УДК 681.324

Г. А. Мамедов, Т. М. Мансуров, д-ра техн. наук
Азербайджанский технический университет
(Республика Азербайджан, AZ1073 Баку, пр-т Г. Джавида, 25,
тел/факс: +994 (12) 438-87-66, E-mail: tofiq@pisem.net)

Моделирование процесса решения сложных задач в однородной структуре

(Статью представил чл.-кор. НАН Украины В. В. Васильев)

Исследована взаимосвязь между структурой алгоритмов и топологией однородной структуры, разработана исходная математическая модель сложных взаимосвязанных задач, определена последовательность процедур процесса отображения структур алгоритмов в топологию однородной структуры, рассмотрено структурно-топологическое моделирование процесса решения сложных взаимосвязанных задач, дана геометрическая интерпретация процесса отображения.

Досліджено взаємозв'язок між структурою алгоритмів і топологією однорідної структури, розроблено вихідну математичну модель складних взаємозв'язаних задач, визначено послідовність процедур процесу відображення структур алгоритмів у топологію однорідної структури, розглянуто структурно-топологічне моделювання процесу розв'язування складних взаємозв'язаних задач, дано геометричну інтерпретацію процесу відображення.

Ключевые слова: структурно-топологическое моделирование, взаимосвязанные задачи, однородная структура, топология.

Необходимость решения сложных задач возникает при исследовании, создании и управлении процессами функционирования сложных систем, к которым можно отнести современные системы проектирования сложных инженерных изделий, системы исследования и управления экспериментом при изучении сложных научных проблем и др. Основными свойствами таких систем являются функциональная целостность, сложность, параллельность работы элементов, переменность структуры, однородность и многофункциональность элементов. Перечисленные свойства позволяют качественно описать самые разнообразные сложные системы. Для количественного исследования сложной системы возможно применение функционального подхода, при котором сложная система рассматривается как набор связанных функциональных подсистем, и структурного подхода, при котором она представляется как набор более простых элементов, связанных между собой определенным способом [1—4]. Решение множества задач для таких систем связано с разработкой аппаратного, алгоритмического и программного обеспечения. При этом возникают вопросы структуризации (распараллеливания) задач, организации архитектуры однородной структуры (ОС) для реализации заданного класса задач, установления взаимосвязи между структурой задачи и топологией ОС и другие, что влияет на скорость и эффективность реализуемых процессов [5—8].

Постановка задачи. Проблемы, возникающие при исследовании взаимосвязи между структурой алгоритмов, программ и топологией ОС, оказывают существенное влияние на такие важные характеристики ОС как скорость и эффективность вычислений.

В настоящее время не существует единой теории, которая позволила бы решить эти проблемы. Получены отдельные результаты решения таких проблем, как синхронизация параллельных процессов, наиболее рациональная межмодульная коммуникация, определение необходимого числа элементарных модулей (ЭМ) для данного типа вычислений, способ распределения работ между модулями и др.

Схема функционирования ОС тесно связана с ее топологией и может быть задана с помощью специальных управляющих функций, первая из которых определяет разбиение структуры на подструктуры, а вторая задает каждой подструктуре режим работы. При разработке топологии ОС определяющими являются выбор структуры ЭМ и построение связи между ними с минимумом затрат и обеспечением необходимой пропускной способности для организации обмена данными между простыми задачами.

Исходная математическая модель. Как известно [9—11], сложная задача может представлять собой конечное множество связанных между собой простых задач. Обмен данными между рассматриваемой парой простых задач P_i и P_j можно осуществлять не только непосредственно, но и через промежуточные задачи, используя дуги, соединяющие промежуточные вершины. Тогда связанность простых задач характеризуется множеством путей L, где $l_{ij} \in L$ — путь между вершинами P_i и P_j, составленный из последовательности дуг, связывающих эти вершины.

Связанность C задачи характеризуется количеством информации, передаваемой между простыми задачами в процессе решения сложной задачи, и определяется матрицей связанности

$$C = |c_{ij}|, \; i, j = \overline{1, n},$$

где c_{ij} — количество стандартных слов, передаваемых от P_i к P_j в процессе решения задачи. В общем случае c_{ij} зависит от шага вычислений. Поэтому каждому шагу процесса реализации r соответствует матрица

$$C = |c_{ij}(r)|, \; i, j = \overline{1, n}, \; r = \overline{1, k}.$$

Анализ структуры сложных задач и разработка методов параллельных вычислений позволяет перейти к их решению с помощью ОС.

Структурно-топологическое моделирование. Процесс решения сложной задачи обычно состоит из двух этапов: планирования и реализации. На этапе планирования устанавливается взаимосвязь между структурой задачи и топологией ОС с последующим отображением и настройкой образуемой подструктуры на реализацию данной задачи. На этапе реализации выполняется непосредственно процесс решения сложных задач с известной структурой в ОС с заданной топологией за заданное время с обеспечением необходимой отказоустойчивости.

Пусть ОС состоит из определенного множества A взаимосвязанных ЭМ и настраивается с помощью программируемых коммутаторов, а алгоритм решения задач — соответственно из множества вершин и ребер (дуг) между ними (множество B). Поэтому на этапе планирования необходимо установить взаимосвязь между множествами A и B с последующим отображением множества B во множество A [10, 12, 13]. Отображением множества B во множество A называется правило, по которому каждому элементу множества B поставлен в соответствие один (или несколько) элементов множества A. Для обозначения отображения φ множества B во множество A используем запись $\varphi : B \to A$. Если при отображении $\varphi : B \to A$ каждому элементу из множества B соответствует один элемент из множества A, то отображение φ называется однозначным (оптимальным).

Для решения сложной задачи необходимо выполнить отображение параллельных алгоритмов $P_i (i=\overline{1,n})$, каждый из которых содержит соответственно $a_i, b_i, h_i (i=\overline{1,n})$ вершин (множество B), в однородную структуру $\Omega = Q_0 H$ с основанием (с нижней плоскостью) $Q_0 = AB$, содержащую A, B и H элементарных модулей (множество A) по соответствующим координатам, с целью минимизации числа занятых ЭМ по плоскостям (по оси z) коммутационно-вычислительной структуры и дальнейшей реализации данного алгоритма. Исходя из этих условий, ОС и P-алгоритмы условно представим в первом октанте декартовой системы координат XYZ. В процессе отображения в качестве полюсов $O_i (x_i, y_i, z_i)$ соответственно выберем левые нижние модули и вершины их оснований (плоскость, модули и вершины которой имеют минимальные значения по координате z). С учетом изложенного математическую постановку метода реализации множества задач сформулируем как совокупность последовательно выполняемых процедур.

1. Последовательно-одиночное отображение P-алгоритмов $P_i (i=\overline{1,n})$ в заданной области Ω однородной структуры, т.е. определение длины вектора l_i между двумя полюсами двух последовательно отображаемых алго-

ритмов по координатам этих полюсов с учетом того, что длина между двумя соседними вершинами без промежуточных вершин $l_i = 1$:

$$l_1(x_1, y_1, z_1) = \sqrt{(x_1 - x_1^1)^2 + (y_1 - y_1^1)^2 + (z_1 - z_1^1)^2} \ge 0,$$

$$l_i(x_i, y_i, z_i) = \sqrt{(x_{m_i+1} - x_i)^2 + (y_{m_i+1} - y_i)^2 + (z_{m_i+1} - z_i)^2} \ge m_i + 1,\ i = \overline{2, n}. \tag{1}$$

Здесь (x_1^1, y_1^1, z_1^1) — координаты выбранного полюса вершин ОС; (x_i, y_i, z_i) — координаты крайней вершины (полюса O_i) P-алгоритма $P_i\,(i = \overline{1, n})$, $m_i = x_i + b_i$, где b_i — абсцисса наиболее удаленной от оси ординат вершины P-алгоритма в собственной системе координат.

2. Определение условия взаимного непересечения двух последовательно отображаемых P-алгоритмов P_i и P_j, т.е. определение длины вектора l_{ij} между двумя крайними соседними вершинами по координатам этих вершин с учетом того, что длина вектора между двумя крайними соседними вершинами алгоритмов P_i и P_j без промежуточных вершин $l_{ij} = 1$:

$$l_{ij}(x_i, y_i, z_i, x_j, y_j, z_j) = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2} \ge 1,$$

$$i = \overline{1, n}, \quad j = i + 1, \quad i \ne j. \tag{2}$$

3. Минимизация значения целевой функции $K(z)$, которая определяет число занятых ЭМ по плоскостям (по оси z) ОС:

$$K(z) = V_\alpha^k (z_i + h_i),\ i = \overline{1, n}, \tag{3}$$

где V_α^k — операция R-дизъюнкции.

4. Реализация взаимосвязанной сложной задачи ЭМ занятой части ОС.

Таким образом, поставленная задача сводится к отысканию $\min K(z): z \in G_0$, где G_0 — область допустимых значений переменных, описываемая системой неравенств (1), (2), или таких ее значений, которые достаточно близки к оптимальным. Решение системы состоит из процедуры поиска и перебора локальных экстремумов по числу занятых ЭМ под вершинами P-алгоритма решения сложной взаимосвязанной задачи [14, 15]. Для определения локального экстремума применяем метод последовательно-одиночного отображения, являющийся разновидностью итерационного метода Гаусса—Зайделя, т.е. метода частичного улучшения по группам переменных, который заключается в последовательной циклической оптимизации функции цели по каждой из переменных. Пусть P-алгоритмы отображаются в ОС последовательно по одному и положения ранее отображенных P-алгоритмов фиксируются. Каждый P-алгоритм отображается так, что из всех возможных его положений на основе метода значимых переменных выбирается такое, при котором функция цели $K(z)$ достигает наименьшего значения только по переменным, являющимся параметрами отображаемого P-алгоритма. Тогда метод последовательно-одиночного отображения представим в виде итерационной формулы

$$K_i = K_{i-1} V_1 \min_{z_{ji} \in G_0} (z_{ji} + h_{ji}),\ i = \overline{t, n},\ K_0 = 0. \tag{4}$$

Для реализации данного метода оптимальное (однозначное) отображение P-алгоритмов $P_i(i = \overline{1, k})$ сводится к отображению в области Q_0 однородной структуры и осуществляется по итерационной формуле

$$K_{1i} = K_{1i-1} V_1 \min_{x_{ji} \in Q_0} (x_{ji} + a_{ji}),\ \ i = \overline{1,\ k},\ \ K_{10} = 0. \tag{5}$$

Эти формулы аналогичны (3). Если в (3) $k < n$, то в (4) $t = k + 1$.

При отображении из всех возможных положений P-алгоритма $P_i(i = \overline{1, k})$ выбираем такое, которое удовлетворяет следующим условиям:

1) отображение P-алгоритма на незанятой части области Q_0;

2) нахождение минимального значения абсциссы полюса O_i т.е. $x_i(i = \overline{1, k}) = \min_{x_i \in Q_0} f_i(y_i)$, где $f_i(y_i)$ — геометрическое место вершин возможного отображения полюса P-алгоритма $P_i(i = \overline{1, k})$;

3) непересечение границы C_{ji} области отображения оснований P-алгоритма P_{ji} с занятой частью Q_0'.

В результате отображения P-алгоритмов получим $\bigcup_{i=1}^{k} P_{ji} \subset Q_0$, а следовательно,

$$\bigcup_{i=1}^{k} P_{ji} \subset \Omega,\ \ (k \le n).$$

Если $k < n$, то для того чтобы получить $\bigcup_{j_i = j_{n-k}}^{n} P_{ji} \subset \Omega$, представим параметры, однозначно характеризующие P-алгоритмы $\bigcup_{i=1}^{k} P_{ji} \subset Q_0$, и их отображение в виде основной $C_{v_{oi}}$ $(i = 1)$ и вспомогательных $C_{v_{oj}}$ $(j = 2, 3, 4)$ матриц:

$$C_{v_{01}} = \begin{vmatrix} x_{j1} + a_{j1}, N_{j1}, x_{j1}, y_{j1}, z_{j1} + h_{j1}, a_{j1}, b_{j1} \\ x_{j2} + a_{j2}, N_{j2}, x_{j2}, y_{j2}, z_{j2} + h_{j2}, a_{j2}, b_{j2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{ji} + a_{ji}, N_{ji}, x_{ji}, y_{ji}, z_{ji} + h_{ji}, a_{ji}, b_{ji} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{jk} + a_{jk}, N_{jk}, x_{jk}, y_{jk}, z_{jk} + h_{jk}, a_{jk}, b_{jk} \end{vmatrix} =$$

$$= X + A, N, X, Y, Z + H, A, B;$$

$$C_{v_{02}} = \begin{vmatrix} x_{\omega 1}, N_{\omega 1} \\ x_{\omega 2}, N_{\omega 2} \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_{\omega i}, N_{\omega i} \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_{\omega k}, N_{\omega k} \end{vmatrix} = X, N; \quad C_{v_{03}} = \begin{vmatrix} y_{\gamma 1} + b_{\gamma 1}, N_{\gamma 1} \\ y_{\gamma 2} + b_{\gamma 2}, N_{\gamma 2} \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_{\gamma i} + b_{\gamma i}, N_{\gamma i} \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_{\gamma k} + b_{\gamma k}, N_{\gamma k} \end{vmatrix} = Y + B, N; \tag{6}$$

$$C_{v_{04}} = \begin{vmatrix} y_{\varphi 1}, N_{\varphi 1} \\ y_{\varphi 2}, N_{\varphi 2} \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_{\varphi i}, N_{\varphi i} \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_{\varphi k}, N_{\varphi k} \end{vmatrix} = Y, N,$$

где $v = \overline{1, \delta}$; $\delta \le n - 1$; x_{ji}, y_{ji}, z_{ji} — координаты полюса $O_i\ (i = \overline{1, n})$ алгоритма P_{ji}; a_{ji}, b_{ji}, h_{ji} — число вершин трехмерного алгоритма P_{ji}; N_{ji} — номер алгоритма P_{ji}.

Матрицы (6) построены так, что соблюдаются неравенства соответственно

$$x_{ji} + a_{ji} > x_{j, i-1} + a_{j, i-1};\ x_{\omega i} > x_{\omega, i-1};$$
$$y_{ji} + b_{ji} > y_{j, i-1} + b_{j, i-1};\ y_{\omega i} > y_{\omega, i-1}.$$

При отображении оставшихся $(n - k)$ P-алгоритмов $P_{j\mu}\ (\mu = \overline{k+1, n})$ в области Ω с основанием Q_0 может возникнуть одно из следующих условий:

4) отображение P-алгоритма P_{jk+1} в области Q_0 и непересечение с занятой областью Q_0' алгоритма P_{ji};

5) невозможность отображения P-алгоритма P_{jk+1} в области Q_0.

Рассмотрим два способа отображения P-алгоритма.

I. Алгоритм P_{jk+1} отображаем в соответствии с соотношением (5) так, чтобы выполнялись условия (1) и (2). Необходимо заметить, что если, воспользовавшись матрицей $C_{v_{01}}$ получим

$$|(x_{ji} + a_{ji}) - x_{jm}| > a_{jk+1} \quad \text{или} \quad |(y_{ji} + b_{ji}) - y_{jm}| > b_{jk+1},$$

то между P-алгоритмами P_{ji} и P_{jm} алгоритм P_{jk+1} не отображается , т.е. не выполняется условие (5).

В результате отображения P-алгоритма P_{jk+1} способом I получаем ξ предполагаемых отображений. Из отображений, удовлетворяющих условиям (1) и (2), выбираем только те, которые удовлетворяют и условию (3).

Пусть каждому предполагаемому отображению P-алгоритма P_{jk+1} в области Q_0 соответствуют параметры $x^{t_0}_{jk+1}$, $y^{t_0}_{jk+1}$ $(t_0 = \overline{1,\xi})$. Для проверки выполнения условия

$$\frac{P_{jk+1}(x^{t_0}_{jk+1}, y^{t_0}_{jk+1}) \subset Q_0}{\bigcup_{i=1}^{k} P_{ji}}$$

необходимо выполнить следующие процедуры:

из матрицы $C_{v_{01}}$ выделить подматрицу $C_{v_{11}}$, элементы строк которой удовлетворяют неравенству $x_{ji} + a_{ji} > x^{t_0}_{jk+1}$;

из матрицы $C_{v_{11}}$ образовать новую матрицу $C_{v_{21}}$, состоящую лишь из столбцов $X_{ji} + A_{ji}, N_{ji} \in C_{v_{02}}$;

из матрицы $C_{v_{02}}$ образовать матрицу $C_{v_{12}} = X_1, N_1$ строки которой удовлетворяют неравенству $x_{\omega i} > x^{t_0}_{jk+1} + a^{t_0}_{jk+1}$;

из матрицы $C_{v_{03}}$ образовать матрицу $C_{v_{13}} = Y_1 + B_1, N_1$, строки которой удовлетворяют неравенству $y_{\gamma i} + b_{\gamma i} > y^{t_0}_{jk+1}$;

из матрицы $C_{v_{04}}$ образовать матрицу $C_{v_{14}} = Y_1, N_1$, строки которой удовлетворяют неравенству $y_{\varphi i} > y^{t_0}_{jk+1} + b^{t_0}_{jk+1}$;

исключить из матрицы $C_{v_{21}}$ общие элементы с матрицами $C_{v_{12}}$, $C_{v_{13}}$, $C_{v_{14}}$.

Если в результате этого логического процесса матрица $C_{v_{21}}$ окажется тривиальной, то можно записать

$$\frac{P_{jk+1}(x^{t_0}_{jk+1}, y^{t_0}_{jk+1}) \subset Q_0}{\bigcup_{i=1}^{k} P_{ji}}$$

и, следовательно, параметрами отображения P-алгоритма P_{jk+1} будут $x^{t_0}_{jk+1}, y^{t_0}_{jk+1}, z^{t_0}_{jk+1}$, причем $z^{t_0}_{jk+1} \equiv 0$.

После проверки выполнения условия 4 и в случае позитивного результата отображаем P-алгоритм следующим способом.

II. Если окажется, что ни для одного $t_0 = \overline{1,\xi}$ матрица $C_{v_{21}}$ не тривиальна, то для определения параметров отображения P-алгоритма P_{jk+1} необходимо из матрицы $C_{v_{01}}$ сформировать новую матрицу $C_{v_{11}}$, в которой отсутствуют строки, удовлетворяющие условию

$$h_{ji} + z_{ji} \le H_{\gamma} = \min_{1 \le q \le k} \{ z_{iq}^{v} + h_{iq}^{v} \}; \;\; i = \overline{1,k}; \;\; \gamma = \overline{o,r}\,; \;\; r \le n-1. \tag{7}$$

Из матрицы $C_{v_{on}}$ $(n = \overline{2,4})$ образуем новые матрицы $C_{v_{in}}$ $(n = \overline{2,4})$, в которых отсутствуют строки, характеризующие P-алгоритмы при выполнении условия (7). При этом может оказаться, что $p_{jk+1} \not\subset Q_{\gamma}$, тогда необходимо перейти к выполнению процедуры II, либо $p_{jk+1} \subset Q_{\gamma}$, и тогда следует в матрицы (6) внести новые строки, характеризующие P-алгоритм P_{jk+1} и его отображение в области Ω согласно (5). Если в этом случае проекция P_{jk+1} содержит проекцию P_{jr} $(r = \overline{1,k})$, где P_{jr+1} — проекция P-алгоритма P_{jk+1} на Q_0, а P_{jr} — проекция P-алгоритма P_{jr} на Q_0, то строку, характеризующую P-алгоритм P_{jr}, необходимо исключить из матриц (6).

Рассмотренные процедуры I и II могут иметь следующую геометрическую интерпретацию.

На высоте H_{γ} проводим плоскость $Q_{\gamma} \| Q_0$. Отображение P-алгоритма P_{jk+1} сводится к отображению его проекции на область Q_{γ} с учетом проекции всех алгоритмов на эту же область, лежащих выше этой области. При этом исключаются из последующего рассмотрения все P-алгоритмы, отображенные между плоскостями Q_{γ} и Q_0. Этот процесс продолжаем до тех пор, пока все P-алгоритмы P_{ji} $(i = \overline{1,n})$ не будут отображены в области Ω.

Таким образом, введение матриц (6) дало возможность формализовать процесс отображения P-алгоритмов и свести его к выполнению последовательности логических операций, выполняемых значительно быстрее, чем арифметические.

The paper outlines a research of interrelation between the framework of algorithms and topology of a homogeneous framework. The authors have designed an initial mathematical model of composite interdependent problems, determined sequences of process procedures in mapping the framework of algorithms in the topology of a homogeneous framework, reviewed the structural-topological simulation of the process of solving the composite interdependent problems, and gave a geometrical interpretation of the mapping process.

1. *Погорелов В. И.* AutoCAD. Трехмерное моделирование и дизайн. — СПб. : БХВ-Петербург, 2004. — 288 с.
2. *Прокис Д.* Цифровая связь/ Пер. с англ. под ред. Д. Д. Кловского. — М. : Радио и связь, 2000. — 800 с.
3. *Рапопорт Э. Я.* Структурное моделирование объектов и систем управления с распределенными параметрами. — М. : Высшая школа, 2003. — 198 с.
4. *Ляпунцова Е. В., Мамедов Г. А.* Алгоритмическое решение T-уравнений// Электрон. моделирование. — 1995. — **17,** № 3. — С. 86—88.

5. *Iftode L., Singh J., Li K.* Scope Consistency: A Bridge Between RC and EC// Proc. of the 8-th ACM Symposium on Parallel Algorithms and Architectures, USA, June, 1996. — Princeton University Computer Science Department, 1996. — P. 277—308. — http://www./cs./princeton.edu/
6. *Лобас А. В., Луцкий Я. А., Николаев И. А.* Согласование параллельных алгоритмов с архитектурой параллельных вычислительных систем// Сб. науч. трудов Таганрогского радиотехн. ин-та. — 1996. — № 6. — С. 114—118.
7. *Евреинов Э. В., Мансуров Т. М.* Аппаратная поддержка обработки информации в интеллектуальных системах//Мат. Всесоюзной науч. конф. «Интеллектуализация систем управления» (ИСУ-91). — Баку: Азерб. гос. нефтяная академия, 1991. — С. 15, 16.
8. *Салум Х. Л.* Оценка структурной сложности системы// Кибернетика. — 1986. — № 4. — С. 8—12.
9. *Евреинов Э. В.* Однородные вычислительные системы, структуры и среды.— М. : Радио и связь, 1981. — 208 с.
10. *Мансуров Т. М., Касумов А. Б.* Отображение трехмерных алгоритмов в отказоустойчивую однородную вычислительную структуру//Мат. IY Междунар. семинара по теории телетрафика и компьютерному моделированию (МСТТКМ-4). — М. : Ин-т проблем передачи информации, 1992. — С. 101—103.
11. *Мансуров Т. М.* Методы организации функционирования однородных коммутационно-вычислительных структур// Ежемесячный науч.-техн. ж. по проводной и радиосвязи, телевидению, радиовещанию. — 2004. — № 8. — С. 30—35.
12. *Евреинов Э. В., Хорошевский В. Г.* Однородные вычислительные системы. — Новосибирск : Наука, 1978. — 320 с.
13. *Roosta S. H.* Parallel Processing and Parallel Algorithms: Theory and Computation. — NY : Springer-Verlag, 2000.
14. *Корнеев В. В.* Архитектура вычислительных систем с программируемой структурой. — Новосибирск : Наука, 1985. — 168 с.
15. *Xu Z., Hwang K.* Scalable Parallel Computing Technology, Architecture, Programming.— Boston : McGraw-Hill, 1998.

Поступила 10.06.09

МАМЕДОВ Гавар Амир оглы, д-р техн. наук, профессор, ректор Азербайджанского технического университета, зав. каф. «Автоматика и управление». В 1968 г. окончил Азербайджанский политехнический ин-т (ныне Азербайджанский технический университет). Область научных исследований — исследование переходных процессов в системах с распределенными параметрами.

МАНСУРОВ Тофиг Магомед оглы, д-р техн. наук, профессор, зав. каф. «Многоканальные телекоммуникационные системы» Азербайджанского технического университета. В 1977 г. окончил Московский электротехнический институт связи (ныне Московский технический университет связи и информатики). Область научных исследований — управление и организация процесса функционирования однородных систем, структур и сред.