



УДК 681.3:519.711.3:517.958:621.313

В. Ф. Евдокимов*, чл.-кор. НАН Украины, **А. А. Кучаев****, д-р техн. наук,
Е. И. Петрушенко*, канд. техн. наук, **Г.И. Касьян*****

*Ин-т проблем моделирования в энергетике им. Г.Е. Пухова НАН Украины
(Украина, 03164, Киев, ул. Генерала Наумова, 15,
тел. 424-91-60, E-mail: ipme@ipme.kiev.ua),

** Физико-технологический ин-т металлов и сплавов НАН Украины
(Украина, 03680, Киев-142, ГСП, бульв. Вернадского, 34/1,
тел. (044) 424-20-50, E-mail: metal@ptima.kiev.ua),

***ЗАО "Донецкий электрометаллургический завод"
(Украина, 83062, Донецк, ул. И. Ткаченко, 122,
тел. (0622) 61-23-23, E-mail: kasyan@istil.com.ua)

Двумерная интегральная модель распределения синусоидальных вихревых токов и электродинамических усилий в кристаллизаторе с явнополюсным электромагнитным перемешивателем

Разработана двумерная интегральная модель распределения вихревых токов и электродинамических усилий в кристаллизаторе машины непрерывного литья заготовок, оснащенной явнополюсным электромагнитным перемешивателем. В модели учтена характерная особенность электромагнитных процессов в системе кристаллизатор — электромагнитный перемешиватель, а именно наличие сильных магнитных полей рассеяния. Возможность моделирования магнитного поля в локальной области, в данном случае в сечении заготовки, — важное преимущество предложенной модели. Модель реализуется с помощью блочного алгоритма.

Розроблено двовимірну інтегральну модель розподілу вихрових струмів та електродинамічних зусиль в кристалізаторі машини безперервного лиття заготовок, оснащеному явнополюсним електромагнітним перемішувачем. У моделі враховано характерну особливість електромагнітних процесів в системі кристалізатор — електромагнітний перемішувач, а саме наявність сильних магнітних полів розсіювання. Можливість моделювання магнітного поля в локальній області, в данному випадку в перерізі заготовки, є важливою перевагою запропонованої моделі. Модель реалізовано за допомогою блочного алгоритму.

К л ю ч е в ы е с л о в а: интегральная модель, симметричные составляющие, блочный метод, парное исключение, электромагнитный перемешиватель, кристаллизатор.

Важным классом электротехнических устройств с жидкими проводниками являются системы электромагнитного воздействия на жидкий металл, используемые в сталеплавильном производстве. Это, в частности, электромагнитные перемешиватели (ЭМП) металла в машинах непрерывного литья заготовок (МНЛЗ). ЭМП позволяют ускорить процессы производства и раз-

ливки стали, улучшить качество поверхности и сердцевины слитка, уменьшить число прорывов. Электродинамические усилия (ЭДУ), приводящие в движение сталь при этом виде перемешивания, возникают в результате взаимодействия вихревых токов (ВТ) в жидкой стали и вращающегося или бегущего магнитного поля статора ЭМП [1—3].

Выбор параметров ЭМП для МНЛЗ фирмы АВВ (Швеция, Канада), Danieli Rotelec (Франция), АХК ВНИИМЕТМАШ выполняют с помощью физического и математического моделирования процессов, протекающих в жидкой стали [4—7].

Характерной особенностью электромагнитных процессов в системе кристаллизатор МНЛЗ—ЭМП являются сильные магнитные поля рассеивания. Для их учета при применении метода конечных элементов (МКЭ) или метода конечных разностей (МКР) необходимо выбирать диаметр расчетной области в несколько раз больший, чем диаметр моделируемой системы. Существенно усложняется расчет поля по МКЭ и МКР в этих устройствах вследствие скачков проводимости и магнитной проницаемости среды в расчетной области. По МКЭ магнитное поле рассчитывают во всех узлах сетки, покрывающей расчетную область, хотя необходимости в столь полной информации нет. В действительности, для определения поля скоростей в объеме жидкого металла необходимо знать распределение ЭДУ только в этом объеме. Указанных недостатков лишен метод интегральных уравнений (МИУ), позволяющий определять магнитное поле токов в проводниках и токов намагниченности на границах магнитопровода ЭМП.

С помощью этих уравнений магнитное поле в системе кристаллизатор — ЭМП моделируется в два этапа: на первом — решается система интегро-дифференциальных уравнений с дополнительными условиями, на втором — по полученному распределению тока вычисляется магнитное поле в сечении заготовки, т.е. в той области, в которой необходимо знать распределение ЭДУ. Возможность моделирования магнитного поля в локальной области, в данном случае в сечении заготовки, — важное преимущество предложенной модели по сравнению с конечно-разностными и конечно-элементными моделями.

В работах [8, 9] предложена двумерная интегро-дифференциальная модель распределения ВТ и ЭДУ в системе кристаллизатор — ЭМП МНЛЗ. В работе [10] представлен блочный алгоритм реализации этой модели. В упомянутых работах рассмотрен ЭМП с неявновыраженными полюсами, однако при непрерывной разливке стали широко применяются ЭМП с явновыраженными полюсами.

Попытаемся обобщить блочный алгоритм, представленный в [10], на случай ЭМП с явновыраженными полюсами. Суть предлагаемого обобще-

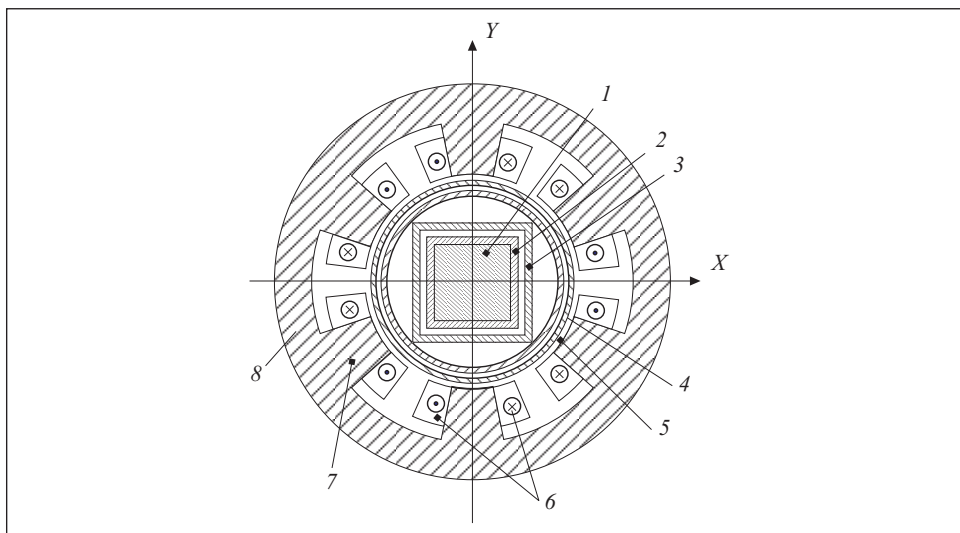


Рис. 1. Сечение конструкции системы кристаллизатор — ЭМП: 1 — заготовка, 2 — гильза; 3 — обечайка; 4 — наружный корпус кристаллизатора; 5 — защитный кожух ЭМП; 6 — обмотка ЭМП; 7 — полюсной наконечник; 8 — ярмо ЭМП

ния состоит в следующем. Сплошное сечение магнитной системы ЭМП с явно выраженными полюсами (рис. 1) представляется в виде следующих изолированных один от другого элементов: ярма кольцевого сечения и шести полюсных наконечников. Причем железо ярма и полюсов ограничено линиями, совпадающими с осями координат цилиндрической системы (рис. 2).

В основе разработанного алгоритма лежит разложение электромагнитного поля в сечении системы на симметричные составляющие (СС). Результирующее распределение ВТ в сечении системы представляет собой сумму двух СС, для каждой из которых получена система интегральных уравнений (СИУ), более простая, чем исходная СИУ для результирующего распределения ВТ, поскольку областью определения в ней есть не все сечение, а его часть, находящаяся в первом квадранте.

Для каждой СС рассчитываем распределение ВТ, токов намагниченности (ТН), вектора магнитной индукции (ВМИ). Суммируя полученные величины ВТ, ТН и ВМИ, находим их распределение. По полученным значениям ВТ и ВМИ в сечении заготовки находим ЭДУ. При расчете распределения ВТ, ТН и ВМИ для каждой СС учитываем то обстоятельство, что одна из составляющих сечения есть кольцо, внутренняя и наружная границы которого являются окружностями. Интегральное уравнение (ИУ) для плотности ТН в этом случае упрощается и имеет аналитическое решение, равное правой части уравнения.

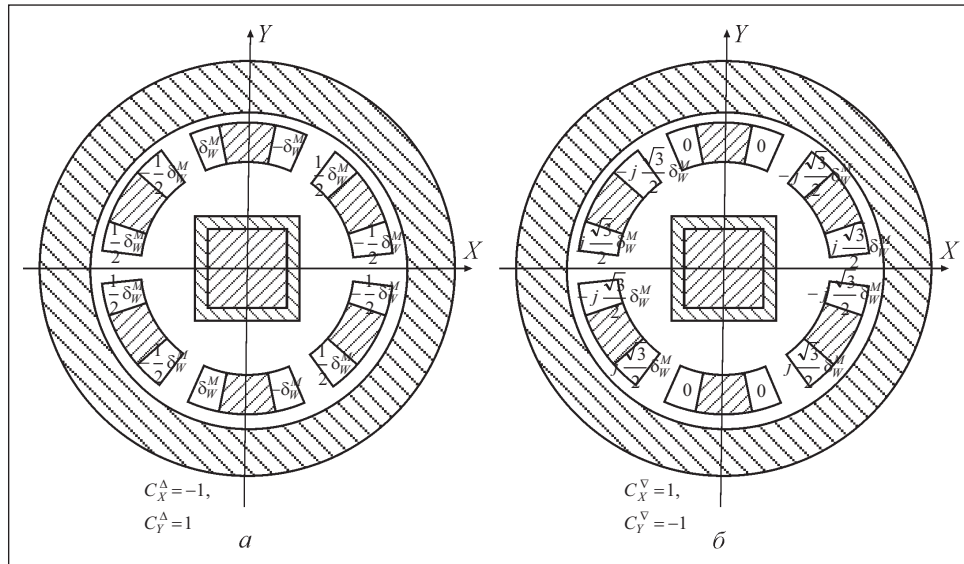


Рис. 2. Распределение плотности токов в обмотках ЭМП для первой (а) и второй (б) симметричных составляющих электромагнитного поля

При решении системы алгебраических уравнений (САУ), аппроксимирующей СИУ, предлагается предварительно упростить ее путем последовательного парного исключения вектор-столбцов плотностей ТН и к полученной таким образом САУ применить блочный метод Гаусса. Такой подход позволяет значительно уменьшить число операций для получения решения. Это объясняется тем, что матрица исходной САУ содержит много нулевых элементов (46 при общем числе элементов 100). Исключить их из вычислительного процесса при использовании стандартных программ, реализующих блочный метод Гаусса, не представляется возможным. Существенно сократить число нулевых элементов в вычислительном процессе позволяет предварительное преобразование САУ последовательным парным исключением вектор-столбцов плотностей ТН. Тогда блочный метод Гаусса может быть применен к САУ, матрица которой содержит четыре нулевых элемента (при общем числе элементов 16).

Разработанная модель распределения синусоидальных ВТ и ЭДУ в системе кристаллизатор МНЛЗ — явнополюсный ЭМП может быть использована как для квадратных, так и для круглых заготовок при совпадении осей сечений обмоток с осью симметрии сечения заготовки.

Конструктивное исполнение системы кристаллизатор — явнополюсный ЭМП и исходные данные. На рис. 1 показано сечение системы плоскостью xOy декартовой системы координат xOz (ось z совмещена с

осью системы, а оси x и y — с осями симметрии сечения). Как и в [10], будем рассматривать алгоритм на примере упрощенной системы кристаллизатор — ЭМП, в которой отсутствуют обечайка, корпус, арматура. Сечение обмотки плоскостью xOy обозначим D_W . В обмотке ЭМП шесть одинаковых катушек. Каждая фаза состоит из двух катушек, соединенных последовательно. Сечение обмотки i -й фазы обозначим D_W^i ($i = 1, 2, 3$ — номер фазы). Оно состоит из четырех сечений D_W^{ij} ($j = 1, 2, 3, 4$), причем сечения D_W^{i1} и D_W^{i2} принадлежат первой катушке i -й фазы, сечения D_W^{i3} и D_W^{i4} — второй катушке i -й фазы.

Учитывая способ намотки, положительное направление тока выбираем по оси z в сечениях $D_W^{11}, D_W^{13}, D_W^{21}, D_W^{23}, D_W^{31}, D_W^{33}$. Считаются заданными токи в витках катушек обмотки. Предполагаем, что фазные токи образуют симметричную трехфазную систему. Следовательно, при принятых положительных направлениях токи в витках катушек первой, второй и третьей фаз имеют вид

$$i_1(t) = I_m \sin \omega t, \quad i_2(t) = I_m \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right), \quad i_3(t) = I_m \sin \left(\omega t + \frac{2\pi}{3} \right),$$

где $\omega = 2\pi f$; f — частота токов; I_m — амплитуда фазных токов.

В модели использованы комплексные амплитуды средней плотности токов в частях сечений катушек, выраженные через комплексные амплитуды заданных токов в витках катушек, число витков в катушках и площадь S сечения D_W^{ij} .

Запишем комплексные амплитуды фазных токов в алгебраической форме:

$$\dot{I}_1 = I_m; \quad \dot{I}_2 = I_m e^{-j\frac{2\pi}{3}} = I_m \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right); \quad \dot{I}_3 = I_m e^{j\frac{2\pi}{3}} = I_m \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

Комплексные амплитуды средней плотности тока $\dot{\delta}_W^{ij}$ в D_W^{ij} , $j = 1, 2, 3, 4$, $i = 1, 2, 3$ запишем в следующем виде:

для сечений $D_W^{11} \div D_W^{14}$

$$\dot{\delta}_W^{11} = \delta_W^M; \quad \dot{\delta}_W^{12} = -\delta_W^M; \quad \dot{\delta}_W^{13} = \delta_W^M; \quad \dot{\delta}_W^{14} = -\delta_W^M;$$

для сечений $D_W^{21} \div D_W^{24}$

$$\dot{\delta}_W^{21} = \delta_W^M \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right); \quad \dot{\delta}_W^{22} = -\delta_W^M \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right);$$

$$\dot{\delta}_W^{23} = \delta_W^M \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right); \quad \dot{\delta}_W^{24} = -\delta_W^M \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right);$$

для сечений $D_W^{31} \div D_W^{34}$

$$\begin{aligned} \dot{\delta}_W^{31} &= \delta_W^M \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right); \quad \dot{\delta}_W^{32} = -\delta_W^M \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right); \\ \dot{\delta}_W^{33} &= \delta_W^M \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right); \quad \dot{\delta}_W^{34} = -\delta_W^M \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right). \end{aligned}$$

Здесь $\delta_W^M = \frac{I_m W}{S}$; W — число витков в катушке; S — площадь сечения D_W^{ij} , $j=1, 2, 3, 4$, $i=1, 2, 3$.

Введем следующие обозначения:

$D_C = D_g \cup D_S$ — сечение всех массивных проводников; D_M — сечение сплошного магнитопровода ЭМП с явно выраженными полюсами; D_{MC} — сечение кольцевого ярма; D_{M0} — сечения полюсов. Внутренней границей сечения кольцевого ярма D_{MC} является окружность L^- с радиусом R^- , а внешней границей — окружность L^+ с радиусом R^+ ; D^- — область, ограниченная контуром L^- ; D^+ — неограниченная область, окружающая магнитопровод, внутренней границей которой является окружность L^+ ; $L^0 = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 L^{0ij}$ — граница сечений шести полюсов, где L^{0ij} — граница j -го полюса i -й фазы; $D = D_W \cup D_C$ — сечение обмоток и массивных проводников; граница между заготовкой и гильзой — идеально проводящая; удельные проводимости материалов заготовки γ_s , гильзы γ_g считаем заданными; проводимость материала магнитопровода γ_M полагаем равной нулю; магнитная проницаемость материала магнитопровода $\mu_M = \text{const}$ задана; частота f токов в обмотках ЭМП может изменяться в интервале $3 \leq f \leq 6$ Гц.

Система ИУ для комплексной амплитуды плотности вихревых токов в сечении гильзы и заготовки. Система ИДУ и дополнительных условий для мгновенной плотности вихревых токов в сечении кристаллизатора с ЭМП [8] в комплексной форме для рассматриваемой конструкции имеет следующий вид:

уравнения —

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\delta}_g(Q)}{j\omega\lambda\gamma_g} + T_{gg}\dot{\delta}_g + T_{gs}\dot{\delta}_s + T_{gL^-}\dot{\sigma}_- + T_{gL^+}\dot{\sigma}_+ + T_{gL^0}\dot{\sigma}_0 = \\ = -T_{gW}\dot{\delta}_W + \frac{1}{j\omega\lambda} \dot{U}_{gs}, \quad Q \in D_g, \end{aligned}$$

$$T_{sg} \dot{\delta}_g + \frac{\dot{\delta}_s(Q)}{j\omega\lambda\gamma_s} + T_{ss} \dot{\delta}_s + T_{sL^-} \dot{\sigma}_- + T_{sL^+} \dot{\sigma}_+ + T_{sL^0} \dot{\sigma}_0 =$$

$$= -T_{sW} \dot{\delta}_W + \frac{1}{j\omega\lambda} \dot{U}_{gs} + \frac{1}{j\omega\lambda} np_Z [\overline{VB}], \quad Q \in D_s, \quad (1)$$

$$-P_{L^-g} \dot{\delta}_g - P_{L^-s} \dot{\delta}_s + \frac{\pi}{\chi} \dot{\sigma}_-(Q) - P_{L^-L^+} \dot{\sigma}_+ - P_{L^-L^0} \dot{\sigma}_0 = P_{L^-W} \dot{\delta}_W, \quad Q \in L^-,$$

$$-P_{L^+g} \dot{\delta}_g - P_{L^+s} \dot{\delta}_s - P_{L^+L^-} \dot{\sigma}_- + \frac{\pi}{\chi} \dot{\sigma}_+(Q) - P_{L^+L^0} \dot{\sigma}_0 = P_{L^+W} \dot{\delta}_W, \quad Q \in L^+,$$

$$-P_{L^0g} \dot{\delta}_g - P_{L^0s} \dot{\delta}_s - P_{L^0L^-} \dot{\sigma}_- - P_{L^0L^+} \dot{\sigma}_+ + \frac{\pi}{\chi} \dot{\sigma}_0(Q) - P_{L^0L^0} \dot{\sigma}_0 = P_{L^0W} \dot{\delta}_W, \quad Q \in L^0,$$

дополнительные условия —

$$\dot{I}_{s+g} = \int_{D_s \cup D_g} \dot{\delta}(M) ds_M = 0.$$

Здесь $\lambda = \mu_0 / 2\pi$; $\chi = \frac{\mu_M - \mu_0}{\mu_M + \mu_0}$; $\mathbf{B}(Q)$ — вектор магнитной индукции; $\mathbf{V}(Q)$ — вектор скорости; $\dot{\delta}_g, \dot{\delta}_s, \dot{\sigma}_-, \dot{\sigma}_+, \dot{\sigma}_0$ — искомые плотности вихревых токов в гильзе, заготовке и плотности токов намагниченности на контурах L^-, L^+, L^0 .

Смысл некоторых операторных выражений, входящих в уравнения (1), следующий:

$$T_{gg} \dot{\delta}_g = \int_{D_g} \delta(M) \ln \frac{1}{r_{QM}} ds_M, \quad Q \in D_g;$$

$$T_{gs} \dot{\delta}_s = \int_{D_s} \delta(M) \ln \frac{1}{r_{QM}} ds_M, \quad Q \in D_g;$$

$$T_{sg} \dot{\delta}_g = \int_{D_g} \delta(M) \ln \frac{1}{r_{QM}} ds_M, \quad Q \in D_s;$$

$$T_{ss} \dot{\delta}_s = \int_{D_s} \delta(M) \ln \frac{1}{r_{QM}} ds_M, \quad Q \in D_s; \quad (2)$$

$$P_{L^-g} \dot{\delta}_g = \int_{D_g} \delta(M) \frac{\cos(\bar{n}_Q \wedge \bar{r}_{QM})}{r_{QM}} ds_M, \quad Q \in L^-;$$

$$P_{L^-L^+} \dot{\sigma}_+ = \int_{L^+} \sigma(M) \frac{\cos(\bar{\mathbf{n}}_Q \wedge \bar{\mathbf{r}}_{QM})}{r_{QM}} dl_M, \quad Q \in L^-,$$

где \mathbf{n}_Q — нормаль в точке Q , положительное направление которой принято из железа в воздух; \mathbf{r}_{QM} — радиус-вектор, направленный из точки Q в точку M ; r_{QM} — расстояние между точками Q и M . Катушки в рассматриваемой установке расположены так, что ось симметрии первой катушки совпадает с осью симметрии сечения гильзы и заготовки. При этом, если сечение заготовки квадратное, то $\dot{U}_{gs} = 0$.

Разложение вихревых токов в сечении гильзы и заготовки на сумму двух симметричных составляющих, у каждой из которых оси x и y являются осями симметрии. Представим комплексные амплитуды средних плотностей токов в сечениях катушек в виде суммы двух симметричных составляющих:

$$\dot{\delta}_W^{11} = \dot{\Delta}_W^{11} + \dot{V}_W^{11} \text{ в } D_W^{11}, \text{ где } \dot{\Delta}_W^{11} = \delta_W^M, \dot{V}_W^{11} = 0;$$

$$\dot{\delta}_W^{12} = \dot{\Delta}_W^{12} + \dot{V}_W^{12} \text{ в } D_W^{12}, \text{ где } \dot{\Delta}_W^{12} = -\delta_W^M, \dot{V}_W^{12} = 0;$$

$$\dot{\delta}_W^{13} = (\dot{\Delta}_W^{13} + \dot{V}_W^{13}) \text{ в } D_W^{13}, \text{ где } \dot{\Delta}_W^{13} = \delta_W^M, \dot{V}_W^{13} = 0;$$

$$\dot{\delta}_W^{14} = \dot{\Delta}_W^{14} + \dot{V}_W^{14} \text{ в } D_W^{14}, \text{ где } \dot{\Delta}_W^{14} = -\delta_W^M, \dot{V}_W^{14} = 0;$$

$$\dot{\delta}_W^{21} = \dot{\Delta}_W^{21} + \dot{V}_W^{21} \text{ в } D_W^{21}, \text{ где } \dot{\Delta}_W^{21} = -\frac{1}{2}\delta_W^M, \dot{V}_W^{21} = -j\frac{\sqrt{3}}{2}\delta_W^M;$$

$$\dot{\delta}_W^{22} = \dot{\Delta}_W^{22} + \dot{V}_W^{22} \text{ в } D_W^{22}, \text{ где } \dot{\Delta}_W^{22} = \frac{1}{2}\delta_W^M, \dot{V}_W^{22} = j\frac{\sqrt{3}}{2}\delta_W^M;$$

$$\dot{\delta}_W^{23} = \dot{\Delta}_W^{23} + \dot{V}_W^{23} \text{ в } D_W^{23}, \text{ где } \dot{\Delta}_W^{23} = -\frac{1}{2}\delta_W^M, \dot{V}_W^{23} = -j\frac{\sqrt{3}}{2}\delta_W^M;$$

$$\dot{\delta}_W^{24} = \dot{\Delta}_W^{24} + \dot{V}_W^{24} \text{ в } D_W^{24}, \text{ где } \dot{\Delta}_W^{24} = \frac{1}{2}\delta_W^M, \dot{V}_W^{24} = j\frac{\sqrt{3}}{2}\delta_W^M;$$

$$\dot{\delta}_W^{31} = \dot{\Delta}_W^{31} + \dot{V}_W^{31} \text{ в } D_W^{31}, \text{ где } \dot{\Delta}_W^{31} = -\frac{1}{2}\delta_W^M, \dot{V}_W^{31} = j\frac{\sqrt{3}}{2}\delta_W^M;$$

$$\dot{\delta}_W^{32} = \dot{\Delta}_W^{32} + \dot{V}_W^{32} \text{ в } D_W^{32}, \text{ где } \dot{\Delta}_W^{32} = \frac{1}{2}\delta_W^M, \dot{V}_W^{32} = -j\frac{\sqrt{3}}{2}\delta_W^M;$$

$$\dot{\delta}_W^{33} = \dot{\Delta}_W^{33} + \dot{V}_W^{33} \text{ в } D_W^{33}, \text{ где } \dot{\Delta}_W^{33} = -\frac{1}{2}\delta_W^M, \dot{V}_W^{33} = j\frac{\sqrt{3}}{2}\delta_W^M;$$

$$\dot{\delta}_W^{34} = \dot{\Delta}_W^{34} + \dot{V}_W^{34} \text{ в } D_W^{34}, \text{ где } \dot{\Delta}_W^{34} = \frac{1}{2}\delta_W^M, \dot{V}_W^{34} = -j\frac{\sqrt{3}}{2}\delta_W^M.$$

Представим комплексные амплитуды искоемых величин, входящих в систему (1), в виде суммы двух составляющих:

$$\begin{aligned} \dot{\delta}_g &= \dot{\Delta}_g + \dot{V}_g, \quad \dot{\delta}_s = \dot{\Delta}_s + \dot{V}_s, \\ \dot{\sigma}_- &= \dot{\theta}_- + \dot{\xi}_-, \quad \dot{\sigma}_+ = \dot{\theta}_+ + \dot{\xi}_+, \quad \dot{\sigma}_0 = \dot{\theta}_0 + \dot{\xi}_0. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $\dot{\Delta}_g, \dot{\Delta}_s, \dot{\theta}_-, \dot{\theta}_+, \dot{\theta}_0$ — решение следующей системы уравнений (первая подзадача):

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\Delta}_g(Q)}{j\omega\lambda\gamma_g} + T_{gg}\dot{\Delta}_g + T_{gs}\dot{\Delta}_s + T_{gL^-}\dot{\theta}_- + T_{gL^+}\dot{\theta}_+ + T_{gL^0}\dot{\theta}_0 &= -T_{gW}\dot{\Delta}_W, Q \in D_g; \\ T_{sg}\dot{\Delta}_g + \frac{\dot{\Delta}_s(Q)}{j\omega\lambda\gamma_s} + T_{ss}\dot{\Delta}_s + T_{sL^-}\dot{\theta}_- + T_{sL^+}\dot{\theta}_+ + T_{sL^0}\dot{\theta}_0 &= -T_{sW}\dot{\Delta}_W, Q \in D_s; \\ -P_{L^-g}\dot{\Delta}_g - P_{L^-s}\dot{\Delta}_s + \frac{\pi}{\chi}\dot{\theta}_-(Q) - P_{L^-L^+}\dot{\theta}_+ - P_{L^-L^0}\dot{\theta}_0 &= P_{L^-W}\dot{\Delta}_W, Q \in L^-; \quad (4) \\ -P_{L^+g}\dot{\Delta}_g - P_{L^+s}\dot{\Delta}_s - P_{L^+L^-}\dot{\theta}_- + \frac{\pi}{\chi}\dot{\theta}_+(Q) - P_{L^+L^0}\dot{\theta}_0 &= P_{L^+W}\dot{\Delta}_W, Q \in L^+; \\ -P_{L^0g}\dot{\Delta}_g - P_{L^0s}\dot{\Delta}_s - P_{L^0L^-}\dot{\theta}_- - P_{L^0L^+}\dot{\theta}_+ + \frac{\pi}{\chi}\dot{\theta}_0(Q) - P_{L^0L^0}\dot{\theta}_0 &= P_{L^0W}\dot{\Delta}_W, Q \in L^0. \end{aligned}$$

Слагаемые $\dot{V}_g, \dot{V}_s, \dot{\xi}_-, \dot{\xi}_+, \dot{\xi}_0$ в (3) являются решением следующей системы уравнений (вторая подзадача):

$$\begin{aligned} \frac{\dot{V}_g(Q)}{j\omega\lambda\gamma_g} + T_{gg}\dot{V}_g + T_{gs}\dot{V}_s + T_{gL^-}\dot{\xi}_- + T_{gL^+}\dot{\xi}_+ + T_{gL^0}\dot{\xi}_0 &= -T_{gW}\dot{V}_W, Q \in D_g; \\ T_{sg}\dot{V}_g + \frac{\dot{V}_s(Q)}{j\omega\lambda\gamma_s} + T_{ss}\dot{V}_s + T_{sL^-}\dot{\xi}_- + T_{sL^+}\dot{\xi}_+ + T_{sL^0}\dot{\xi}_0 &= -T_{sW}\dot{V}_W, Q \in D_s; \\ -P_{L^-g}\dot{V}_g - P_{L^-s}\dot{V}_s + \frac{\pi}{\chi}\dot{\xi}_-(Q) - P_{L^-L^+}\dot{\xi}_+ - P_{L^-L^0}\dot{\xi}_0 &= P_{L^-W}\dot{V}_W, Q \in L^-; \quad (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -P_{L^+g} \dot{\nabla}_g - P_{L^+s} \dot{\nabla}_s - P_{L^+L^-} \dot{\xi}_- + \frac{\pi}{\chi} \dot{\xi}_+(Q) - P_{L^+L^0} \dot{\xi}_0 = P_{L^+W} \dot{\nabla}_W, Q \in L^+; \\
 & -P_{L^0g} \dot{\nabla}_g - P_{L^0s} \dot{\nabla}_s - P_{L^0L^-} \dot{\xi}_- - P_{L^0L^+} \dot{\xi}_+ + \frac{\pi}{\chi} \dot{\xi}_0(Q) - P_{L^0L^0} \dot{\xi}_0 = P_{L^0W} \dot{\nabla}_W, Q \in L^0.
 \end{aligned}$$

Введем обозначения: M — точка с координатами x_M, y_M ; M_x — точка с координатами x_M, y_M ; M_y — точка с координатами $x_M, -y_M$; M_{xy} — точка с координатами $-x_M, -y_M$. Запишем следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
 \dot{\Delta}_W(M) &= -\dot{\Delta}_W(M_x), \quad \dot{\Delta}_W(M) = \dot{\Delta}_W(M_y); \\
 \dot{\Delta}_W(M) &= -\dot{\Delta}_W(M_{xy}), \quad \dot{\nabla}_W(M) = \dot{\nabla}_W(M_x); \\
 \dot{\nabla}_W(M) &= -\dot{\nabla}_W(M_y), \quad \dot{\nabla}_W(M) = -\dot{\nabla}_W(M_{xy}).
 \end{aligned} \tag{6}$$

В распределении вихревых токов в сечениях массивных проводников используем те же соотношения симметрии, что и в распределении токов по сечению обмотки. Запишем их, например, для комплексных амплитуд плотности вихревых токов $\dot{\Delta}_g$ и для $\dot{\nabla}_g$:

$$\begin{aligned}
 \dot{\Delta}_g(M) &= -\dot{\Delta}_g(M_x), \quad \dot{\Delta}_g(M) = \dot{\Delta}_g(M_y); \\
 \dot{\Delta}_g(M) &= -\dot{\Delta}_g(M_{xy}), \quad \dot{\nabla}_g(M) = \dot{\nabla}_g(M_x); \\
 \dot{\nabla}_g(M) &= -\dot{\nabla}_g(M_y), \quad \dot{\nabla}_g(M) = -\dot{\nabla}_g(M_{xy}).
 \end{aligned} \tag{7}$$

Преобразуя уравнения (4) и (5) с учетом соотношений (6), сужаем расчетную область в них до частей сечений элементов, лежащих в первом квадранте. Система (4) преобразуется к следующим уравнениям:

$$\begin{aligned}
 \frac{\dot{\Delta}_{g1}(Q)}{j\omega\lambda\gamma_g} + T_{g1g1}^\Delta \dot{\Delta}_{g1} + T_{g1s1}^\Delta \dot{\Delta}_{s1} + T_{g1L^-1}^\Delta \dot{\theta}_{-1} + T_{g1L^+1}^\Delta \dot{\theta}_{+1} + \\
 + T_{g1L^01}^\Delta \dot{\theta}_{01} = -T_{g1W1}^\Delta \dot{\Delta}_{W1}, \quad Q \in D_{g1},
 \end{aligned} \tag{8}$$

где $T_{g1W1}^\Delta \dot{\Delta}_{W1} = T_{g1W1}^\Delta (\Delta_{W1}^{\text{Re}} + j\Delta_{W1}^{\text{Im}}) = T_{g1W1}^\Delta \Delta_{W1}^{\text{Re}} + jT_{g1W1}^\Delta \Delta_{W1}^{\text{Im}} = T_{g1W1}^\Delta \Delta_{W1}^{\text{Re}}$;

$$\begin{aligned}
 T_{s1g1}^\Delta \dot{\Delta}_{g1} + \frac{\dot{\Delta}_{s1}(Q)}{j\omega\lambda\gamma_s} + T_{s1s1}^\Delta \dot{\Delta}_{s1} + T_{s1L^-1}^\Delta \dot{\theta}_{-1} + T_{s1L^+1}^\Delta \dot{\theta}_{+1} + \\
 + T_{s1L^01}^\Delta \dot{\theta}_{01} = -T_{s1W1}^\Delta \dot{\Delta}_{W1}, \quad Q \in D_{s1},
 \end{aligned} \tag{9}$$

где $T_{s1W1}^\Delta \dot{\Delta}_{W1} = T_{s1W1}^\Delta (\Delta_{W1}^{\text{Re}} + j\Delta_{W1}^{\text{Im}}) = T_{s1W1}^\Delta \Delta_{W1}^{\text{Re}} + jT_{s1W1}^\Delta \Delta_{W1}^{\text{Im}} = T_{s1W1}^\Delta \Delta_{W1}^{\text{Re}}$;

$$-P_{L^{-1}g1}^{\Delta} \dot{\Delta}_{g1} - P_{L^{-1}s1}^{\Delta} \dot{\Delta}_{s1} + \frac{\pi}{\chi} \dot{\theta}_{-1} - P_{L^{-1}L^{+1}}^{\Delta} \dot{\theta}_{+1} - P_{L^{-1}L^{01}}^{\Delta} \dot{\theta}_{01} = P_{L^{-1}W1}^{\Delta} \dot{\Delta}_{W1}, Q \in L^{-}, \quad (10)$$

где $P_{L^{-1}W1}^{\Delta} \dot{\Delta}_{W1} = P_{L^{-1}W1}^{\Delta} (\Delta_{W1}^{\text{Re}} + j\Delta_{W1}^{\text{Im}}) = P_{L^{-1}W1}^{\Delta} \Delta_{W1}^{\text{Re}} + jP_{L^{-1}W1}^{\Delta} \Delta_{W1}^{\text{Im}} = P_{L^{-1}W1}^{\Delta} \Delta_{W1}^{\text{Re}}$;

$$-P_{L^{+1}g1}^{\Delta} \dot{\Delta}_{g1} - P_{L^{+1}s1}^{\Delta} \dot{\Delta}_{s1} - P_{L^{+1}L^{-1}}^{\Delta} \dot{\theta}_{-1} + \frac{\pi}{\chi} \dot{\theta}_{+1} - P_{L^{+1}L^{01}}^{\Delta} \dot{\theta}_{01} =$$

$$= P_{L^{+1}W1}^{\Delta} \dot{\Delta}_{W1}, Q \in L^{+1}, \quad (11)$$

где $P_{L^{+1}W1}^{\Delta} \dot{\Delta}_{W1} = P_{L^{+1}W1}^{\Delta} (\Delta_{W1}^{\text{Re}} + j\Delta_{W1}^{\text{Im}}) = P_{L^{+1}W1}^{\Delta} \Delta_{W1}^{\text{Re}} + jP_{L^{+1}W1}^{\Delta} \Delta_{W1}^{\text{Im}} = P_{L^{+1}W1}^{\Delta} \Delta_{W1}^{\text{Re}}$;

$$-P_{L^{01}g1}^{\Delta} \dot{\Delta}_{g1} - P_{L^{01}s1}^{\Delta} \dot{\Delta}_{s1} - P_{L^{01}L^{-1}}^{\Delta} \dot{\theta}_{-1} - P_{L^{01}L^{+1}}^{\Delta} \dot{\theta}_{+1} + \frac{\pi}{\chi} \dot{\theta}_{01}(Q) - P_{L^{01}L^{01}}^{\Delta} \dot{\theta}_{01} =$$

$$= P_{L^{01}W1}^{\Delta} \dot{\Delta}_{W1}, Q \in L^{01}, \quad (12)$$

где $P_{L^{01}W1}^{\Delta} \dot{\Delta}_{W1} = P_{L^{01}W1}^{\Delta} (\Delta_{W1}^{\text{Re}} + j\Delta_{W1}^{\text{Im}}) = P_{L^{01}W1}^{\Delta} \Delta_{W1}^{\text{Re}} + jP_{L^{01}W1}^{\Delta} \Delta_{W1}^{\text{Im}} = P_{L^{01}W1}^{\Delta} \Delta_{W1}^{\text{Re}}$.

Здесь

$$T_{q_i m_j}^{\Delta} \dot{\Delta}_{m_j} = \int_{D_{m_j}} \dot{\Delta}_{m_j}(M) T^{\Delta}(Q, M) ds_M, Q \in D_{q_i},$$

$$q_i \in c = \{g1; s1\}, 1 \leq i \leq 2; m_j \in d = \{g1; s1; W1\}, 1 \leq j \leq 3;$$

$$T^{\Delta}(Q, M) = T_{xy}^{\Delta}(Q, M) = T_x^{\Delta}(Q, M) + c_y^{\Delta} T_x^{\Delta}(Q, M_y),$$

$$T_x^{\Delta}(Q, M) = T_0(Q, M) + c_x^{\Delta} T_0(Q, M_x),$$

$$T_x^{\Delta}(Q, M_y) = T_0(Q, M_y) + c_x^{\Delta} T_0(Q, M_{xy});$$

$$T_0(Q, M) = \ln 1/r_{QM}, T_0(Q, M_x) = \ln 1/r_{QM_x}, T_0(Q, M_y) = \ln 1/r_{QM_y},$$

$$T_0(Q, M_{xy}) = \ln 1/r_{QM_{xy}}; r_{QM} = \sqrt{(x_M - x_Q)^2 + (y_M - y_Q)^2},$$

$$r_{QM_x} = \sqrt{(-x_M - x_Q)^2 + (y_M - y_Q)^2}, r_{QM_y} = \sqrt{(x_M - x_Q)^2 + (-y_M - y_Q)^2},$$

$$r_{QM_{xy}} = \sqrt{(-x_M - x_Q)^2 + (-y_M - y_Q)^2};$$

$$c_x^{\Delta} = -1, c_y^{\Delta} = 1;$$

D_{W1}, D_{g1}, D_{s1} — части сечения обмотки, гильзы и заготовки, лежащие в первом квадранте;

$$T_{q_i L_j}^\Delta \dot{\theta}_{L_j} = \int_{L_j} \dot{\theta}_{L_j}(M) T^\Delta(Q, M) dl_M, Q \in D_{q_i},$$

$$q_i \in c, 1 \leq i \leq 2; L_j \in \Lambda = \{L^{-1}; L^{+1} L^{01}\}, 1 \leq j \leq 3;$$

$L^{-1}; L^{+1} L^{01}$ — части контуров $L^-; L^+ L^0$, лежащие в первом квадранте;

$$P_{L_i m_j}^\Delta \dot{\Delta}_{m_j} = \int_{\Delta_{m_j}} \dot{\Delta}_{m_j}(M) P^\Delta(Q, M) ds_M, Q \in L_i,$$

$$L_i \in \Lambda, 1 \leq i \leq 2; m_j \in d, 1 \leq j \leq 3;$$

$$P^\Delta(Q, M) = P_{xy}^\Delta(Q, M) = P_x^\Delta(Q, M) + c_y^\Delta P_x^\Delta(Q, M_y),$$

$$P_x^\Delta(Q, M) = P_0(Q, M) + c_x^\Delta P_0(Q, M_x),$$

$$P_x^\Delta(Q, M_y) = P_0(Q, M_y) + c_x^\Delta P_0(Q, M_{xy});$$

$$P_0(Q, M) = \frac{\cos(\bar{n}_Q, \bar{r}_{QM})}{r_{QM}}, P_0(Q, M_x) = \frac{\cos(\bar{n}_Q, \bar{r}_{QM_x})}{r_{QM_x}},$$

$$P_0(Q, M_y) = \frac{\cos(\bar{n}_Q, \bar{r}_{QM_y})}{r_{QM_y}}, P_0(Q, M_{xy}) = \frac{\cos(\bar{n}_Q, \bar{r}_{QM_{xy}})}{r_{QM_{xy}}}.$$

Преобразуя уравнения (5) с учетом симметрии, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\nabla}_{g1}(Q)}{j\omega\lambda\gamma_g} + T_{g1g1}^\nabla \dot{\nabla}_{g1} + T_{g1s1}^\nabla \dot{\nabla}_{s1} + T_{g1L^{-1}}^\nabla \dot{\xi}_- + T_{g1L^{+1}}^\nabla \dot{\xi}_+ + T_{g1L^{01}}^\nabla \dot{\xi}_{01} = \\ = -T_{g1W1}^\nabla \dot{\nabla}_{W1}, Q \in D_{g1}, \end{aligned} \quad (13)$$

где $T_{g1W1}^\nabla \dot{\nabla}_{W1} = T_{g1W1}^\nabla (\nabla_{W1}^{\text{Re}} + j\nabla_{W1}^{\text{Im}}) = T_{g1W1}^\nabla \nabla_{W1}^{\text{Re}} + jT_{g1W1}^\nabla \nabla_{W1}^{\text{Im}} = jT_{g1W1}^\nabla \nabla_{W1}^{\text{Im}}$;

$$\begin{aligned} T_{s1g1}^\nabla \dot{\nabla}_{g1} + \frac{\dot{\nabla}_{s1}(Q)}{j\omega\lambda\gamma_s} + T_{s1s1}^\nabla \dot{\nabla}_{s1} + T_{s1L^{-1}}^\nabla \dot{\xi}_- + T_{s1L^{+1}}^\nabla \dot{\xi}_+ + T_{s1L^{01}}^\nabla \dot{\xi}_{01} = \\ = -T_{s1W1}^\nabla \dot{\nabla}_{W1}, Q \in D_{s1}, \end{aligned} \quad (14)$$

где $T_{s1W1}^\nabla \dot{\nabla}_{W1} = T_{s1W1}^\nabla (\nabla_{W1}^{\text{Re}} + j\nabla_{W1}^{\text{Im}}) = T_{s1W1}^\nabla \nabla_{W1}^{\text{Re}} + jT_{s1W1}^\nabla \nabla_{W1}^{\text{Im}} = jT_{s1W1}^\nabla \nabla_{W1}^{\text{Im}}$;

$$\begin{aligned} -P_{L^{-1}g1}^\nabla \dot{\nabla}_{g1} - P_{L^{-1}s1}^\nabla \dot{\nabla}_{s1} + \frac{\pi}{\chi} \dot{\xi}_-(Q) - P_{L^{-1}L^{+1}}^\nabla \dot{\xi}_{+1} - P_{L^{-1}L^{01}}^\nabla \dot{\xi}_{01} = \\ = P_{L^{-1}W1}^\nabla \dot{\nabla}_{W1}, Q \in L^{-1}, \end{aligned} \quad (15)$$

где $P_{L^{-1}W1}^\nabla \dot{\nabla}_{W1} = P_{L^{-1}W1}^\nabla (\nabla_{W1}^{\text{Re}} + j\nabla_{W1}^{\text{Im}}) = P_{L^{-1}W1}^\nabla \nabla_{W1}^{\text{Re}} + jP_{L^{-1}W1}^\nabla \nabla_{W1}^{\text{Im}} = jP_{L^{-1}W1}^\nabla \nabla_{W1}^{\text{Im}}$;

$$\begin{aligned}
 & -P_{L^+1g1}^\nabla \dot{\nabla}_{g1} - P_{L^+1s1}^\nabla \dot{\nabla}_{s1} - P_{L^+1L^{-1}}^\nabla \xi_{-1} + \frac{\pi}{\chi} \xi_{+1}(Q) - P_{L^+1L^0}^\nabla \xi_{01} = \\
 & = P_{L^+1W1}^\nabla \dot{\nabla}_{W1}, \quad Q \in L^+1, \quad (16)
 \end{aligned}$$

где $P_{L^+1W1}^\nabla \dot{\nabla}_{W1} = P_{L^+1W1}^\nabla (\nabla_{W1}^{\text{Re}} + j\nabla_{W1}^{\text{Im}}) = P_{L^+1W1}^\nabla \nabla_{W1}^{\text{Re}} + jP_{L^+1W1}^\nabla \nabla_{W1}^{\text{Im}} = jP_{L^+1W1}^\nabla \nabla_{W1}^{\text{Im}}$;

$$\begin{aligned}
 & -P_{L^01g1}^\nabla \dot{\nabla}_{g1} - P_{L^01s1}^\nabla \dot{\nabla}_{s1} - P_{L^01L^{-1}}^\nabla \xi_{-1} - P_{L^01L^+1}^\nabla \xi_{+1} + \frac{\pi}{\chi} \xi_{01}(Q) - P_{L^01L^0}^\nabla \xi_{01} = \\
 & = P_{L^+1W1}^\nabla \dot{\nabla}_{W1}, \quad Q \in L^{01}, \quad (17)
 \end{aligned}$$

где $P_{L^+1W1}^\nabla \dot{\nabla}_{W1} = P_{L^+1W1}^\nabla (\nabla_{W1}^{\text{Re}} + j\nabla_{W1}^{\text{Im}}) = P_{L^+1W1}^\nabla \nabla_{W1}^{\text{Re}} + jP_{L^+1W1}^\nabla \nabla_{W1}^{\text{Im}} = jP_{L^+1W1}^\nabla \nabla_{W1}^{\text{Im}}$.

Здесь

$$T_{q_i m_j}^\nabla \dot{\nabla}_{m_j} = \int_{D_{m_j}} \dot{\nabla}_{m_j}(M) T^\nabla(Q, M) ds_M, \quad Q \in D_{q_i}, \quad (18)$$

$q_i \in c = \{g1; s1\}$, $1 \leq i \leq 2$; $m_j \in d = \{g1; s1; W1\}$, $1 \leq j \leq 3$;

$$T^\nabla(Q, M) = T_{xy}^\nabla(Q, M) = T_x^\nabla(Q, M) + c_y^\nabla T_x^\nabla(Q, M_y), \quad (19)$$

где

$$T_x^\nabla(Q, M) = T_0(Q, M) + c_x^\nabla T_0(Q, M_x),$$

$$T_x^\nabla(Q, M_y) = T_0(Q, M_y) + c_x^\nabla T_0(Q, M_{xy});$$

$$c_x^\nabla = 1, \quad c_y^\nabla = -1;$$

$$P^\nabla(Q, M) = P_{xy}^\nabla(Q, M) = P_x^\nabla(Q, M) + c_y^\nabla P_x^\nabla(Q, M_y),$$

$$P_x^\nabla(Q, M) = P_0(Q, M) + c_x^\nabla P_0(Q, M_x),$$

$$P_x^\nabla(Q, M_y) = P_0(Q, M_y) + c_x^\nabla P_0(Q, M_{xy}).$$

Рассмотрим алгоритмы численного решения СИУ первой (8)—(12) и второй (13)—(17) подзадач.

Аппроксимация СИУ первой подзадачи алгебраическими системами по методу полного осреднения. Разобьем части сечения обмотки D_{W1} , гильзы D_{g1} , заготовки D_{s1} , внутреннего L^{-1} и внешнего L^+1 контуров кольца магнитопровода, контуров полюсов L^{01} , лежащих в первом квадранте, на элементы. Для разбиения D_{W1} , L^{-1} , L^+1 используем ортогональные сетки в цилиндрической системе координат, а для разбиения D_{g1} , D_{s1} — ортогональные сетки в прямоугольной системе координат. Применив

метод полного осреднения [10], получим САУ, аппроксимирующие СИУ (8)—(12) первой подзадачи:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{j\omega\lambda\gamma_g} \Delta S_{g1} \dot{\Delta}_{g1} + T_{g1g1}^{\Delta} \dot{\Delta}_{g1} + T_{g1s1}^{\Delta} \dot{\Delta}_{s1} + T_{g1L^{-1}}^{\Delta} \dot{\Theta}_{-1} + T_{g1L^{+1}}^{\Delta} \dot{\Theta}_{+1} + T_{g1L^0}^{\Delta} \dot{\Theta}_{01} = \\
 & \quad = -T_{g1W1}^{\Delta} \Delta_{W1}^{\text{Re}}, \\
 & T_{s1g1}^{\Delta} \dot{\Delta}_{g1} + \frac{1}{j\omega\lambda\gamma_s} \Delta S_{s1} \dot{\Delta}_{s1} + T_{s1s1}^{\Delta} \dot{\Delta}_{s1} + T_{s1L^{-1}}^{\Delta} \dot{\Theta}_{-1} + T_{s1L^{+1}}^{\Delta} \dot{\Theta}_{+1} + T_{s1L^0}^{\Delta} \dot{\Theta}_{01} = \\
 & \quad = -T_{s1W1}^{\Delta} \Delta_{W1}^{\text{Re}}, \\
 & -P_{L^{-1}g1}^{\Delta} \dot{\Delta}_{g1} - P_{L^{-1}s1}^{\Delta} \dot{\Delta}_{s1} + \frac{\pi}{\chi} \Delta L^{-1} \dot{\Theta}_{-1} - P_{L^{-1}L^{+1}}^{\Delta} \dot{\Theta}_{+1} + T_{s1L^0}^{\Delta} \dot{\Theta}_{01} = P_{L^{-1}W1}^{\Delta} \Delta_{W1}^{\text{Re}}, \\
 & -P_{L^{+1}g1}^{\Delta} \dot{\Delta}_{g1} - P_{L^{+1}s1}^{\Delta} \dot{\Delta}_{s1} - P_{L^{+1}L^{-1}}^{\Delta} \dot{\Theta}_{-1} + \frac{\pi}{\chi} \Delta L^{+1} \dot{\Theta}_{+1} - P_{L^{+1}L^0}^{\Delta} \dot{\Theta}_{01} = P_{L^{+1}W1}^{\Delta} \Delta_{W1}^{\text{Re}}, \\
 & -P_{L^0g1}^{\Delta} \dot{\Delta}_{g1} - P_{L^0s1}^{\Delta} \dot{\Delta}_{s1} - P_{L^0L^{-1}}^{\Delta} \dot{\Theta}_{-1} - P_{L^0L^{+1}}^{\Delta} \dot{\Theta}_{+1} + \frac{\pi}{\chi} \Delta L^{01} \dot{\Theta}_{01} - \\
 & \quad - P_{L^0L^0}^{\Delta} \dot{\Theta}_{01} = P_{L^+W1}^{\Delta} \Delta_{W1}^{\text{Re}}.
 \end{aligned} \tag{20}$$

Здесь $\dot{\Delta}_{g1}$ — вектор-столбец размерности N_{g1} , $\dot{\Delta}_{g1} = (\dot{\Delta}_{g1}(C_{g1}), \dots, \dot{\Delta}_{g1}(C_{gN_{g1}}))$; его компонентами являются комплексные амплитуды плотностей вихревых токов в центрах C_{gi} элементов ΔD_{gi} , $i=1, \dots, N_{g1}$, на которые разбивается часть сечения гильзы D_{g1} , лежащая в первом квадранте; $\dot{\Delta}_{s1}$ — вектор-столбец размерности N_{s1} , $\dot{\Delta}_{s1} = (\dot{\Delta}_{s1}(C_{s1}), \dots, \dot{\Delta}_{s1}(C_{sN_{s1}}))$; его компонентами являются комплексные амплитуды плотностей вихревых токов в центрах C_{si} элементов ΔD_{si} , $i=1, \dots, N_{s1}$; T_{qimj}^{Δ} — прямоугольная матрица с числом строк N_{qi} и числом столбцов N_{mj} ,

$$\begin{aligned}
 T_{qimj}^{\Delta} &= \left\| \int_{\Delta D_{qi}l} ds_Q \int_{\Delta D_{mj}k} T^{\Delta}(Q, M) ds_M \right\|, \quad 1 \leq l \leq N_{qi}, \quad 1 \leq k \leq N_{mj}, \\
 q_i \in c &= \{g1; s1\}, \quad 1 \leq i \leq 2, \quad m_j \in d = \{g1; s1; W1\}, \quad 1 \leq j \leq 3;
 \end{aligned} \tag{21}$$

$P_{L^{-1}mj}^{\Delta}$ — прямоугольная матрица с числом строк N_{-1} и числом столбцов N_{mj} ,

$$\begin{aligned}
 P_{L^{-1}mj}^{\Delta} &= \left\| \int_{\Delta L_i^{-1}} dl_Q \int_{\Delta D_{mj}p} P^{\Delta}(Q, M) ds_M \right\|, \quad 1 \leq i \leq N_{-1}, \quad 1 \leq p \leq N_{mj}, \\
 m_j \in d, \quad & 1 \leq j \leq 3.
 \end{aligned}$$

Преобразование комплексной САУ (20) в вещественную. Представим вектор-столбцы комплексных амплитуд неизвестных величин, входящих в уравнения (20), в алгебраической форме:

$$\begin{aligned} \dot{\Delta}_{g1} &= \Delta_{g1}^{\text{Re}} + j\Delta_{g1}^{\text{Im}}, \quad \dot{\Delta}_{s1} = \Delta_{s1}^{\text{Re}} + j\Delta_{s1}^{\text{Im}}, \\ \dot{\theta}_{-1} &= \theta_{-1}^{\text{Re}} + j\theta_{-1}^{\text{Im}}, \quad \dot{\theta}_{+1} = \theta_{+1}^{\text{Re}} + j\theta_{+1}^{\text{Im}}, \quad \dot{\theta}_{01} = \theta_{01}^{\text{Re}} + j\theta_{01}^{\text{Im}}. \end{aligned} \quad (22)$$

Подставляя выражения (22) в уравнения (20) и приравнявая в полученных уравнениях последовательно вещественные и мнимые части слева и справа, получаем следующую вещественную САУ:

$$AX = F, \quad (23)$$

где A — блочная матрица,

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega\lambda\gamma_g} \Delta S_{g1} & T_{g1g1}^\Delta & 0 & T_{g1s1}^\Delta & 0 & T_{g1L-1}^\Delta & 0 & T_{g1L\gamma}^\Delta & 0 & T_{g1L^0}^\Delta \\ T_{s1g1}^\Delta & -\frac{1}{\omega\lambda\gamma_g} \Delta S_{g1} & T_{s1s1}^\Delta & 0 & T_{s1L-1}^\Delta & 0 & T_{s1L\gamma}^\Delta & 0 & T_{s1L^0}^\Delta & 0 \\ 0 & T_{s1g1}^\Delta & \frac{1}{\omega\lambda\gamma_s} \Delta S_{s1} & T_{s1s1}^\Delta & 0 & T_{s1L-1}^\Delta & 0 & T_{s1L\gamma}^\Delta & 0 & T_{s1L^0}^\Delta \\ T_{L-1g1}^\Delta & 0 & T_{L-1s1}^\Delta & -\frac{1}{\omega\lambda\gamma_s} \Delta S_{s1} & T_{L-1L-1}^\Delta & 0 & T_{L-1L\gamma}^\Delta & 0 & T_{L-1L^0}^\Delta & 0 \\ -P_{L-1g1}^\Delta & 0 & -P_{L-1s1}^\Delta & 0 & \frac{\pi}{\chi} \Delta L^{-1} & 0 & -P_{L-1L\gamma}^\Delta & 0 & -P_{L-1L^0}^\Delta & 0 \\ 0 & -P_{L-1g1}^\Delta & 0 & -P_{L-1s1}^\Delta & 0 & \frac{\pi}{\chi} \Delta L^{-1} & 0 & -P_{L-1L\gamma}^\Delta & 0 & -P_{L-1L^0}^\Delta \\ -P_{L\gamma g1}^\Delta & 0 & -P_{L\gamma s1}^\Delta & 0 & -P_{L\gamma L-1}^\Delta & 0 & \frac{\pi}{\chi} \Delta L^{+1} & 0 & -P_{L\gamma L^0}^\Delta & 0 \\ 0 & -P_{L\gamma g1}^\Delta & 0 & -P_{L\gamma s1}^\Delta & 0 & -P_{L\gamma L-1}^\Delta & 0 & \frac{\pi}{\chi} \Delta L^{+1} & 0 & -P_{L\gamma L^0}^\Delta \\ -P_{L^0 g1}^\Delta & 0 & -P_{L^0 s1}^\Delta & 0 & -P_{L^0 L-1}^\Delta & 0 & -P_{L^0 L\gamma}^\Delta & 0 & \frac{\pi}{\chi} \Delta L^{01} - P_{L^0 L^0}^\Delta & 0 \\ 0 & -P_{L^0 g1}^\Delta & 0 & -P_{L^0 s1}^\Delta & 0 & -P_{L^0 L-1}^\Delta & 0 & -P_{L^0 L\gamma}^\Delta & 0 & \frac{\pi}{\chi} \Delta L^{01} - P_{L^0 L^0}^\Delta \end{pmatrix};$$

X — блочный вектор-столбец искомых неизвестных,

$$X = (\Delta_{g1}^{\text{Im}}, \Delta_{g1}^{\text{Re}}, \Delta_{s1}^{\text{Im}}, \Delta_{s1}^{\text{Re}}, \theta_{-1}^{\text{Im}}, \theta_{-1}^{\text{Re}}, \theta_{+1}^{\text{Im}}, \theta_{+1}^{\text{Re}}, \theta_{01}^{\text{Im}}, \theta_{01}^{\text{Re}});$$

F — блочный вектор-столбец правых частей,

$$F = (-T_{g1W1}^\Delta \Delta_{W1}^{\text{Re}}, 0, -T_{s1W1}^\Delta \Delta_{W1}^{\text{Re}}, 0, 0, P_{L-1W1}^\Delta \Delta_{W1}^{\text{Re}}, 0, P_{L^+W1}^\Delta \Delta_{W1}^{\text{Re}}, 0, P_{L^0W1}^\Delta \Delta_{W1}^{\text{Re}}).$$

Преобразование САУ (23) последовательным парным исключением из нее вектор-столбцов ТН. САУ (23) можно решить блочным методом Гаусса. Вместе с тем, матрица A является разреженной ($\approx 40\%$ нулевых матриц). Трудности учета разреженности при использовании стандартных программ, реализующих блочный метод Гаусса, приводят к избыточным вычислениям. Сократить число нулевых матриц и уменьшить при этом порядок блочной матрицы можно, исключив из САУ (23)

пары вектор-столбцов, например Δ_{g1}^{Im} и Δ_{g1}^{Re} , или Δ_{s1}^{Im} и Δ_{s1}^{Re} , или θ_{-1}^{Im} и θ_{-1}^{Re} , или θ_{+1}^{Im} и θ_{+1}^{Re} , или θ_{01}^{Im} и θ_{01}^{Re} .

Исключение первой пары требует разрешения системы первого и второго блочных уравнений САУ (23) относительно этих вектор-столбцов. Исключение второй пары требует разрешения системы третьего и четвертого блочных уравнений САУ (23) относительно этих вектор-столбцов. Значительно проще выразить пары вектор-столбцов θ_{-1}^{Im} и θ_{-1}^{Re} , или θ_{+1}^{Im} и θ_{+1}^{Re} , или θ_{01}^{Im} и θ_{01}^{Re} через остальные искомые вектор-столбцы. Используя пятое и шестое уравнения САУ (23) находим вектор-столбцы

$$\begin{aligned} \theta_{-1}^{\text{Im}} &= \frac{\chi}{\pi} (\Delta L^{-1})^{-1} P_{L^{-1}g1}^{\Delta} \Delta_{g1}^{\text{Im}} + \frac{\chi}{\pi} (\Delta L^{-1})^{-1} P_{L^{-1}s1}^{\Delta} \Delta_{s1}^{\text{Im}} + \\ &+ \frac{\chi}{\pi} (\Delta L^{-1})^{-1} P_{L^{-1}l^{+}1}^{\Delta} \theta_{+1}^{\text{Im}} + \frac{\chi}{\pi} (\Delta L^{-1})^{-1} P_{L^{-1}l^{0}1}^{\Delta} \theta_{01}^{\text{Im}}, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \theta_{-1}^{\text{Re}} &= \frac{\chi}{\pi} (\Delta L^{-1})^{-1} P_{L^{-1}g1}^{\Delta} \Delta_{g1}^{\text{Re}} + \frac{\chi}{\pi} (\Delta L^{-1})^{-1} P_{L^{-1}s1}^{\Delta} \Delta_{s1}^{\text{Re}} + \\ &+ \frac{\chi}{\pi} (\Delta L^{-1})^{-1} P_{L^{-1}l^{+}1}^{\Delta} \theta_{+1}^{\text{Re}} + \frac{\chi}{\pi} (\Delta L^{-1})^{-1} P_{L^{-1}l^{0}1}^{\Delta} \theta_{01}^{\text{Re}} + \frac{\chi}{\pi} (\Delta L^{-1})^{-1} P_{L^{-1}w1}^{\Delta} \theta_{w1}^{\text{Re}}. \end{aligned} \quad (25)$$

Подставляя полученные выражения в остальные уравнения системы (23), получаем следующую блочную САУ:

$$B\mathbf{Y} = \Phi, \quad (26)$$

где B — блочная матрица,

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 & B_{14} & 0 & B_{16} & 0 & B_{18} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & 0 & B_{25} & 0 & B_{27} & 0 \\ 0 & B_{32} & B_{33} & B_{34} & 0 & B_{36} & 0 & B_{38} \\ B_{41} & 0 & B_{43} & B_{44} & B_{45} & 0 & B_{47} & 0 \\ B_{51} & 0 & B_{53} & 0 & B_{55} & 0 & B_{57} & 0 \\ 0 & B_{61} & 0 & B_{64} & 0 & B_{66} & 0 & B_{68} \\ B_{71} & 0 & B_{73} & 0 & B_{75} & 0 & B_{77} & 0 \\ 0 & B_{82} & 0 & B_{84} & 0 & B_{86} & 0 & B_{88} \end{pmatrix},$$

\mathbf{Y} — блочный вектор-столбец искомых неизвестных,

$$\mathbf{Y} = (\Delta_{g1}^{\text{Im}}, \Delta_{g1}^{\text{Re}}, \Delta_{s1}^{\text{Im}}, \Delta_{s1}^{\text{Re}}, \theta_{+1}^{\text{Im}}, \theta_{+1}^{\text{Re}}, \theta_{01}^{\text{Im}}, \theta_{01}^{\text{Re}});$$

Φ — блочный вектор-столбец правых частей,

$$\Phi = (\Phi_1, 0, \Phi_3, 0, 0, \Phi_6, 0, \Phi_8).$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= - \left[T_{g1W1}^\Delta + \frac{\chi}{\pi} T_{g1L^{-1}}^\Delta (\Delta L^{-1})^{-1} P_{L^{-1}W1}^\Delta \right] \Delta_{W1}^{\text{Re}}, \Phi_2 = 0, \\ \Phi_3 &= - \left[T_{s1W1}^\Delta + \frac{\chi}{\pi} T_{s1L^{-1}}^\Delta (\Delta L^{-1})^{-1} P_{L^{-1}W1}^\Delta \right] \Delta_{W1}^{\text{Re}}, \Phi_4 = 0, \Phi_5 = 0, \\ \Phi_6 &= - \left[P_{L^+1W1}^\Delta + \frac{\chi}{\pi} P_{L^+1L^{-1}}^\Delta (\Delta L^{-1})^{-1} P_{L^{-1}W1}^\Delta \right] \Delta_{W1}^{\text{Re}}, \\ \Phi_8 &= - \left[P_{L^01W1}^\Delta + \frac{\chi}{\pi} P_{L^01L^{-1}}^\Delta (\Delta L^{-1})^{-1} P_{L^{-1}W1}^\Delta \right] \Delta_{W1}^{\text{Re}}. \end{aligned} \quad (27)$$

Из пятого и шестого уравнений системы (26) находим

$$\theta_{+1}^{\text{Im}} = -B_{55}^{-1} B_{51} \Delta_{g1}^{\text{Im}} - B_{55}^{-1} B_{53} \Delta_{s1}^{\text{Im}} - B_{55}^{-1} B_{57} \theta_{01}^{\text{Im}}, \quad (28)$$

$$\theta_{+1}^{\text{Re}} = -B_{66}^{-1} B_{62} \Delta_{g1}^{\text{Re}} - B_{66}^{-1} B_{64} \Delta_{s1}^{\text{Re}} - B_{66}^{-1} B_{68} \theta_{01}^{\text{Re}} - B_{66}^{-1} \Phi_6. \quad (29)$$

Подставив полученные выражения в остальные уравнения системы (26), получим следующую блочную САУ:

$$\begin{aligned} & B_{11} \Delta_{g1}^{\text{Im}} + (B_{12} - B_{16} B_{66}^{-1} B_{62}) \Delta_{g1}^{\text{Re}} + (B_{14} - B_{16} B_{66}^{-1} B_{64}) \Delta_{s1}^{\text{Re}} + \\ & \quad + (B_{18} - B_{16} B_{66}^{-1} B_{68}) \theta_{01}^{\text{Re}} = \Phi_1 + B_{16} B_{66}^{-1} \Phi_6, \\ & (B_{21} - B_{25} B_{55}^{-1} B_{51}) \Delta_{g1}^{\text{Im}} + B_{22} \Delta_{g1}^{\text{Re}} + (B_{23} - B_{25} B_{55}^{-1} B_{53}) \Delta_{s1}^{\text{Im}} + \\ & \quad + (B_{27} - B_{25} B_{55}^{-1} B_{57}) \theta_{01}^{\text{Im}} = 0, \\ & (B_{32} - B_{36} B_{66}^{-1} B_{62}) \Delta_{g1}^{\text{Re}} + B_{33} \Delta_{s1}^{\text{Im}} + (B_{34} - B_{36} B_{66}^{-1} B_{64}) \Delta_{s1}^{\text{Re}} + \\ & \quad + (B_{38} - B_{36} B_{66}^{-1} B_{68}) \theta_{01}^{\text{Re}} = \Phi_3 + B_{36} B_{66}^{-1} \Phi_6, \\ & (B_{41} - B_{45} B_{55}^{-1} B_{51}) \Delta_{g1}^{\text{Im}} + (B_{43} - B_{45} B_{55}^{-1} B_{53}) \Delta_{s1}^{\text{Im}} + B_{44} \Delta_{s1}^{\text{Re}} + \\ & \quad + (B_{47} - B_{45} B_{55}^{-1} B_{57}) \theta_{01}^{\text{Im}} = 0, \\ & (B_{71} - B_{75} B_{55}^{-1} B_{51}) \Delta_{g1}^{\text{Im}} + (B_{73} - B_{75} B_{55}^{-1} B_{53}) \Delta_{s1}^{\text{Im}} + (B_{77} - B_{75} B_{55}^{-1} B_{57}) \theta_{01}^{\text{Im}} = 0, \\ & (B_{82} - B_{86} B_{66}^{-1} B_{62}) \Delta_{g1}^{\text{Re}} + (B_{84} - B_{86} B_{66}^{-1} B_{64}) \Delta_{s1}^{\text{Re}} + \\ & \quad + (B_{88} - B_{86} B_{66}^{-1} B_{68}) \theta_{01}^{\text{Re}} = \Phi_8 + B_{86} B_{66}^{-1} \Phi_6. \end{aligned} \quad (30)$$

Для краткости САУ (30) запишем в виде

$$CZ = \Psi, \quad (31)$$

где C — блочная матрица,

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & C_{14} & 0 & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & C_{25} & 0 \\ 0 & C_{32} & C_{33} & C_{34} & 0 & C_{36} \\ C_{41} & 0 & C_{43} & C_{44} & C_{45} & 0 \\ C_{51} & 0 & C_{53} & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & C_{62} & 0 & C_{64} & 0 & C_{66} \end{pmatrix},$$

Z — блочный вектор-столбец искоемых неизвестных,

$$Z = (\Delta_{g1}^{Im}, \Delta_{g1}^{Re}, \Delta_{s1}^{Im}, \Delta_{s1}^{Re}, \theta_{01}^{Im}, \theta_{01}^{Re});$$

Ψ — блочный вектор-столбец правых частей,

$$\Psi = (\Psi_1, 0, \Psi_3, 0, 0, \Psi_6).$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= \Phi_1 + B_{16} B_{66}^{-1} \Phi_6, \quad \Psi_2 = 0, \quad \Psi_3 = \Phi_3 + B_{36} B_{66}^{-1} \Phi_6, \\ \Psi_4 &= 0, \quad \Psi_5 = 0, \quad \Psi_6 = \Phi_8 + B_{86} B_{66}^{-1} \Phi_6. \end{aligned} \quad (32)$$

Из пятого и шестого уравнений системы (31) найдем

$$\begin{aligned} \theta_{01}^{Im} &= -C_{55}^{-1} C_{51} \Delta_{g1}^{Im} - C_{55}^{-1} C_{53} \Delta_{s1}^{Im}, \\ \theta_{01}^{Re} &= C_{66}^{-1} \Psi_6 - C_{66}^{-1} C_{62} \Delta_{g1}^{Re} - C_{66}^{-1} C_{64} \Delta_{s1}^{Re}. \end{aligned} \quad (33)$$

Подставив найденные выражения в остальные уравнения системы (31), получим следующую блочную САУ:

$$\begin{aligned} C_{11} \Delta_{g1}^{Im} + (C_{12} - C_{16} C_{66}^{-1} C_{62}) \Delta_{g1}^{Re} + (C_{14} - C_{16} C_{66}^{-1} C_{64}) \Delta_{s1}^{Re} &= \Psi_1 - C_{16} C_{66}^{-1} \Psi_6, \\ (C_{21} - C_{25} C_{55}^{-1} C_{51}) \Delta_{g1}^{Im} + C_{22} \Delta_{g1}^{Re} + (C_{23} - C_{25} C_{55}^{-1} C_{53}) \Delta_{s1}^{Im} &= 0, \\ (C_{32} - C_{36} C_{66}^{-1} C_{62}) \Delta_{g1}^{Re} + C_{33} \Delta_{s1}^{Im} + (C_{34} - C_{36} C_{66}^{-1} C_{64}) \Delta_{s1}^{Re} &= \Psi_3 - C_{36} C_{66}^{-1} \Psi_6, \\ (C_{41} - C_{45} C_{55}^{-1} C_{51}) \Delta_{g1}^{Im} + (C_{43} - C_{45} C_{55}^{-1} C_{53}) \Delta_{s1}^{Im} + C_{44} \Delta_{s1}^{Re} &= 0, \end{aligned}$$

которую для краткости запишем в виде

$$D\Omega = G. \quad (34)$$

Здесь D — блочная матрица,

$$D = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 & D_{14} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & 0 \\ 0 & D_{32} & D_{33} & D_{34} \\ D_{41} & 0 & D_{43} & D_{44} \end{pmatrix};$$

$\Omega = (\Delta_{g1}^{\text{Im}}, \Delta_{g1}^{\text{Re}}, \Delta_{s1}^{\text{Im}}, \Delta_{s1}^{\text{Re}})$ — блочный вектор-столбец искомых неизвестных;

$\mathbf{G} = (\mathbf{G}_1, 0, \mathbf{G}_3, 0)$ — блочный вектор-столбец правых частей, где

$$\mathbf{G}_1 = \Psi_1 - C_{16} C_{66}^{-1} \Psi_6, \quad \mathbf{G}_2 = 0, \quad \mathbf{G}_3 = \Psi_3 - C_{36} C_{66}^{-1} \Psi_6, \quad \mathbf{G}_4 = 0. \quad (35)$$

Комбинированный метод решения САУ (23) состоит в последовательном парном исключении из нее вектор-столбцов ТН и решении полученной САУ блочным методом Гаусса. Алгоритм решения САУ (23) комбинированным методом следующий:

1. Вычисление блоков матрицы B .
2. Вычисление правых частей САУ (26) по формулам (27).
3. Вычисление блоков матрицы C .
4. Вычисление правых частей САУ (31) по формулам (32).
5. Вычисление блоков матрицы D .
6. Вычисление правых частей САУ (34) по формулам (35).
7. Решение полученной САУ (34) блочным методом Гаусса; следует заметить, что матрица D имеет 16 блоков, из которых четыре нулевые. На этом прямой ход решения САУ (23) заканчивается. Далее выполняется обратный ход.
8. По формулам (33) и (34) вычисляем вектор-столбцы θ_{01}^{Im} и θ_{01}^{Re} .
9. По (34) и полученным вектор-столбцам θ_{01}^{Im} и θ_{01}^{Re} , а также по формулам (28), (29) вычисляем вектор-столбцы θ_{+1}^{Im} и θ_{+1}^{Re} .
10. По (34), полученным вектор-столбцам θ_{01}^{Im} и θ_{01}^{Re} , θ_{+1}^{Im} и θ_{+1}^{Re} , а также формулам (24), (25) вычисляем вектор-столбцы θ_{-1}^{Im} и θ_{-1}^{Re} . На этом обратный ход решения САУ (23) заканчивается.

Векторно-матричные выражения для вычисления комплексных амплитуд проекций вектора магнитной индукции на оси x и y в сечении D_{s1} . После расчета распределения вихревых токов и токов намагниченности рассчитываем распределение комплексных амплитуд проекций вектора магнитной индукции на оси x и y в сечении D_{s1} . Исходными при этом являются выражения комплексных амплитуд проекции вектора магнитной индукции на оси x и y в заготовке с учетом симметрии относи-

тельно осей x и y в распределении первой СС ВТ, индуцируемых токами первой обмотки:

$$\begin{aligned} \dot{B}_{mx}^{\Delta}(Q) = & \frac{\mu_0}{2\pi} \int_{D_{g1}} \dot{\Delta}(M) X^{\Delta}(Q, M) ds_M + \frac{\mu_0}{2\pi} \int_{D_{s1}} \dot{\Delta}(M) X^{\Delta}(Q, M) ds_M + \\ & + \frac{\mu_0}{2\pi} \int_{L^{-1}} \dot{\theta}(M) X^{\Delta}(Q, M) ds_M + \frac{\mu_0}{2\pi} \int_{L^{+1}} \dot{\Delta}(M) X^{\Delta}(Q, M) ds_M + \\ & + \frac{\mu_0}{2\pi} \int_{L^{01}} \dot{\Delta}(M) X^{\Delta}(Q, M) ds_M + \frac{\mu_0}{2\pi} \int_{D_{w1}} \dot{\Delta}(M) X^{\Delta}(Q, M) ds_M, \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \dot{B}_{my}^{\Delta}(Q) = & \frac{\mu_0}{2\pi} \int_{D_{g1}} \dot{\Delta}(M) Y^{\Delta}(Q, M) ds_M + \frac{\mu_0}{2\pi} \int_{D_{s1}} \dot{\Delta}(M) Y^{\Delta}(Q, M) ds_M + \\ & + \frac{\mu_0}{2\pi} \int_{L^{-1}} \dot{\theta}(M) Y^{\Delta}(Q, M) ds_M + \frac{\mu_0}{2\pi} \int_{L^{+1}} \dot{\theta}(M) Y^{\Delta}(Q, M) ds_M + \\ & + \frac{\mu_0}{2\pi} \int_{L^{01}} \dot{\Delta}(M) Y^{\Delta}(Q, M) ds_M + \frac{\mu_0}{2\pi} \int_{D_{w1}} \dot{\Delta}(M) Y^{\Delta}(Q, M) ds_M. \end{aligned}$$

Здесь

$$X^{\Delta}(Q, M) = X_{xy}^{\Delta}(Q, M) = X_x^{\Delta}(Q, M) + c_y^{\Delta} X_x^{\Delta}(Q, M_y),$$

$$X_x^{\Delta}(Q, M) = X_x(Q, M) + c_x^{\Delta} X_0(Q, M_x),$$

$$X_x^{\Delta}(Q, M_y) = X_0(Q, M_y) + c_x^{\Delta} X_0(Q, M_{xy});$$

$$Y^{\Delta}(Q, M) = Y_{xy}^{\Delta}(Q, M) = Y_x^{\Delta}(Q, M) + c_y^{\Delta} Y_x^{\Delta}(Q, M_y),$$

$$Y_x^{\Delta}(Q, M) = Y_x(Q, M) + c_x^{\Delta} Y_0(Q, M_x),$$

$$Y_x^{\Delta}(Q, M) = Y_0(Q, M_y) + c_x^{\Delta} Y_0(Q, M_{xy});$$

$$X_0(Q, M) = \frac{y_M - y_Q}{r_{QM}^2}, \text{ где } r_{QM}^2 = (x_M - x_Q)^2 + (y_M - y_Q)^2;$$

$$X_0(Q, M_x) = \frac{y_M - y_Q}{r_{QM_x}^2}, \text{ где } r_{QM_x}^2 = (-x_M - x_Q)^2 + (y_M - y_Q)^2;$$

$$X_0(Q, M_y) = \frac{-y_M - y_Q}{r_{QM_y}^2}, \text{ где } r_{QM_y}^2 = (x_M - x_Q)^2 + (-y_M - y_Q)^2;$$

$$X_0(Q, M_{xy}) = \frac{-y_M - y_Q}{r_{QM_{xy}}^2}, \text{ где } r_{QM_{xy}}^2 = (-x_M - x_Q)^2 + (-y_M - y_Q)^2;$$

$$Y_0(Q, M) = -\frac{(x_M - x_Q)}{r_{QM}^2}, \quad Y_0(Q, M_x) = -\frac{(-x_M - x_Q)}{r_{QM_x}^2};$$

$$Y_0(Q, M_y) = -\frac{(-x_M - x_Q)}{r_{QM_y}^2}, \quad Y_0(Q, M_{xy}) = -\frac{(-x_M - x_Q)}{r_{QM_{xy}}^2}.$$

Векторно-матричные выражения, аппроксимирующие формулы (36) при $Q \in D_{s1}$ по методу полного осреднения, имеют вид

$$\frac{1}{\lambda} \mathbf{SB}_{xs1}^\Delta = X_{s1g1}^\Delta \dot{\Delta}_{g1} + X_{s1s1}^\Delta \dot{\Delta}_{s1} + X_{s1L^{-1}}^\Delta \dot{\theta}_{-1} + X_{s1L^{+1}}^\Delta \dot{\theta}_{+1} + X_{s1L^{01}}^\Delta \dot{\theta}_{01} + X_{s1W1}^\Delta \dot{\Delta}_{W1},$$

$$\frac{1}{\lambda} \mathbf{SB}_{ys1}^\Delta = Y_{s1g1}^\Delta \dot{\Delta}_{g1} + Y_{s1s1}^\Delta \dot{\Delta}_{s1} + Y_{s1L^{-1}}^\Delta \dot{\theta}_{-1} + Y_{s1L^{+1}}^\Delta \dot{\theta}_{+1} + Y_{s1L^{01}}^\Delta \dot{\theta}_{01} + Y_{s1W1}^\Delta \dot{\Delta}_{W1}.$$

Здесь \mathbf{SB}_{xs1}^Δ и \mathbf{SB}_{ys1}^Δ — вектор-столбцы размерности N_{s1} ,

$$\mathbf{SB}_{xs1}^\Delta = \left(\int_{\Delta D_{s1,1}} \dot{B}_{xs1}^\Delta(Q) ds_Q, \dots, \int_{\Delta D_{s1, N_{s1}}} \dot{B}_{xs1}^\Delta(Q) ds_Q \right) \approx$$

$$\approx (\dot{B}_{xs1}^\Delta(C_{s1,1}) \Delta S_{s1,1}, \dots, \dot{B}_{xs1}^\Delta(C_{s1, N_{s1}}) \Delta S_{s1, N_{s1}}),$$

$$\mathbf{SB}_{ys1}^\Delta = \left(\int_{\Delta D_{s1,1}} \dot{B}_{ys1}^\Delta(Q) ds_Q, \dots, \int_{\Delta D_{s1,i}} \dot{B}_{ys1}^\Delta(Q) ds_Q, \dots, \int_{\Delta D_{s1, N_{s1}}} \dot{B}_{ys1}^\Delta(Q) ds_Q \right);$$

$X_{s1,s1}^\Delta$, $X_{s1,g1}^\Delta$, $X_{s1,L^{-1}}^\Delta$, $X_{s1,L^{+1}}^\Delta$, $X_{s1,L^{01}}^\Delta$, $X_{s1,W1}^\Delta$ — матрицы, число строк и столбцов у которых такое же, как и у соответствующих матриц (21). Коэффициенты этих матриц вычисляются по формулам, полученным из формул для коэффициентов матриц (21), если заменить в них $T^\Delta(Q, M)$ на $X^\Delta(Q, M)$.

Восстановление распределения первой СС ВТ в сечении заготовки и гильзы, комплексной амплитуды плотности токов намагниченности. Для восстановления распределения комплексной амплитуды плотности первой СС ВТ во всем сечении заготовки D_s и гильзы D_g , а также комплексной амплитуды плотности токов намагниченности по L^- , L^+ , L^0 согласно (23) используем первые три равенства (7), с помощью которых получены СИУ (8)—(12) для первой СС ВТ:

$$\dot{\Delta}_g(M) = -\dot{\Delta}_g(M_x) = \dot{\Delta}_g(M_y) = -\dot{\Delta}_g(M_{xy}),$$

$$\begin{aligned}\dot{\Delta}_s(M) &= -\dot{\Delta}_s(M_x) = \dot{\Delta}_s(M_y) = -\dot{\Delta}_s(M_{xy}), \\ \dot{\Theta}_-(M) &= -\dot{\Theta}_-(M_x) = \dot{\Theta}_-(M_y) = -\dot{\Theta}_-(M_{xy}).\end{aligned}$$

Для восстановления распределения комплексных амплитуд проекций вектора магнитной индукции во всем сечении заготовки D_s по полученному распределению $\dot{B}_{x1}^\Delta(M)$ и $\dot{B}_{y1}^\Delta(M)$ в D_{s1} используем равенства

$$\begin{aligned}\dot{B}_x^\Delta(M) &= -\dot{B}_x^\Delta(M_x) = \dot{B}_x^\Delta(M_y) = -\dot{B}_x^\Delta(M_{xy}), \\ \dot{B}_y^\Delta(M) &= \dot{B}_y^\Delta(M_x) = \dot{B}_y^\Delta(M_y) = \dot{B}_y^\Delta(M_{xy}).\end{aligned}$$

Выводы. Разбиение сечения магнитопровода ЭМП с явно выражеными полюсами на составляющие простой формы, в частности выделение кольца уже на этапе формулировки задачи, позволяет существенно упростить ИУ для ТН на границах кольца.

При решении САУ, аппроксимирующей СИУ, предлагается предварительно упростить ее последовательным парным исключением вектор-столбцов плотностей ТН. Такой подход позволяет значительно уменьшить число нулевых блоков в матрице САУ. Действительно, матрица исходной САУ содержит 46 нулевых элементов при общем числе элементов 100. После исключения вектор-столбцов плотностей ТН получаем САУ, матрица которой содержит четыре нулевых элемента при общем числе элементов 16. Для решения этой САУ применяется блочный метод Гаусса.

A two-dimensional integral model has been developed for distribution of eddy currents and electrodynamic efforts in the crystallizer of the continuous casting machine (CCM) equipped with a salient-pole electromagnetic stirrer. A characteristic feature of electromagnetic processes in the system crystallizer-electromagnetic stirrer, that is availability of strong magnetic leakage fields were taken into account in the model. A possibility was obtained to model the magnetic field in a local region, in the casting cross-section in particular. The model is realized with the help of the unit algorithm, generalizing the algorithm.

1. *Eidem M., Hackl H., Kollberg S., Tallback G.* The Use of EMS and EMBR in Steelmaking // Int. Conference: The 21st Century Steel Industry of Russia and CIS. — Moscow. 6—10 June 1994. — P. 231—238.
2. *Beitelman L.* Continuous Casting of Steel Billets with an in Mold Dual-Coil Electromagnetic Stirring System // Int. Congress Electromagn. Process of Materials. — Paris. May 26—29, 1997: Proc. — Paris, 1997. — Vol. 2. — P. 335—341.
3. *Favre E., Kunstreich S., Nove M.C.* The Mechanism of Mould Electromagnetic Stirring // Steel Times International. — 1998. — No. 9.
4. *Ilegbusi O. J. and Szekely J.* Three-Dimensional Velocity Fields for Newton and Non-Newtonian Metals Produced by a Rotating Magnetic Field // ISIJ Int. — 1989. — Vol. 29, № 6. — P. 462—468.

5. Partinen J. K., Saluja N., Szekely J., and Kirtley J. Experimental and Computational Investigation of Rotary Electromagnetic Stirring in a Woods Metal System // ISIJ Int. — 1994. — Vol. 34, № 9. — P. 707—714.
6. Natarajan T. T., El-Kaddah N. Finite Element Analysis of Electromagnetically Driven Flow in Sub-mold Stirring of Steel Billets and Slabs // ISIJ Int. — 1998. — Vol. 38, No. 7. — P. 707—714.
7. Kunstreich S., Nove M.C., Yves D. et al. In Mold Double Stirring System in Continuous Casting: Effect of Two Counter Rotating Magnetic Fields // Int. Congress Electromagn. Proc. of Materials. Paris, May 26—29, 1997: Proc. — Paris, 1997. — Vol. 2. — P. 355—365.
8. Найдек В. Л., Дубоделов В. И., Евдокимов В. Ф. и др. Двумерная интегро-дифференциальная модель распределения вихревых токов и электродинамических усилий в системе кристаллизатор-индукционный перемешиватель машины непрерывного литья заготовок // Электрон. моделирование. — 2004. — № 1. — С. 30—52.
9. Евдокимов В. Ф., Петрушенко Е. И. Интегральные уравнения для симметричных составляющих синусоидальных вихревых токов в сечении системы кристаллизатор—индукционный перемешиватель // Там же. — 2005. — 27, № 1. — С. 73—96.
10. Дубоделов В. И., Евдокимов В. Ф., Кондратенко И. П. и др. Блочный алгоритм реализации двумерной интегральной модели распределения синусоидальных вихревых токов и электродинамических усилий в кристаллизаторе с индукционным перемешивателем // Там же. — 2005. — 27, № 4. — С. 57—74.

Поступила 27.08.09

ЕВДОКИМОВ Виктор Федорович, д-р техн. наук, чл.-кор. НАН Украины, директор Ин-та проблем моделирования в энергетике им. Г.Е. Пухова НАН Украины. В 1963 г. окончил Харьковский политехнический ин-т. Область научных исследований — методы и устройства для математического моделирования, математическое и компьютерное моделирование энергетических систем.

КУЧАЕВ Александр Андреевич, д-р техн. наук, вед. науч. сотр. отдела МГД физико-технологического ин-та металлов и сплавов НАН Украины. В 1978 г. окончил Киевский ин-т инженеров гражданской авиации. Область научных исследований — моделирование электромагнитных полей.

ПЕТРУШЕНКО Евгений Иванович, канд. техн. наук, ст. науч. сотр., зав. отделом математического моделирования электромагнитных полей Ин-та проблем моделирования в энергетике им. Г.Е. Пухова НАН Украины. В 1960 г. окончил Новочеркасский политехнический ин-т, а в 1963 г. — Ростовский госуниверситет. Область научных исследований — моделирование электромагнитных полей.

КАСЬЯН Григорий Иванович, технический директор ЗАО «Донецкий электрометаллургический завод». В 1972 г. окончил Донецкий политехнический ин-т. Область научных исследований — внепечная обработка и непрерывная разливка стали.