МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
МЕТОДЫ И МОДЕЛИ

УДК 519.218.84 (045)

М. Е. Фриз, канд. техн. наук
Тернопольский государственный
технический университет им. И. Пулюя
(Украина, 46001, Тернополь, ул. Руська, 56,
тел. (0352) 253413, E-mail: mykh.fryz@gmail.com)
Л. Н. Щербак, д-р техн. наук
Национальный авиационный университет
(Украина, 03058, Киев, пр. Космонавта Комарова, 1,
тел. 4067545, E-mail: Prof_scherbak@ukr.net)

Эргодические свойства линейных процессов в задачах математического моделирования и статистического анализа случайных сигналов

(Статью представила канд. техн. наук Э.П. Семагина)

С использованием метода характеристических функций обоснована эргодичность стационарной в узком смысле линейной случайной последовательности с безгранично делимым порождающим процессом относительно математического ожидания, корреляционной функции, характеристической функции и функции распределения.

З використанням методу характеристичних функцій обґрунтовано ергодичність стаціонарної у вузькому розумінні лінійної випадкової послідовності з безмежно подільним породжуючим процесом відносно математичного сподівання, кореляційної функції, характеристичної функції та функції розподілу.

Ключевые слова: линейная последовательность, безгранично делимое распределение, характеристическая функция, эргодичность.

Линейные случайные процессы, как функционалы от процессов с независимыми приращениями, имеют важное прикладное значение в задачах математического моделирования и обработки случайных сигналов в радиотехнике, гидроакустике, радиофизике, геофизике, технической и медицинской диагностике, энергетике [1—6].

В [1] действительный линейный случайный процесс $\xi(t)$, $t \in (-\infty, \infty)$, заданный в некотором вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathrm{F}, P\}$ определен так:

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau, t)\, d\eta(\tau), \quad t \in (-\infty, \infty), \tag{1}$$

где $\varphi(\tau, t), \tau, t \in (-\infty, \infty)$ — действительная неслучайная функция такая, что $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(\tau, t)| \, d\tau < \infty, \ \forall t; \ \eta(\tau), \ \tau \in (-\infty, \infty), \ P(\eta(0)=0)=1$ — действительный стохастически непрерывный случайный процесс с независимыми приращениями.

В [1] получена общая форма безгранично делимой характеристической функции линейного случайного процесса, что позволяет осуществлять вероятностный анализ распределений исследуемых сигналов, изучать вероятностные свойства их преобразований линейными и нелинейными системами, находить моментные и кумулянтные функции всех порядков, решать задачи идентификации параметров случайных сигналов. Конструктивный характер представления линейных случайных процессов дает возможность учитывать в соответствующих математических моделях физический механизм порождения исследуемых сигналов и легко строить их компьютерные имитационные модели.

При выполнении прикладного статистического анализа случайных сигналов важным и всегда желаемым для исследователя их свойством является эргодичность, которая позволяет существенно сократить необходимое число наблюдений [7—12]. На практике, как правило, эргодичность стационарного процесса постулируется перед выполнением экспериментов. Некоторые авторы [13] предлагают использовать методы проверки статистических гипотез относительно эргодичности процесса.

Покажем, что эргодичность стационарного линейного процесса является характерным свойством для этой модели. Иными словами, если в некоторой прикладной задаче установлено, что математической моделью исследуемого сигнала является стационарный линейный процесс, то отсюда следует, что этот сигнал эргодичен, и поэтому становятся ненужными дополнительные гипотезы или тесты. Заметим также, что эргодические свойства важны и для прикладных применений линейных периодических случайных процессов [6, 14], где стационарными (и эргодическими) будут последовательности отсчетов таких процессов, выбираемые через период.

С точки зрения общей эргодической теории стационарные случайные процессы порождаются динамическими системами, принадлежащими классу автоморфизмов пространств с мерой [15]. Эргодические свойства динамических систем имеют важное значение в физике, биологии, химии [15], технике (в частности, в энергетике). Поэтому использование эргодических линейных случайных процессов для математического или компьютерного моделирования динамических систем также является актуальной задачей.

Постановка задачи. При осуществлении статистического анализа случайных сигналов с использованием цифровых вычислительных средств используется вариант модели (1) с дискретным временем — линейная случайная последовательность, свойства которой тесно связаны со свойствами линейного случайного процесса с непрерывным временем.

Действительной линейной случайной последовательностью (ЛСП) ξ_t, $t \in Z$, будем называть случайную последовательность вида

$$\xi_t = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \varphi_{\tau,t} \zeta_\tau, \tag{2}$$

где $\varphi_{\tau,t}$, $t, \tau \in Z$ — действительная неслучайная функция (ядро ЛСП), удовлетворяющая условию $\sum_{\tau=-\infty}^{\infty} |\varphi_{\tau,t}| < \infty$, $\forall t \in Z$; ζ_τ, $\tau \in Z$, — последовательность действительных независимых безгранично делимых случайных величин.

Кроме того, будем считать ζ_τ, $\tau \in Z$, последовательностью одинаково распределенных случайных величин с конечной дисперсией $D\zeta_\tau = \sigma^2 < \infty$. Вместе с $\sum_{\tau=-\infty}^{\infty} |\varphi_{\tau,t}| < \infty$, $\forall t \in Z$, указанные условия являются достаточными для сходимости ряда (2) при любом t как с вероятностью единица, так и в среднеквадратическом смысле.

Если в (2) $\varphi_{\tau,t} = \varphi_{t-\tau}$, то ЛСП является стационарной в узком смысле (и далее всюду понятие стационарности рассматривается в узком смысле):

$$\xi_t = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \varphi_{t-\tau} \zeta_\tau = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \varphi_\tau \zeta_{t-\tau}, \tag{3}$$

где $\sum_{\tau=-\infty}^{\infty} |\varphi_\tau| < \infty$.

Основной задачей в данном случае является обоснование эргодических свойств последовательности (3). Для этого рассмотрим необходимые свойства ЛСП, понятия, связанные с эргодическими свойствами стационарных случайных последовательностей, а тогда покажем, что они являются характерными для ЛСП (3).

Свойства линейных случайных последовательностей. Поскольку ζ_τ, $\tau \in Z$, — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с безгранично делимым распределением и конечной дисперсией σ^2, она задается одномерной характеристической функцией в форме А. Н. Колмогорова [16]:

$$f_\zeta(u) = Me^{iu\zeta_\tau} = \exp\left[iau + \int_{-\infty}^{\infty} (e^{iux} - 1 - iux) \frac{dK(x)}{x^2} \right], \; u \in (-\infty, \infty), \; i = \sqrt{-1},$$

где $a = M\zeta_\tau$; $K(x), x \in (-\infty, \infty)$, — неубывающая функция с ограниченной вариацией, такая, что $K(-\infty) = 0, K(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} dK(x) = D\zeta_\tau = \sigma^2$.

Одномерная характеристическая функция ЛСП (2) имеет вид

$$f_\xi(u; t) = Me^{iu\xi_t} = \prod_{\tau=-\infty}^{\infty} f_\zeta(u\varphi_{\tau,t}) =$$

$$= \exp\left[iau \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \varphi_{\tau,t} + \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{iux\varphi_{\tau,t}} - 1 - iux\varphi_{\tau,t}) \frac{dK(x)}{x^2} \right] \tag{4}$$

(бесконечное произведение характеристических функций в (4) сходится равномерно по u в каждом конечном интервале к характеристической функции $f_\xi(u; t) \, \forall t$, поскольку ряд (2) сходится с вероятностью единица). Соответственно m-мерная характеристическая функция ЛСП (2) имеет вид

$$f_\xi(u_1, u_2, ..., u_m; t_1, t_2, ..., t_m) = M \exp\left(i \sum_{k=1}^{m} u_k \xi_{t_k} \right) = \prod_{\tau=-\infty}^{\infty} f_\zeta \left(\sum_{k=1}^{m} u_k \varphi_{\tau, t_k} \right) =$$

$$= \exp\left[ia \sum_{k=1}^{m} u_k \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \varphi_{\tau, t_k} + \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{ix \sum_{k=1}^{m} u_k \varphi_{\tau, t_k}} - 1 - ix \sum_{k=1}^{m} u_k \varphi_{\tau, t_k} \right) \frac{dK(x)}{x^2} \right]. \tag{5}$$

Из (4) при $\varphi_{\tau,t} = \varphi_{t-\tau}$ получим одномерную характеристическую функцию ЛСП (3):

$$f_\xi(u) = \exp\left[iau \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \varphi_\tau + \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{iux\varphi_\tau} - 1 - iux\varphi_\tau) \frac{dK(x)}{x^2} \right]. \tag{6}$$

Далее нам потребуется также двумерная характеристическая функция стационарной ЛСП (3). Учитывая, что $\varphi_{\tau,t} = \varphi_{t-\tau}$, из (5) получаем:

$$f_\xi(u_1, u_2; s) = \exp\left[ia(u_1 + u_2) \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \varphi_\tau + \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{ix(u_1\varphi_\tau + u_2\varphi_{\tau+s})} - 1 - \right.$$

$$\left. - ix(u_1\varphi_\tau + u_2\varphi_{\tau+s})) \frac{dK(x)}{x^2} \right], \quad s = t_2 - t_1 \,. \tag{7}$$

Из (6) и (7) находим математическое ожидание и корреляционную функцию ЛСП (3):

$$M\xi_\tau = a\sum_{\tau=-\infty}^{\infty}\varphi_\tau = \text{const},\ \ R_s = \sigma^2\sum_{\tau=-\infty}^{\infty}\varphi_\tau\varphi_{\tau+s},\ s\in Z.$$

Эргодические свойства стационарных ЛСП. Задача изучения стационарных последовательностей является частным случаем задачи изучения сохраняющих меру обратимых преобразований (автоморфизмов) некоторого пространства с мерой [17]. С этой точки зрения эргодичность стационарных последовательностей глубоко изучена [17—23]. Обобщая теоретико-вероятностный смысл этих результатов можно дать следующее определение.

Определение. Пусть ξ_t, $t\in Z$, — стационарная случайная последовательность, заданная в некотором вероятностном пространстве $\{\Omega, F, P\}$ со значениями в измеримом пространстве $\{X, B\}$ (где B — σ-алгебра борелевских множеств из X); $f(x_1, x_2, ..., x_m)$, $m\geq 1$, — некоторая функция, измеримая в $\{X^m, B^m\}$, причем существует математическое ожидание $Mf(\xi_{t_1}, \xi_{t_2}, ..., \xi_{t_m}) < \infty$, $\forall t_1, t_2, ..., t_m \in Z$.

Последовательность ξ_t, $t\in Z$, называется эргодической, если для любой функции $f(x_1, x_2, ..., x_m)$, удовлетворяющей указанным выше условиям, с вероятностью единица

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} f(\xi_{t_1+t}, \xi_{t_2+t}, ..., \xi_{t_m+t}) = Mf(\xi_{t_1}, \xi_{t_2}, ..., \xi_{t_m}),\ \forall t_1, t_2, ..., t_m\in Z. \quad (8)$$

Замечания. 1. Если ξ_t, $t\in Z$, — действительный процесс, то $X = R$. Но поскольку далее будем рассматривать также комплекснозначные функции $f(x_1, x_2, ..., x_m)$, будем полагать $X = C$.

2. Можно рассматривать сходимость в (8) и в среднеквадратическом смысле, как это сделано, например, в [9]. Тогда надо дополнительно требовать существования $M\left|f(\xi_{t_1}, \xi_{t_2}, ..., \xi_{t_m})\right|^2 < \infty$, $\forall t_1, t_2, ..., t_m \in Z$. Будем, по возможности, рассматривать оба типа сходимости (с вероятностью единица и в среднеквадратическом смысле), используя следующие обозначения: $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n = a$ с вероятностью единица; $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n = a$ с вероятностью единица и в среднеквадратическом смысле; $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n = a$ в среднеквадратическом смысле.

В прикладных исследованиях часто интересуются только такими функциями $f(x_1, x_2, ..., x_m)$, которые позволяют изучать эргодичность относительно частных вероятностных характеристик последовательности ξ_t [7, 10—12].

Определение. Стационарная последовательность ξ_t, $t \in Z$, называется эргодической относительно математического ожидания $M\xi_t$, если с вероятностью единица

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} \xi_t = M\xi_t.$$

Здесь для (8) $m=1$, $f(x)=x$, $t_1=0$.

Определение. Стационарная последовательность ξ_t, $t \in Z$, называется эргодической относительно корреляционной функции $R_s = M((\xi_t - M\xi_t)(\xi_{t+s} - M\xi_t))$, $s \in Z$, если с вероятностью единица

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} (\xi_t - M\xi_t)(\xi_{t+s} - M\xi_t) = R_s.$$

Здесь для (8) $m=2$, $f(x_1, x_2) = (x_1 - M\xi_t)(x_2 - M\xi_t)$, $t_1 = 0$, $t_2 = s$.

Определение. Стационарная последовательность ξ_t, $t \in Z$, называется эргодической относительно одномерной функции распределения $F_\xi(y) = P(\xi_t < y)$, $y \in R$, если с вероятностью единица

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} U(y - \xi_t) = F_\xi(y), \quad U(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0, \\ 1, & y > 0, \end{cases}$$

где $U(y)$ — функция Хевисайда (для (8) здесь $m=1$, $f(x) = U(y-x)$, $t_1 = 0$).

Определенные выше понятия эргодичности могут быть рассмотрены также в смысле сходимости в среднем квадратическом [7, 10 — 12]. Понятно, что существуют последовательности, являющиеся эргодическими, например, относительно математического ожидания, но не эргодическими относительно корреляционной функции [10, 11] (и тем более не эргодическими в случае (8)).

Эргодичность стационарной ЛСП относительно математического ожидания и корреляционной функции.

Теорема 1. Пусть ξ_t, $t \in Z$, — стационарная ЛСП (3) с $M\zeta_\tau = a$ и $D\zeta_\tau = \sigma^2 < \infty$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} \xi_t = M\xi_t$$

с вероятностью единица и в среднеквадратическом смысле.

Доказательство. Поскольку ξ_1, $t \in Z$, определена в виде (3), то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} \xi_t = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \varphi_\tau \zeta_{t-\tau} = \lim_{n\to\infty} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \varphi_\tau \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} \zeta_{t-\tau} =$$

$$=\sum_{\tau=-\infty}^{\infty}\varphi_{\tau}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\zeta_{t-\tau}.$$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{t=1}^{n}\zeta_{t-\tau}=a,\ \forall\tau$, с вероятностью единица и в среднеквадратическом смысле. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{t=1}^{n}\xi_t=a\sum\limits_{\tau=-\infty}^{\infty}\varphi_{\tau}=M\xi_t$ с вероятностью единица и в среднеквадратическом смысле.

Таким образом, стационарная ЛСП (3) является эргодической относительно математического ожидания.

Теорема 2. Пусть $\xi_t,\ t\in Z$, — стационарная ЛСП (3) с $M\zeta_{\tau}=a$ и $D\zeta_{\tau}=\sigma^2<\infty$. Тогда с вероятностью единица

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(\xi_t-M\xi_t)(\xi_{t+s}-M\xi_t)=R_s,\ s\in Z,$$

где R_s — корреляционная функция последовательности ξ_t.

Доказательство. Обозначим $\varsigma_{t,s}=(\xi_t-M\xi_t)(\xi_{t+s}-M\xi_t)$. Тогда

$$\varsigma_{t,s}=\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}\varphi_k\zeta_{t-k}-a\sum_{k=-\infty}^{\infty}\varphi_k\right)\left(\sum_{l=-\infty}^{\infty}\varphi_l\zeta_{t+s-l}-a\sum_{l=-\infty}^{\infty}\varphi_l\right)=$$

$$=\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}\varphi_k\mathring{\zeta}_{t-k}\right)\left(\sum_{l=-\infty}^{\infty}\varphi_l\mathring{\zeta}_{t+s-l}\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\varphi_k\varphi_l\mathring{\zeta}_{t-k}\mathring{\zeta}_{t+s-l},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\varsigma_{t,s}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\varphi_k\varphi_l\mathring{\zeta}_{t-k}\mathring{\zeta}_{t+s-l}=$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\varphi_k\varphi_l\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\mathring{\zeta}_{t-k}\mathring{\zeta}_{t+s-l},$$

где $\mathring{\zeta}_{\tau}=\zeta_{\tau}-a\,(M\mathring{\zeta}_{\tau}=0)$.

Обозначим $\widetilde{\zeta}_t=\mathring{\zeta}_{t-k}\mathring{\zeta}_{t+s-l}$. При фиксированных k, s, l $\widetilde{\zeta}_t,\ t\in Z$, — является стационарной случайной последовательностью, причем, если $s=l-k$, то $M\widetilde{\zeta}_t=\sigma^2$, а при $s\neq l-k$ $M\widetilde{\zeta}_t=0$. Поскольку последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин является эргодической [17, 18, 21], то с вероятностью единица $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{t=1}^{n}\mathring{\zeta}_{t-k}\mathring{\zeta}_{t+s-l}=\sigma^2$, если $s = l - k$, и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{t=1}^{n} \overset{\circ}{\zeta}_{t-k} \overset{\circ}{\zeta}_{t+s-l} = 0$, если $s \neq l - k$. Таким образом, с вероятностью единица

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} \varsigma_{t,s} = \sigma^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_k \varphi_{k+s} = R_s.$$

Замечание. Если существует $M|\zeta_\tau|^4 < \infty, \forall\tau$, то теорема 2 справедлива также в смысле сходимости в среднем квадратичном, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} (\xi_t - M\xi_t)(\xi_{t+s} - M\xi_t) = R_s.$$

Следовательно, стационарная ЛСП эргодична относительно корреляционной функции.

Эргодичность стационарной ЛСП относительно характеристической функции. Выше показано, что для линейных случайных процессов существуют общие изображения их безгранично делимых характеристических функций. Но получить в явном виде выражения для соответствующих функций и плотностей распределения или даже выразить в конечной форме эти функции через элементарные или известные специальные функции не удается [1] (кроме частных случаев, например, гауссовского распределения). Поэтому в задачах вероятностного, а также статистического анализа негауссовских линейных случайных процессов метод характеристических функций играет основную роль.

Определение. Эмпирической характеристической функцией (ЭХФ) стационарной случайной последовательности ξ_t, $t \in Z$, называется статистика вида

$$\hat{f}_n(u) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} e^{iu\zeta_t}, \; u \in (-\infty, \infty), \; i = \sqrt{-1}.$$

ЭХФ используется для оценивания характеристических функций случайных величин и процессов, а также их параметрической идентификации в разнообразных прикладных задачах [24, 25]. Однако, свойства эргодичности при этом просто постулируются. Легко видеть, что $M\hat{f}_n(u) = Me^{iu\xi_t} = f_\xi(u)$, т. е. ЭХФ является несмещенной оценкой характеристической функции $f_\xi(u)$ стационарной случайной последовательности.

Теорема 3. Пусть ξ_t, $t \in Z$, — стационарная ЛСП (3) с $M\zeta_\tau = a$ и $D\zeta_\tau = \sigma^2 < \infty$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \hat{f}_n(u) = f_\xi(u)$ для любого u с вероятностью единица в среднеквадратическом смысле.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем сначала, что $\lim\limits_{n\to\infty}\hat{f}_n(u)=f_\xi(u)$. Дисперсия ЭХФ комплекснозначной функции для любого u имеет вид

$$D\hat{f}_n(u)=M\,(\,\hat{f}_n(u)-f_\xi(u))\,(\,\overline{\hat{f}_n(u)-f_\xi(u)})=M\,(\,\hat{f}_n(u)\,\overline{\hat{f}_n(u)})-|f_\xi(u)|^2.$$

С учетом (6) запишем

$$|f_\xi(u)|^2=f_\xi(u)\,\overline{f_\xi(u)}=f_\xi(u)\,f_\xi(-u)=$$

$$=\exp\left[\sum_{\tau=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(e^{iux\varphi_\tau}+e^{-iux\varphi_\tau}-2)\,\frac{dK(x)}{x^2}\right]=$$

$$=\exp\left[2\sum_{\tau=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(\cos(ux\varphi_\tau)-1)\,\frac{dK(x)}{x^2}\right]. \tag{9}$$

Рассмотрим теперь соотношение

$$M\,(\,\hat{f}_n(u)\,\overline{\hat{f}_n(u)})=\frac{1}{n^2}\sum_{t_1=1}^{n}\sum_{t_2=1}^{n}M\exp[iu(\xi_{t_1}-\xi_{t_2})].$$

Поскольку ξ_t стационарна, обозначим $M\exp\lfloor iu(\xi_{t_1}-\xi_{t_2})\rfloor=f_{\Delta\xi}(u;\ s)$, $s=t_2-t_1$. Учитывая, что $M\exp[iu(\xi_{t_1}-\xi_{t_2})]=\overline{M\exp[iu(\xi_{t_2}-\xi_{t_1})]}$, а также $M\exp\lfloor iu(\xi_{t_1}-\xi_{t_2})\rfloor=1$ при $t_1=t_2$, получаем

$$M\,(\,\hat{f}_n(u)\,\overline{\hat{f}_n(u)})=\frac{1}{n}\left(1+2\sum_{s=1}^{n-1}\frac{n-s}{n}\operatorname{Re}f_{\Delta\xi}(u;\ s)\right). \tag{10}$$

Поскольку $f_{\Delta\xi}(u;s)=f_\xi(u;-u;s)$, с учетом (7) запишем

$$f_{\Delta\xi}(u;s)=\exp\left[\sum_{\tau=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(e^{iux(\varphi_\tau-\varphi_{\tau+s})}-1-iux(\varphi_\tau-\varphi_{\tau+s}))\,\frac{dK(x)}{x^2}\right].$$

Обозначим

$$\psi(u)=\int_{-\infty}^{\infty}(e^{iux}-1-iux)\,\frac{dK(x)}{x^2}.$$

Функция $\psi(u)$ является равномерно непрерывной по $u\in R$, причем $\psi(0)=0$. Поскольку $\sum\limits_{\tau=-\infty}^{\infty}|\varphi_\tau|<\infty$, то $\varphi_\tau\to 0$ при $|\tau|\to\infty$. Отсюда следует

$$\lim_{s\to\infty}\sum_{\tau=-\infty}^{\infty}\psi(u(\varphi_\tau-\varphi_{\tau+s}))=\sum_{\tau=-\infty}^{\infty}(\psi(u\varphi_\tau)+\psi(-u\varphi_\tau)),\ \forall u.$$

Таким образом,

$$\lim_{s\to\infty} f_{\Delta\xi}(u;s) = \exp\left[\sum_{\tau=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(e^{iux\varphi_\tau}+e^{-iux\varphi_\tau}-2)\frac{dK(x)}{x^2}\right].$$

С учетом (9) можно записать

$$\lim_{s\to\infty} f_{\Delta\xi}(u;s) = |f_\xi(u)|^2. \qquad (11)$$

Понятно, что $\lim\limits_{s\to\infty}\mathrm{Re} f_{\Delta\xi}(u;s) = |f_\xi(u)|^2$. Запишем теперь (10) в виде

$$M(\hat{f}_n(u)\overline{\hat{f}_n(u)}) = \sum_{s=0}^{n-1} a_{ns}\mathrm{Re} f_{\Delta\xi}(u;s),$$

где $a_{n0}=1/n$, $a_{ns}=\dfrac{2(n-s)}{n^2}$, $s=\overline{1,n-1}$. Видно, что $a_{ns}\to 0$ при $n\to\infty$, $\forall s$, и $\sum\limits_{s=0}^{n-1} a_{ns}=1$, $\forall n$. Поскольку $\lim\limits_{s\to\infty}\mathrm{Re} f_{\Delta\xi}(u;s) = |f_\xi(u)|^2$, из теоремы Теплица [26] следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} M(\hat{f}_n(u)\overline{\hat{f}_n(u)}) = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{s=0}^{n-1} a_{ns}\mathrm{Re} f_{\Delta\xi}(u;s) = |f_\xi(u)|^2$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} D\,\hat{f}_n(u)=0$, $\forall u$, откуда получаем справедливость равенства $\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\,\hat{f}_n(u) = f_\xi(u)$, $\forall u$. Согласно L_r-эргодической теореме [19] из $\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\,\hat{f}_n(u) = f_\xi(u)$ следует, что $\lim\limits_{n\to\infty}\hat{f}_n(u) = f_\xi(u)$ с вероятностью единица.

Таким образом, стационарная ЛСП (3) эргодична относительно характеристической функции и ЭХФ — ее состоятельная оценка. Из эргодичности стационарной ЛСП относительно характеристической функции следует ее эргодичность относительно функции распределения.

Замечания. 1. Суть полученного соотношения (11) состоит в том, что характеристическая функция случайной величины $\xi_{t_1}-\xi_{t_2+s}$ при $s\to\infty$ стремится к характеристической функции симметризованной [19] случайной величины, т.е. случайные величины ξ_{t_1} и ξ_{t_2+s} при $s\to\infty$ становятся ассимптотически независимыми.

2. Очевидно, что любая реализация статистики $\hat{f}_n(u)$ является характеристической функцией. Поэтому из равенства $\lim\limits_{n\to\infty}\hat{f}_n(u) = f_\xi(u)$, $\forall u$, с вероятностью единица следует также, что эта сходимость с вероятностью единица равномерна по u в любом конечном интервале.

Выводы. На основе анализа свойств стационарной линейной случайной последовательности методом характеристических функций получены следующие результаты.

1. Обоснована эргодичность стационарной линейной случайной последовательности относительно математического ожидания и корреляционной функции.

2. Получено выражение для дисперсии эмпирической характеристической функции стационарной линейной случайной последовательности, чем обоснована ее эргодичность относительно характеристической функции и функции распределения.

3. Основное прикладное значение полученных эргодических свойств состоит в возможности осуществления статистического оценивания вероятностных характеристик стационарной линейной случайной последовательности (функций распределения, характеристических функций, моментных функций) с использованием усреднения по времени.

Using a characteristic function method the ergodicity with respect to mathematical expectation, correlation function, characteristic function and distribution function of strongly stationary linear random sequence driven by infinitely divisible innovations has been proven.

1. *Марченко Б. Г.* Метод стохастических интегральных представлений и его приложения в радиотехнике. — Киев : Наук. думка, 1973. — 191 с.
2. *Марченко Б. Г., Щербак Л. Н.* Линейные случайные процессы и их приложения. — Киев : Наук. думка, 1975. — 143 с.
3. *Марченко В. Б.* Ортогональные функции дискретного аргумента и их приложения в геофизике. — Киев : Наук. думка, 1992. — 209 с.
4. *Марченко Б. Г., Мыслович М. В.* Вибродиагностика подшипниковых узлов электрических машин. — Киев : Наук. думка, 1992. — 192 с.
5. *Марченко Б. Г., Мулик Н. В., Фриз М. Є.* Обґрунтування математичної моделі газонавантажень // Вісн. Тернопільського держ. тех. ун-ту ім. І. Пулюя. — 2005. — № 2. — С. 138 —143.
6. *Марченко Б. Г., Марченко Н. Б., Млинко Б. Б., Фриз М. Є.* Дослідження ймовірнісних характеристик та ідентифікація інформативних ознак стохастично-періодичного світлового біосигналу // Електроніка та системи управління. — 2007, № 1 (11). — С. 73—79.
7. *Бабак В. П., Марченко Б. Г., Фриз М. Є.* Теорія ймовірностей, випадкові процеси та математична статистика. — Київ: Техніка, 2004. — 288 с.
8. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров: Пер. с англ. — М. : Наука, 1974. — 832 с.
9. *Розанов А. Ю.* Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика. — М. : Наука, 1989. — 320 с.
10. *Рытов С. М.* Введение в статистическую радиофизику. Ч. 1. Случайные процессы. — М. : Наука, 1976. — 494 с.
11. *Тихонов В. И.* Статистическая радиотехника. — М. : Радио и связь, 1982. — 624 с.
12. *Волков И. К., Зуев С. М., Цветкова Г. М.* Случайные процессы. — М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1999. — 448 с.

13. *Domowitz I., El-Gamal M.* A Consistent Nonparametric Test of Ergodicity for Time Series with Applications // Journal of Econometrics. —2 001. — **102**. — Issue 2. — P. 365 —398.
14. *Марченко Б. Г.* Лінійні періодичні процеси // Пр. Ін-ту електродинаміки НАН України. Електротехніка. — Київ : ІЕД НАН України, 1999. — С. 172—185.
15. *Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В.* Эргодическая теория. — М. : Наука, 1980. — 384 с.
16. *Гнеденко Б. В.* Курс теории вероятностей. — М. : Наука, 1988. — 448 с.
17. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов. — М. : Наука, 1977. — 570 с.
18. *Дуб Дж. Л.* Вероятностные процессы: Пер. с англ. — М. : Изд-во ин. лит., 1956. — 607 с.
19. *Лоэв М.* Теория вероятностей: Пер. с англ. — М. : Изд-во ин. лит., 1962. — 720 с.
20. *Ширяев А. Н.* Вероятность. — М. : Наука, 1980. — 576 с.
21. *Коваленко И. Н., Кузнецов Н. Ю., Шуренков В. М.* Случайные процессы: Справочник. — Киев : Наук. думка, 1983. — 368 с.
22. *Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А.* Теория вероятностей. Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы. — М. : Наука, 1987. — 400 с.
23. *Gray R. M.* Probability, Random Processes and Ergodic Properties. — NY : Springer Verlag, 2001. — 218 p.
24. *Knight J. I., Yu J.* Empirical Characteristic Function in Time Series Estimation // Econometric Theory. — 2002. — **18**. — Issue 03. — P. 691—721.
25. *Yu J.* Empirical Characteristic Function Estimation and Its Applications // Econometric Reviews. — Philadelphia: Taylor & Francis, 2004. — **23**. — P. 93—123.
26. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3-х томах. Т. 2. — М. : Физматлит, 2003. — 864 с.

Поступила 25.03.09;
после доработки 06.10.09

ФРИЗ Михаил Евгеньевич, канд. техн. наук, доцент кафедры компьютерных наук Тернопольского государственного технического университета им. И. Пулюя, который окончил в 1996 г. Область научных исследований — математическое и компьютерное моделирование, статистическая обработка сигналов, информационно-измерительные системы.

ЩЕРБАК Леонид Николаевич, д-р техн. наук, профессор кафедры информационно-измерительных систем Национального авиационного университета. В 1961 г. окончил Харьковский авиационный ин-т. Область научных исследований — статистическая теория сигналов и систем, теория измерений.