$ — магнитный момент ферромагнетика, $\mathbf{H}_{\text{eff}} = -(\delta F/\delta \mathbf{M}(\mathbf{x},t))$ — эффективное магнитное поле, а интегрирование проводится по всему объему V системы.

При этом свойство симметрии для кинетических коэффициентов g_{ik}, входящих в уравнение (1), принимает вид:

$$g_{ik}(\mathbf{B}) = g_{ki}(-\mathbf{B}) \,, \tag{6}$$

где $\mathbf{B}$ — вектор магнитной индукции.

Из выражений (1) и (5) видно, что в качестве обобщенных потоков следует взять $\mathbf{J} = \partial \mathbf{M}/\partial t$, а в качестве обобщенных сил $\mathbf{Y}$ — эффективное магнитное поле $\mathbf{H}_{\text{eff}}$. Введем, вместо кинетических коэффициентов $g_{ik}(\mathbf{B})$ симметричные и антисимметричные по индексам тензоры:

$$\gamma_{ik}(\mathbf{B}) = \frac{1}{2}(g_{ik}(\mathbf{B}) - g_{ki}(\mathbf{B})) \,, \quad \lambda_{ik}(\mathbf{B}) = \frac{1}{2}(g_{ik}(\mathbf{B}) + g_{ki}(\mathbf{B})) \,. \tag{7}$$

Очевидно, что для них будут выполняться соотношения

$$\gamma_{ik}(\mathbf{B}) = -\gamma_{ik}(-\mathbf{B}) \,, \qquad \lambda_{ik}(\mathbf{B}) = \lambda_{ik}(-\mathbf{B}) \,. \tag{8}$$

Другими словами, симметричная часть $\lambda_{ik}(\mathbf{B})$ является четной функцией вектора магнитной индукции, а антисимметричная часть $\gamma_{ik}(\mathbf{B})$ — нечетной функцией. Тогда:

$$g_{ik}(\mathbf{B}) = \gamma_{ik}(\mathbf{B}) + \lambda_{ik}(\mathbf{B}) \,. \tag{9}$$

В случае ферромагнетика вместо вектора индукции магнитного поля $\mathbf{B}$ удобно пользоваться вектором намагниченности $\mathbf{M}$ и представить тензоры $\gamma_{ik}(\mathbf{B})$ и $\lambda_{ik}(\mathbf{B})$ в виде

$$\gamma_{ik}(\mathbf{B}) = \gamma(M^2)\varepsilon_{ikl} M_l \,, \qquad \lambda_{ik}(\mathbf{B}) = \lambda_{ik}(M^2) \,, \tag{10}$$

где ε_{ikl} — единичный антисимметричный тензор. Уравнения Онсагера при использовании соотношений (10) принимают вид уравнения ЛЛ с другим, чем в уравнении Ландау и Лифшица диссипативным слагаемым:

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = -\gamma[\mathbf{M}, \mathbf{H}_{\text{eff}}] + \lambda_{ik}(M^2)\mathbf{H}_{\text{eff}} \,, \tag{11}$$

где введено обозначение $\gamma(M^2) = -\gamma \approx -2|\mu_B|/\hbar$. Мы видим, что уравнение ЛЛ для намагниченности следует из уравнений Онсагера для случая ферромагнетика. Также из (11) следует, что релаксационное слагаемое имеет вид, который существенно отличается от слагаемого в форме ЛЛ [1]:

$$\mathbf{R}_{LL} = \frac{\lambda_L}{M_0^2}[\mathbf{M},[\mathbf{M}, \mathbf{H}_{\text{eff}}]] \,. \tag{12}$$

Из выражения (11) также следует вывод, что релаксационный член $\mathbf{R} = \lambda_{ik}(M^2)\mathbf{H}_{\text{eff}}$ необходимо строить в виде разложения по степеням эффективного магнитного поля, а диссипативную функцию ферромагнетика — по квадратичным степеням. Для конкретного построения важную роль играет разделение слагаемых в диссипативной функции на слагаемые обменной природы и релятивистской. Такая модель описания релаксации в уравнении Ландау–Лифшица была впервые предложена в работе [11] и полностью построена в работах [12,13].

Согласно данной модели, выражение для диссипативной функции, учитывая (3) и (5), можно представить в следующем виде:

$$Q = -\frac{dF}{dt} = \int \mathbf{H}_{\text{eff}} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} dV . \qquad (13)$$

Релаксационное слагаемое в линейном по $\mathbf{H}_{\text{eff}}$ приближении будет иметь вид

$$\mathbf{R} = \lambda \mathbf{H}_{\text{eff}} - \lambda_{ik}^{\text{ex}} \frac{\partial^2 \mathbf{H}_{\text{eff}}}{\partial x_i \partial x_k} . \qquad (14)$$

В этой формуле λ и λ_{ik}^{ex} — некоторые релаксационные тензоры в спиновом пространстве. Из закона сохранения полного магнитного момента в обменном приближении следует, что релаксационный тензор λ обусловлен только релятивистскими взаимодействиями, а тензор λ_{ik}^{ex} определяется обменным взаимодействием [11].

Подставляя в (11) вместо $\partial\mathbf{M}/\partial t$ его значение из уравнения (11), легко найти:

$$Q = \int \mathbf{H}_{\text{eff}} \mathbf{R} \, dV . \qquad (15)$$

Используя полученное выражение для релаксационного слагаемого, можно представить диссипативную функцию в виде

$$Q = \int q dV ,$$

где q — плотность диссипативной функции, которая имеет вид [12,13]:

$$q = \frac{1}{2} \lambda H_{i\,\text{eff}} H_{i\,\text{eff}} + \frac{1}{2} \lambda_{ik}^{\text{ex}} \frac{\partial \mathbf{H}_{\text{eff}}}{\partial x_i} \frac{\partial \mathbf{H}_{\text{eff}}}{\partial x_k} . \qquad (16)$$

Следуя основным принципам построения диссипативной функции, сформулированным Ландау в своих работах (см. [5]), вид тензоров λ и λ_{ik}^{ex} должен определяться симметрией кристалла. Отметим, что при этом необходимо учитывать законы сохранения для компонент намагниченности, которые могут иметь место для данного вида симметрии [12,13].

Использование в уравнении ЛЛ релаксационного слагаемого в форме (14), построенного на основе диссипативной функции (16), дает возможность корректно описывать диссипативные процессы в тех случаях, когда не работает слагаемое в форме Ландау–Лифшица. Приведем для примера результаты, полученные в работах [12,13] для случая ферромагнетика одноосной симметрии, в котором имеют место вырожденные основные состояния.

Из таблицы 1 видно, что результаты, полученные при использовании релаксационного слагаемого в форме Ландау–Лифшица, приводят к возникновению физического противоречия. В то время как в фазе «легкая ось» все спиновые волны хорошо определены, в основных состояниях «легкая плоскость» и «угловая фаза» спиновые волны с волновым вектором $k \to 0$ становятся абсолютно затухающими. Это противоречие означает, что релаксационный член в форме Ландау–Лифшица не описывает релаксацию для состояний с непрерывным

Таблица 1. Законы дисперсии спиновых волн с учетом затухания в одноосном ферромагнетике

Основное состояние	Затухание по Ландау–Лифшицу	Затухание в форме (14)
«легкая ось» $K_1 + K_2 M_0^2 > 0$	$\omega_{SW} = i\lambda_L \Omega \pm \gamma M_0 \Omega$	$\omega_{SW} = -i(\lambda_{11} + \lambda^{\text{ex}} k^2)\Omega \pm \gamma M_0 \Omega$
«легкая плоскость» $K_2 < 0$	$\omega_{SW} = \frac{i}{2}\lambda_L(\Omega_1 + \Omega_2) \pm$ $\pm \frac{1}{2}\sqrt{4\gamma^2 M_0^2 \Omega_1 \Omega_2 - \lambda_L^2 K_1^2}$	$\omega_{SW} = -\frac{i}{2}((\lambda_{11}^r + \lambda^{\text{ex}} k^2)\Omega_1 + \lambda^{\text{ex}} k^2 \Omega_2) \pm$ $\pm \frac{1}{2}\sqrt{4\gamma^2 M_0^2 \Omega_1 \Omega_2 - [(\lambda_{11}^r + \lambda^{\text{ex}} k^2)\Omega_1 - \lambda^{\text{ex}} k^2 \Omega_2]^2}$
«угловая фаза» $K_1 < 0$, $0 < K_1 < -K_2 M_0^2$	$\omega_{SW} = \frac{i}{2}\lambda_L(\Omega_1 + \Omega_3) \pm$ $\pm\sqrt{\gamma^2 M_0^2 \Omega_1 \Omega_3 - \lambda_L^2 K_1^2 \sin^4\theta}$	$\omega_{SW} = -\frac{i}{2}\left[2(\lambda_{11}^r + \lambda^{\text{ex}} k^2)\Omega_1 + \lambda^{\text{ex}} k^2 \Omega_4 - (\lambda_{11}^r \sin^2\theta + \lambda^{\text{ex}} k^2)\frac{\Omega_1 \Omega_4}{\Omega_3}\right] \pm$ $\pm \gamma M_0 \sqrt{\Omega_1 \Omega_3}$

Примечание: Здесь введены следующие обозначения: $\Omega = (\alpha k^2 + K_1 + K_2 M_0^2)$, $\Omega_1 = \alpha k^2$, $\Omega_2 = (\alpha k^2 - K_1)$, $\Omega_3 = \alpha k^2 + 2K_1 \sin^2\theta$, $\Omega_4 = (\alpha k^2 + 2K_1)$, где K_1, K_2 — константы магнитной анизотропии одноосного ферромагнетика, α — постоянная неоднородного обменного взаимодействия, θ — угол между «легкой осью» и направлением магнитного момента.

параметром вырождения. Именно таковыми являются состояния для фаз «легкая плоскость» и «угловая фаза», в то время как использование релаксационного слагаемого в форме (14) позволяет правильно описывать затухание спиновых волн в ферромагнетиках с вырожденными основными состояниями.

Изложенные выше соображения показывают, что использование общей теории кинетических уравнений Онсагера позволяет построить модель диссипативной функции ферромагнетика и соответствующее релаксационное слагаемое в уравнении Ландау–Лифшица.

Отметим также, что обсужденные в этой работе идеи позволяют построить диссипативные функции ферритов [14], антиферромагнетиков [15] и даже парамагнетиков [15]. Важно отметить, что во всех этих различных магнитных материалах «срабатывают» эффективные магнитные поля, впервые введенные Ландау и Лифшицем.

Работа выполнена при поддержке проекта Национальной академии наук Украины (№0112U001009).

1. L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Phys. Zs. Sowjet.* **8**, 153 (1935).
2. А.Е. Боровик, В.Н. Робук, *Теор. и мат. физика*, **46**, №3, 371 (1981).
3. E.K. Sklyanin, *Preprint LOMI E-3-79*, Leningrad (1979).
4. Л.А. Тахтаджян, Л.Д. Фаддеев, *Гамильтонов подход в теории солитонов*, Наука, Москва (1967).
5. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Механика*, Наука, Москва (1988).
6. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Теория упругости*, Наука, Москва (1987).
7. F. Dyson, *Phys. Rev*. **102**, 1217 (1956).
8. А. Малоземов, Дж. Слончевский, *Доменные стенки в материалах с цилиндрическими магнитными доменами*, Мир, Москва (1982).
9. L. Onsager, *Phys. Rev*. **38**, 2265 (1931).
10. Л.Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика*, Наука, Москва (1982).
11. В.Г. Барьяхтар, *ЖЭТФ* **87**, 1501 (1984).
12. В.Г. Барьяхтар, А.Г. Данилевич, *ФНТ* **32**, 1010 (2006) [*Low Temp. Phys.* **32**, 768 (2006)].
13. В.Г. Барьяхтар, А.Г. Данилевич, *ФНТ* **39**, 1279 (2013) [*Low Temp. Phys.* **39**, 993 (2013)].
14. В.Г. Барьяхтар, В.И. Бутрим, Б.А. Иванов, *Письма в ЖЭТФ*, **98**, 289 (2013).
15. В.Г. Барьяхтар, Б.А. Иванов, В.М. Криворучко, А.Г. Данилевич, *Современные проблемы динамики намагниченности: от основ до сверхбыстрой релаксации*, ПФ «Хімджест», Киев (2013).

Dissipative function of the ferromagnet and the theory of Onsager's kinetic equations

V.G. Baryakhtar and A.G. Danilevich

It is shown that the use of the general theory of kinetic equations of the Onsager allow us to construct a model of a ferromagnet dissipation function and the corresponding relaxation term in the Landau–Lifshitz equation. The model of construction of the dissipative function of ferromagnetic materials of different symmetry is presented. The fundamental role of the effective magnetic field, that was introduced by Landau and Lifshitz, is shown.

PACS: **76.20.+q** General theory of resonances and relaxations ;
75.25.+z Spin arrangements in magnetically ordered materials.

Keywords: dynamics of the magnetic moment, spin wave relaxation, dissipative function, dispersion law.