

## Закономерности проникновения магнитного потока в модельные гранулированные сверхпроводники

И.Б. Краснюк, М.В. Залуцкий

*Физико-технический институт им. А.А. Галкина НАНУ  
ул. Р. Люксембург, 72, г. Донецк, 83114, Украина  
E-mail: kras@kinetic.ac.donetsk.ua*

Статья поступила в редакцию 28 марта 2006 г., после переработки 22 августа 2006 г.

Рассмотрен процесс проникновения магнитного поля в высокотемпературный гранулированный сверхпроводник, который занимает полупространство  $x \geq 0$ . На границе сверхпроводника амплитуда магнитного поля изменяется по степенному закону  $b(0, t) = b_0(1 + t/t_0)^m$ ,  $m > 0$ , в нормированных переменных, где  $t_0$  — время выхода на скейлинговое поведение. В эксперименте реализуется ситуация  $m = 1$ . Сверхпроводник предполагается идеальным в том смысле, что движение гипервихря со скоростью  $v(j, b)$  (где  $j = J/J_c$ ,  $J_c$  — плотность критического тока) определяет единственный диссипативный процесс вязкого течения вихрей, а рождение–уничтожение вихрей не учитывается. Показано, что эволюция амплитуды магнитного поля удовлетворяет известному уравнению пористой среды, или уравнению Бусинесска с конвекцией. Получено автомодельное решение соответствующей начально-краевой задачи. Определены аналитические формулы для координаты фронта магнитной волны и скорости проникновения магнитного поля, зависящие от параметра накачки  $m$  и параметров гранулированного сверхпроводника (например, джозефсоновской глубины проникновения и плотности критического тока). Указан критерий возникновения терромагнитных неустойчивостей при немонотонной зависимости критического тока от амплитуды магнитного поля (пик-эффект). Даны количественные оценки минимальной скорости возникновения дендритной структуры. Проведено сравнение полученных результатов с экспериментами для плоскопараллельной пластины в перпендикулярном возрастающем со временем магнитном поле.

Розглянуто процес проникнення магнітного поля у високотемпературний гранульований надпровідник, який займає напівпростір  $x \geq 0$ . На межі надпровідника амплітуда магнітного поля змінюється по степеневому закону:  $b(0, t) = b_0(1 + t/t_0)^m$ ,  $m > 0$ , у нормованих змінних, де  $t_0$  — час виходу на скейлінгове поведіння. В експерименті реалізується ситуація  $m = 1$ . Надпровідник передбачається ідеальним у тому розумінні, що рух гіпервихря зі швидкістю  $v(j, b)$  (де  $j = J/J_c$ ,  $J_c$  — густина критичного струму) визначає єдиний дисипативний процес в'язкої течії вихорів, а народження–знищення вихорів не враховується. Показано, що еволюція амплітуди магнітного поля задовольняє відомому рівнянню пористої середі, або рівнянню Бусинесска з конвекцією. Отримано автомодельне рішення відповідної початково-крайової проблеми. Визначено аналітичні формули для координати фронту магнітної хвилі і швидкості проникнення магнітного поля, що залежать від параметра накачування  $m$  та параметрів гранульованого надпровідника (наприклад, джозефсонівської глибини проникнення і густини критичного струму). Зазначено критерій виникнення терромагнітних нестійкостей при немонотонній залежності критичного струму від амплітуди магнітного поля (пик-ефект). Наведено кількісні оцінки мінімальної швидкості виникнення дендритної структури. Проведено порівняння отриманих результатів з експериментами для плоскопараллельної пластины в перпендикулярному магнітному полі, що зростає з часом.

PASC: 74.81.Bd Гранулированные, текстурированные плавлением, аморфные и композитные сверхпроводники;  
74.25.Qt Вихревые решетки, пиннинг потока, ползучесть потока;  
**74.50.+r** Эффекты близости, слабые связи, туннелирование, эффект Джозефсона.

Ключевые слова: гранулированные ВТСП, динамика проникновения магнитного потока, пиннинг гипервихрей, терромагнитные неустойчивости, дендритные структуры.

### Введение

Высокотемпературный гранулированный сверхпроводник представляет собой структуру, состоящую из зерен и межзеренных прослоек, которые в свою очередь являются джозефсоновскими контактами, связывающими зерна в единую токнесущую систему [1]. Фундаментальную роль в построении феноменологической модели нелинейной электродинамики высокотемпературных сверхпроводников второго рода играет анализ динамики вихрей в гранулированных сверхпроводниках [2]. Понятие джозефсоновских (гипер)вихрей [3,4] оказалось полезным при моделировании смешанного состояния в сверхпроводящих керамиках [5,6]. В работе [7] выполнен анализ движения одиночного плоского вихря для регулярной джозефсоновской среды с одинаковыми критическими токами контактов и в отсутствие проникновения вихрей в гранулы. В [8] получена система уравнений, описывающая гипервихри в гранулированном сверхпроводнике с учетом сильной стохастичности и нелокальности среды.

В настоящей работе рассмотрен вопрос о пиннинге гипервихрей для гранулированных сверхпроводников, которые находятся в резистивном состоянии. Результаты мотивированы исследованиями [1–3], где дан анализ динамики вихревой решетки с учетом потерь, которые возникают при движении гипервихрей и связаны с диссипацией энергии на нормальном сопротивлении джозефсоновских контактов. В силу сложности общей системы уравнений, моделирующей движение гипервихрей в гранулированном сверхпроводнике [2,3–8], рассмотрим вначале самую простую ситуацию, когда единственный диссипативный процесс — движение гипервихря со скоростью  $v(J, B)$ , зависящей от плотности транспортного тока  $J$  и индукции  $B$  магнитного поля. Это означает, что рождением и исчезновением гипервихрей в гранулированном сверхпроводнике, которое сопровождается потерями в межгранульных контактах, пренебрегаем. (В приложении 2 указаны условия, при которых это возможно.)

Пусть сверхпроводник находится в смешанном состоянии и реализуется (по аналогии с обычными сверхпроводниками) режим вязкого течения вихрей. Ограничимся исследованием одномерной задачи в параллельной геометрии  $\mathbf{B}||\mathbf{e}_z$ , когда сверхпроводник занимает полупространство  $x \geq 0$ , а на границе задан степенной режим

$$b(0, t) \propto t^m, \quad m > 0, \quad t > 0,$$

где  $t \rightarrow t/t_0$  и  $t_0$  — время перераспределения магнитного потока, которое можно определить из эксперимента [9];  $\mathbf{e}_z$  — единичный орт;  $b = B/B_J$ ,

где  $B_J = B_{c2}$ , а  $B_{c2}$  — второе критическое поле. При  $m = 1$  для обычных сверхпроводников такая задача теоретически рассматривалась при термоактивационном крипе в [10] и экспериментально (при крипе) для высокотемпературных сверхпроводников — в [9]. В [11] исследована аналогичная начально-краевая задача при произвольном  $m > 0$  для высокотемпературных сверхпроводников в фазах вихревого стекла и вихревой жидкости.

Типичная форма амплитуды магнитного поля при степенном граничном режиме с учетом (единственного) процесса диссипации — вязкого движения гипервихря — имеет вид, изображенный на рис. 1. Безразмерная скорость проникновения магнитного поля при  $J \gg J_c$  определяется равенством

$$v_f^{sm}(t) = \zeta_f \frac{m+1}{2} (1+t)^{(m-1)/2} \quad (t \rightarrow t/t_0) \quad (1)$$

и при  $J = J_c$  равенством

$$v_f^{st}(t) = \zeta_f \frac{m}{2} t^{m/2-1} (1+t)^{1/2} + \zeta_f \frac{1}{2} t^{m/2} (1+t)^{-1/2} \quad (\zeta_f > 0), \quad (2)$$

причем всегда выполняется неравенство  $v_f^{st}(t) \leq v_f^{sm}(t)$ , которое при  $t \rightarrow \infty$  переходит в равенство.

Аналогичные соотношения справедливы для глубины проникновения магнитного поля: при слабом пиннинге

$$x_f^{sm}(t) \propto (1+t)^{(m+1)/2},$$

а при сильном пиннинге —

$$x_f^{st}(t) \propto t^{m/2} (1+t)^{1/2},$$

причем всегда выполняется неравенство  $x_f^{st}(t) \leq x_f^{sm}(t)$ , которое при  $t \rightarrow \infty$  переходит в равенство (здесь  $x_f$  — координата фронта магнитной волны).

Статья построена по следующей схеме: в разд. 1 рассмотрим постановку задачи в геометрии  $\mathbf{B}||\mathbf{e}_z$  (транспортный ток  $\mathbf{J}||\mathbf{e}_y$  и скорость движения гипервихрей  $\mathbf{v}||\mathbf{e}_y$ ) при степенном граничном условии в режиме вязкого течения и покажем, что динамика магнитного потока отвечает уравнению пористой среды с конвекцией [12], или в первоначальной терминологии — уравнению Бусинесска [13,14]. В разд. 2 запишем решение модельной краевой задачи при слабом пиннинге, что отвечает уравнению пористой среды без конвекции. В разд. 3 исследована краевая задача с конвекцией, которая (конвекция) является существенной при больших критических плотностях тока, что типично для высокотемпературных слабогранулированных сверхпроводников [3].

В разд. 4 показано, что когда тепловыделение мало, что характеризуется малостью параметра спонтанного разогрева  $\beta \ll 1$  (см. Приложение 1), температуру можно рассматривать как параметр. В разд. 5 установлено, что учет зависимости критического тока от температуры приводит к возникновению пространственных колебаний магнитного поля в так называемом граничном режиме с обострением при условии, что критический ток удовлетворяет требованию  $J_c(B) \propto b^\sigma$ ,  $\sigma > 0$ , где  $b = B/B_J$ . Степенная зависимость критического тока отвечает так называемому пик-эффекту [15]. Точкам немонотонности амплитуды магнитного поля отвечает проникновение магнитного потока в форме «пальцев» [16], а сами распределения представляют собой «квазиодномерную» проекцию двумерных дендритных структур. Наличие пик-эффекта необходимо для их возникновения, но не достаточно: дополнительно приходится требовать неоднородного пространственного распределения температуры, что и приводит в результате к возникновению термомагнитных неустойчивостей [17,18].

Укажем аналитический критерий возникновения периодических термомагнитных колебаний магнитного поля по направлению  $\mathbf{e}_x$ , структура которых зависит от показателя роста критического тока  $\sigma > 0$  и параметра  $q > 0$ , характеризующего мощность тепловыделения. В Приложении 2 обсуждаются физические условия модельности гранулированного сверхпроводника. Эти условия формально означают возможность редукции дифференциального условия баланса мощностей для единичного объема [2,3] к функциональному соотношению баланса:  $EJ = BvJ/c$ , где  $E$  — электрическое поле,  $c$  — скорость света.

### 1. Постановка задачи. Вывод модельного уравнения

В работе [6] показано, что на плоский вихрь в регулярной решетке джозефсоновских контактов может действовать сила пиннинга при условии, что размеры вихря сравнимы с размерами гранул [2]. Охваченные гипервихрем абрикосовские вихри могут испытывать пиннинг на границах гранул [19,20]. На эти (абрикосовские) вихри действует сила Лоренца, порождаемая транспортным током. Сила пиннинга  $\mathbf{F}_p$  и сила Лоренца  $\mathbf{F}_L$ , действующие на гипервихрь, пропорциональны охваченному им магнитному потоку:  $\mathbf{F}_L = \Phi[\mathbf{J}, \mathbf{e}]/c$ , где  $[\cdot, \cdot]$  — векторное произведение;  $\mathbf{e} \in R^3$  — единичный орт;  $\Phi$  — поток, захваченный гипервихрем, такой, что средняя магнитная индукция  $B = N\Phi$ , а  $N$  — число гипервихрей. (Гипервихрь может содержать порядка  $10^5$  квантов магнитного потока, сосредоточенных в (проникающих в гранулы) абрикосовских вихрях [2].

Следовательно, одноквантовым гипервихрь можно назвать лишь в том смысле, что в межгранульных промежутках сосредоточен один квант магнитного потока [1].)

Сила электромагнитного трения, действующая на единицу длины движущегося гипервихря в гранулированном сверхпроводнике, определяется формулой  $\mathbf{F}_\eta = -\mathbf{v}\tau W/\lambda_J^2$ , где  $\mathbf{v}$  — скорость движения,  $\tau$  — время жизни вихря,  $2W$  — энергия гипервихря, а  $\lambda_J$  — джозефсоновская глубина проникновения [3]. Определим при  $J = J_c$  критическую силу пиннинга  $J_c = cF_p/B$  и запишем уравнение баланса сил в критическом состоянии [8]:

$$\mathbf{F}_p + \mathbf{F}_L + \mathbf{F}_\eta = 0. \quad (3)$$

Тогда из (3) вытекает, что скорость движения гипервихря  $\mathbf{v} \parallel \mathbf{e}_y$  в режиме вязкого течения имеет вид

$$v(J) = \frac{\lambda_J^2 \Phi}{W\tau c} (J - J_c) \quad (J \geq J_c). \quad (4)$$

Графики зависимости энергии гипервихря  $W$  и охваченного им магнитного потока  $\Phi$  от средней магнитной индукции для нормированных функций  $\omega = W/(F_J \lambda_J^2)$  и  $\phi = \Phi/\Phi_0$ ,  $b = B/B_J$  известны [3]. Здесь  $B_J = 8\pi F_J$ , где  $F_J = \Phi_0 \rho I_J / (2\pi c)$ ,  $\rho$  — плотность джозефсоновских межгранульных контактов;  $I_J$  — средний критический ток контактов;  $\Phi_0$  — квант магнитного потока.

Тогда соотношение (4) можно записать в виде

$$v(J, B) = \frac{2\pi}{\rho \tau I_J} (J - J_c) \frac{\phi(b)}{\omega(b)}, \quad (5)$$

где  $\phi(b) \sim \sqrt{b}$  и  $\omega(b) \sim b^2$  (согласно [3], рис. 1). Ограничимся исследованием зависимости (5) при сильных полях  $b \sim 1$ . В промежуточных полях необходимо явно учитывать зависимость скорости гипервихря от захваченного им потока  $\Phi$ . Ниже такая зависимость учитывается лишь при больших полях: при малых полях исследование аналогично. Для промежуточных полей форма проникновения магнитного поля сохранится (рис. 1), а различия будут иметь лишь количественный характер. Тогда линейаризация соотношения (5) в окрестности точки  $b \sim 1$  приводит к следующему соотношению:

$$v(J) = v_0 I_J^{-1} (J - J_c) \quad \left( v_0 = \frac{2\pi}{\rho \tau} \frac{\phi'(1)}{\omega'(1)} \right). \quad (6)$$

Рассмотрим далее уравнение сохранения числа вихревых нитей:

$$B_t + [Bv(J, B)]_x = 0. \quad (7)$$

Подстановка соотношения (6) в (7) с учетом равенства  $J = -(c/4\pi)B_x$  приводит к уравнению

$$b_t = v_h b_x + D_h (bb_x)_x, \quad (8)$$

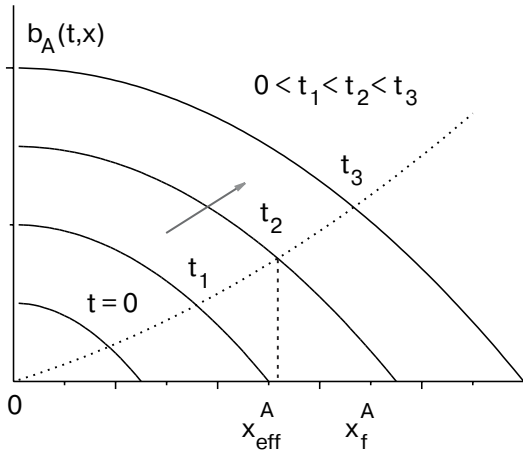


Рис. 1. График проникновения магнитного потока в гранулированный сверхпроводник в возрастающем со временем (степенным образом) магнитном поле.

где  $D_h = (t_0 v_0 / \lambda) k$ ;  $v_h = (t_0 v_0 / \lambda) (J_c / I_J)$ ;  $k = c B_{c2} / (\lambda J_c)$ . Выберем  $t_0$  и  $\lambda$  (характерные масштабы изменения амплитуды магнитного поля) из требования  $D_h = 1$  и  $v_h = 1$ , что позволяет записать уравнение (8) в форме

$$b_t = b_x + (b b_x)_x. \quad (9)$$

Уравнение (9) без конвекции моделирует движение вихрей при слабом пиннинге, который отвечает малым плотностям критического тока  $J \gg J_c$ . Уравнение (9) с конвекцией моделирует движение вихрей при сильном пиннинге, когда выполняется более слабое неравенство  $J \geq J_c$ . При слабом пиннинге движение гипервихрей происходит только диффузионным образом, а при сильном пиннинге следует учитывать конвективное движение вихрей.

## 2. Распределение магнитного потока в полупространстве в гранулированном сверхпроводнике при слабом пиннинге

При  $J \gg J_c$  критическая сила пиннинга  $F_p = J_c B / c$  мала и мы можем ограничиться исследованием решений уравнения (9) без конвекции.

Рассмотрим для этого уравнения граничное условие специального вида:

$$b(0, t) = b_0 (1 + t)^m \quad (m > 0, b_0 \geq B_{c1} / B_J), \quad (10)$$

где  $B_{c1}$  — первое критическое поле.

Решение краевой задачи (9), (10) имеет вид [12]

$$b_A(x, t) = b_0 (1 + t)^m \theta_A(\zeta), \quad \zeta = \frac{x}{(1 + t)^{(1+m)/2}}, \quad (11)$$

где функция  $\theta_A \geq 0$  удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению, которое получается после подстановки (11) в (9):

$$(\theta_A \theta'_A)' + \frac{1+m}{2} \theta'_A \zeta - m \theta_A = 0 \quad (\zeta > 0, b_0 = 1) \quad (12)$$

с граничными условиями

$$\theta_A(0) = 1, \quad \theta_A(\infty) = 0 \quad (13)$$

(для упрощения записи  $b_0 = 1$ ).

Для экспериментальной ситуации  $m = 1$  [9, 10] задача (12), (13) имеет решение  $\theta_A(\zeta) = (1 - \zeta)_+$ , где  $\kappa_+ = \kappa$  при  $\kappa > 0$  и  $\kappa_+ = 0$  при  $\kappa < 0$ . Тогда из (11) вытекает, что

$$b_A(x, t) = (1 + t)(1 - \zeta)_+, \quad \zeta = \frac{x}{(1 + t)},$$

и, следовательно, автомодельное решение  $b_A(x, t)$  не что иное как бегущая волна.

Глубина проникновения такой магнитной волны зависит от времени:

$$x_{\text{eff}}^A(t) = \zeta_{\text{eff}}(1 + t), \quad \theta_A(\zeta_{\text{eff}}) = 1/2, \quad (14)$$

где  $\zeta_{\text{eff}}$  — эффективная глубина проникновения (рис. 1). С такой же скоростью движется фронт волны (точка, в которой  $b_A(\zeta, t)$  обращается в нуль):

$$x_f^A(t) = \zeta_f(1 + t), \quad \zeta_{\text{eff}} < \infty. \quad (15)$$

Для произвольного  $m > 0$  формулы (14) и (15) изменяются следующим образом:

$$x_{\text{eff}}^A(t) = \zeta_{\text{eff}}(1 + t)^{(1+m)/2},$$

$$x_f^A(t) = \zeta_f(1 + t)^{(1+m)/2}. \quad (16)$$

Из (16) нетрудно определить скорость движения фронта волны:

$$v_f(t) = \zeta_f(1 + m)(1 + t)^{(m-1)/2} \quad (\zeta_{\text{eff}} \rightarrow \zeta_{\text{eff}}/2). \quad (17)$$

Эволюция процесса диффузии магнитного поля при (слабом) пиннинге показана на рис. 1. Траектория движения полуширины магнитной волны обозначена штриховой линией. При  $m = 1$  графики вырождаются в прямые линии. При  $m > 1$  скорость движения фронта волны (17) возрастает, что (в силу формулы  $E = Bv/c$ ) приводит к возрастанию тепловыделения  $Q = JE$ . При  $m < 1$  скорость движения фронта волны убывает при  $t \rightarrow \infty$ , что позволяет пренебречь (асимптотически) тепловыделением и рассматривать температуру как параметр.

**3. Учет сильного пиннинга при степенном граничном режиме**

В этом случае следует рассматривать уравнение (7) с конвекцией и искать решение в виде [13,14]

$$b(x,t) = t^\alpha \phi(\eta,t), \quad \eta = xt^{-\delta}, \quad (18)$$

где  $\phi(\eta,t)$  ограничена при  $t \rightarrow \infty$ ,  $\eta = O(1)$ . Тогда уравнение (9) допускает редукцию к уравнению

$$\begin{aligned} \alpha t^{-1} \phi + \phi_t - \delta \eta t^{-1} \phi_\eta = \\ = t^{-\delta} \phi_\eta + t^{\alpha-2\delta} (\phi_\eta)^2 + t^{\alpha-2\delta} \phi \phi_{\eta\eta}. \end{aligned} \quad (19)$$

Положим  $\alpha = 2\delta$  в уравнении (19) и ограничимся исследованием поведения решений при больших временах. В результате из (19) получим уравнение

$$\phi_t = (\phi \phi_\eta)_\eta. \quad (20)$$

Рассмотрим для решений уравнения (20) граничные условия

$$\phi(0,t) = 1, \quad \phi(\infty,t) = 0, \quad t > 0. \quad (21)$$

Тогда это уравнение допускает автомодельное решение, удовлетворяющее граничным условиям (21)

$$\phi_A(\eta,t) = g_A(\zeta), \quad \zeta = \eta/(1+t)^{1/2}, \quad (22)$$

где  $g_A(\zeta)$  — решение задачи

$$(g_A g'_A)' + \frac{1}{2} g'_A \zeta = 0, \quad \zeta > 0, \quad (23)$$

с краевыми условиями

$$g_A(0) = 1, \quad g_A(\infty) = 0. \quad (24)$$

Решение краевой задачи (23), (24) финитно, т.е. в каждый момент времени магнитный поток проникает на конечную глубину. Очевидно, что (22) является решением задачи (23), (24) только в том случае, когда  $\phi_A(\eta,0) = g_A(\eta)$ . При любых возмущениях финитной начальной функции  $b_0(x)$  асимптотическое поведение решения  $b(x,t)$  описывается автомодельным решением  $\phi_A$ : это утверждение доказано в [12] и означает, что автомодельное решение притягивает к себе при больших временах другие решения, т.е. является аттрактором задачи. (Компьютерное моделирование показывает, что это действительно так.)

Закон эффективного движения автомодельной магнитной волны, определяемый из (22), имеет вид

$$x_{\text{eff}}(t) = \zeta_{\text{eff}} (1+t)^{1/2}, \quad t > 0 \quad (g_A(\zeta_{\text{eff}}) = 1/2).$$

Такое же равенство имеет место для координаты фронта волны:

$$x_f(t) = \zeta_f (1+t)^{1/2}, \quad t > 0.$$

Тогда из определения  $\eta$  (см. (18)) вытекает, что

$$x_f(t) = t^\delta \eta = \zeta_f t^\delta (1+t)^{1/2}. \quad (25)$$

Полагая  $\delta = \alpha/2$ , где  $\alpha = m$ , из (25) получаем

$$x_f(t) = \zeta_f t^{m/2} (1+t)^{1/2}. \quad (26)$$

Функция из (18) в силу (21) удовлетворяет граничному условию  $b(0,t) = t^m$ ,  $t > 0$ , которое при  $t \rightarrow \infty$  можно заменить краевым условием

$$b(0,t) = (1+t)^m. \quad (27)$$

В результате получаем решение искомой краевой задачи:

$$b(x,t) = (1+t)^m g_A(\zeta) \quad (\zeta = xt^{-m/2} (1+t)^{-1/2}).$$

Положение фронта волны для функции  $b(x,t)$ , согласно (26), определяется формулой  $x_f(t) = \zeta_f t^{(m+1)/2}$  и, следовательно, скорость движения фронта волны

$$v_f(t) = \zeta_f (m+1) t^{(m-1)/2} \quad (\zeta_f \rightarrow \zeta_f/2). \quad (26)$$

Соотношение (28) идентично формуле (17). Это означает, что при  $t \rightarrow \infty$  конвективное движение вихрей, определяемое слагаемым  $b_x$  в уравнении (9), не играет роли: однако это не так при больших, но конечных значениях  $t$  (рис. 2).

Сравнение формул (17) и (28) показывает, что на промежуточном этапе (при конечных  $t > 0$ ) при слабом пиннинге магнитное поле проникает на глубину

$$x_f^{sm}(t) = \zeta_f (1+t)^{(m+1)/2}, \quad (29)$$

а при сильном пиннинге

$$x_f^{st}(t) = \zeta_f t^{m/2} (1+t)^{1/2}. \quad (30)$$

Из соотношений (29) и (30) вытекает очевидное утверждение: при более сильном пиннинге магнитное поле проникает на меньшую глубину. Более точное утверждение отражает следующее равенство:

$$x_f^{st}(t) = \left(1 + \frac{m}{2t}\right)^{-1} x_f^{sm}(t),$$

которое графически изображено на рис. 2 при различных значениях параметров  $t$  и  $m$ .



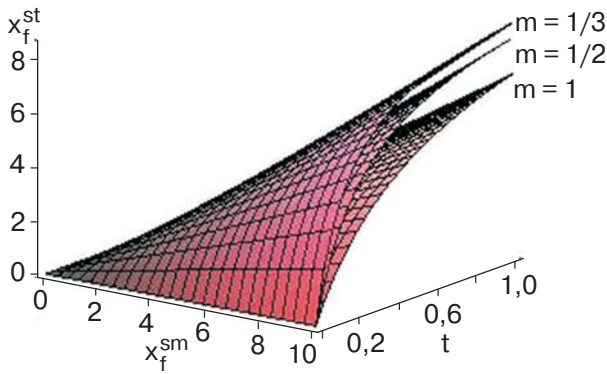


Рис. 2. Зависимости глубины проникновения магнитного поля  $x_f^{st}(t)$  и  $x_f^{sm}(t)$  при сильном и слабом пиннинге соответственно для слабогранулированного сверхпроводника при различных скоростях накачки внешним полем, определяемых показателем  $m$ .

#### 4. Оценка скорости проникновения гипервихря в гранулированный сверхпроводник. Сравнение с экспериментом

В исходных переменных из (26) вытекает, что

$$x_f^{sm}(t) = \lambda_J \left( 1 + \frac{kv_0}{\lambda_J} t \right)^{(m+1)/2}, \quad (31)$$

а из (31) следует, что

$$v_f^{sm}(t) = kv_0 \left( 1 + \frac{m}{2} \right) \left( 1 + \frac{kv_0}{\lambda_J} t \right)^{(m-1)/2}. \quad (32)$$

Для оценки порядка величин в соотношениях (31) и (32) воспользуемся значениями параметров сверхпроводника, которые приведены в [3]. Значение скорости  $v_0$  можно найти для плоскопараллельной пластины единичной длины гранулированного сверхпроводника толщиной  $d$ , по которой течет (в направлении оси  $e_y$ ) транспортный ток  $I$ , превышающий критическое значение  $I_c = dJ_c$  и создающий на поверхности пластины магнитное поле  $H_f = 2\pi I/c$ .

Действительно, из (4) вытекает, что  $v_0 = \lambda_J^2 \Phi / (W\tau c)$ . В силу определений  $W = F_J \lambda_J^2 W$  и  $F_J = B_J^2 / 8\pi$  из последней формулы для скорости нетрудно получить соотношение

$$v_0 = 8\pi \left( \frac{J_c}{I_J} \right) \frac{1}{\rho\tau}, \quad (33)$$

где  $\rho = a^{-1}$  — плотность гранул, причем расстояние между гранулами  $a \sim 10^0 - 10^{-5}$  см. В [3] описан эксперимент на иттриевой керамике на частотах  $W \sim 20 - 300$  Гц при  $W = 10^{-5} \tau^{-1}$ , что приводит

к значению  $\tau \sim 10^{-4}$  с. Далее можно принять  $I_c = 5 \cdot 10^{-3} I_J$  (см. [3]), что позволяет из (33) получить следующую оценку:

$$4\pi \cdot 10^3 \text{ см/с} < v_0 < 4\pi \cdot 10^7 \text{ см/с}. \quad (34)$$

Значения скорости из (34) согласуются с наблюдаемыми экспериментально (в возрастающем внешнем поле) значениями скорости 25–8000 см/с ([19], с. 479). Регистрация сигналов в эксперименте выполнялась в среднем на промежутках  $t \sim t_n = 0,8$  мс (см. [20]).

Согласно (2), скорость проникновения магнитного поля не возрастает при  $t \rightarrow \infty$ , если выполняется неравенство  $0 < m \leq 1$ . При  $m > 1$  скорость возрастает со временем: при этом, согласно эксперименту, должны возникать «дендритные» структуры (см. обзор [19]), поскольку в этом случае возрастает тепловыделение, пропорциональное величине  $E = vB/c$ . По этой причине в рассматриваемой нами ситуации (когда дендритные структуры отсутствуют, т.е. при слабых граничных потоках) теоретические значения скорости проникновения магнитного поля не должны превышать величины порядка 20–30 см/с.

Оценим глубину проникновения магнитного поля. Для этого положим в равенствах (29) и (30)  $k = 1$ , что отвечает значению внешнего поля  $H_a = 10^3$  Э, критическому току  $J_c = 10^5$  А/см<sup>2</sup> и средней глубине проникновения поля  $\langle x_{\text{eff}}(t_n) \rangle = 10^{-2}$  см. Тогда при  $v_0 = 10^3$  см/с из (29) получаем, что при  $m \ll 1$  глубина проникновения равна  $\langle x_{\text{eff}}(t_n) \rangle = 3 \cdot 10^{-2}$  см ( $t_n = 10^{-1}$  с), что согласуется со средней глубиной проникновения для низкотемпературных жестких сверхпроводников в постоянном поле ([21], с. 33). Таким образом, оценка (29) в предельном случае приводит к общепринятым результатам. Оценка сверху для скорости из (30) получается тривиально при  $m \leq 1/2$ , поскольку в этом случае  $\langle x_f(t_n) \rangle \leq kv_0$ , где  $v_0$  оценивается из (34).

Сравним далее профиль распределения поля на рис. 1 с известными графиками проникновения поля для плоскопараллельной пластины, помещенной во внешнее поле  $B_a$ , параллельное ее поверхности. График на рис. 1 совпадает с распределением индукции магнитного поля в жестких сверхпроводниках в постоянном поле  $B_a$  ([22], рис. 1.12). С возрастанием поля до значения  $B_a = B_p$ , где  $B_p$  — поле полного проникновения в пластину, форма графика сохраняется, а при  $B > B_p$  сверхпроводник переходит в критическое состояние. Аналогично возрастанию поля на границе по степенному закону кривизна графика на рис. 1 уменьшается и мы приближаемся к критическому состоянию.

### 5. Термомагнитные неустойчивости

Зависимость  $J_c(b, \theta) = J_c^0(1 - \theta)J_c(b)$ , где  $Q = T/T_c$ ,  $T_c$  — критическая температура, приводит к следующему уравнению:

$$b_t = D_h(bb_x)_x + v_0(1 - \theta)G(b)_x - v_0G(b)\theta_x, \quad (35)$$

где  $D_h = v_0 t_0 / \lambda_J$ ,  $v_0 = 2\pi / (\rho\tau)$ ,  $G(b) = bj_c(b)$ .

Ограничимся исследованием уравнения (35) в окрестности критической температуры  $\theta \sim 1$ , что позволяет пренебречь вторым слагаемым. Выберем  $j_c(b) = j_c^0(1 - b)$ , положим  $\theta_x = -q$ , где  $q > 0$ , что качественно не ограничивает общности изложения, и выполним замену  $t \rightarrow D_h t$ . Тогда уравнение (35) допускает редукцию к приближенному уравнению

$$b_t = (bb_x)_x + \alpha b(1 - b), \quad (36)$$

где  $\alpha = qv_0 j_c^0 D_h^{-1}$ , с начальным условием

$$b_0(x) = 1, \quad x \leq 0; \quad b_0(x) = 0, \quad x \geq 0. \quad (37)$$

Включение возмущения (37) приводит к тому, что вправо начнет двигаться магнитная волна, которую можно описать автомодельным решением

$$b_A(x, t) = b_A(s), \quad s = x - \lambda t, \quad (38)$$

где  $\lambda > 0$  — скорость движения волны. Подстановка (38) в (36) приводит к уравнению

$$b_s'' + \lambda b_s' + \alpha b_s(1 - b_s) = 0 \quad (39)$$

с граничными условиями

$$b_A(-\infty) = 1, \quad b_A(\infty) = 0. \quad (40)$$

Задача (39), (40) имеет решение при  $\lambda \geq \lambda_0 = 2\sqrt{\alpha}$ , фронт которого движется со скоростью  $\lambda = \lambda_0$ , т.е. минимальной из всех возможных,

$$v_{\text{eff}}(t) = dx_{\text{eff}}(t)/dt = 2\sqrt{\alpha} + o(1), \quad t \rightarrow \infty. \quad (41)$$

При этом профиль магнитной волны на асимптотической стадии эволюции совпадает с функцией  $b_A^0(s)$  — решением задачи (39), (40) при  $\lambda = \lambda_0$  [12]. Это означает, что автомодельное представление исходной (неавтономной) задачи  $b(s, t) = b(s + x_{\text{eff}}(t), t)$  сходится при  $t \rightarrow \infty$  к некоторой функции  $b_A^0(s)$ , т.е.

$$|b(\cdot, t) - b_A^0(\cdot)| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty. \quad (42)$$

Из (42) вытекает, что полученные в данной работе автомодельные решения при  $t \rightarrow \infty$  не отличаются от нестационарных численных решений. Из (41) следует, что с увеличением тепловыделения и/или тока «зацепления»  $j_c^0$  на центрах пиннинга скорость проникновения магнитной волны в сверхпроводник увеличивается.

Для глубины проникновения магнитного поля имеет место оценка [12]:

$$x_{\text{eff}}(t) = 2\sqrt{\alpha}t - \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \ln t + O(1), \quad t \rightarrow \infty.$$

### 6. Пик-эффект, тепловыделение и возникновение периодических магнитных структур

Особенности микроструктуры образца и/или модулей упругости вихревой решетки приводят к немонотонному поведению  $j_c(b)$ : так, в жестких сверхпроводниках наблюдается пик критического тока в области  $b \sim 1$ . Выберем полевую зависимость критического тока с пик-эффектом в следующем виде:  $j_c(b) \propto j_{c0} b^{\sigma-1}$ ,  $\sigma > 1$  [15].

Тогда уравнение (36) (после соответствующей перенормировки) можно записать в виде

$$b_t = (bb_x)_x + b^\sigma, \quad \sigma > 0. \quad (43)$$

Выберем для определенности  $\sigma = 2$ , что отвечает монотонному возрастанию тока при пик-эффекте в некотором интервале полей. Тогда решение уравнения (43) имеет вид [12]

$$b_A(x, t) = \frac{4}{3}(t_0 - t)^{-1} \cos^2\left(\frac{\pi x}{L_s}\right) \quad (L_s = 2\sqrt{2}\pi). \quad (44)$$

Решение (44) является периодической функцией, которая обращается в нуль в точках  $x_k = (1/2 + k)L_s$ , где  $k = 0, 1, \dots$ , и его можно интерпретировать как элементарную одномерную структуру. Каждой точке  $x_k$  отвечает искривление фронта волны в направлении  $e_y$  (более точную ситуацию — проникновение магнитного потока в форме двумерных «пальцев» — решение (44) не учитывает). Решения (44) моделируют структуры, которые получены в эксперименте для YBCO пленки в перпендикулярном направлении пленки внешнем поле. Такие структуры (см. рис. 3 [18]) получены с помощью импульсного лазерного нагрева. В дальнейшем в эксперименте при достижении некоторого предельного внешнего магнитного поля они переходят в «неправильные» термомагнитные неустойчивости — дендритные ветви. С другой стороны, решение (44) можно рассматривать как проникновение экспоненциальных магнитных возмущений в форме «пальцев» при  $k_y = \infty$ , где  $k_y$  — волновое число (см. [23]). Такие «пальцы» направлены вдоль  $e_y$ -оси — ортогонально движению текущего вязкого потока [23]. В [12] показано, что существует счетное множество различных автомодельных структур, составленных из произвольного числа элементарных

структур указанной формы (44), которые в силу свойства отталкивания дендритных ветвей [19] эволюционируют независимо друг от друга.

### Приложение 1

В переменных  $t \rightarrow t/t_u$  и  $x_1 \rightarrow x/\lambda_J$  уравнение диффузии магнитного поля можно записать в виде

$$b_{t_1} = D_h(bb_{x_1})_{x_1} + v_h[(1 - \theta)b]_{x_1}, \quad (\text{П1.1})$$

где  $v_h = t_0 v_0 / \lambda_J$ ;  $v_0 = \lambda_J^2 \Phi J_c^0 (W\tau c)^{-1}$ ;  $D_h = v_h k$ ;  $k = cB_J / (\lambda_J J_c)$ . В переменных  $t_2 \rightarrow t/t_T$  и  $x_2 \rightarrow x/\lambda_T$  уравнение переноса тепла записывается в виде

$$\theta_{t_2} = D_\theta \theta_{x_2 x_2} - k_T^2 \beta b b_{x_2} - k_T \beta b, \quad (\text{П1.2})$$

где

$$D_\theta = \frac{\kappa}{C} \frac{t_T^2}{\lambda_T}; \quad k_T = \frac{cB_J}{\lambda_T J_c}; \quad \beta = \frac{\lambda_T^2 J_c^2}{C c^2 T}.$$

Здесь  $D_\theta$  — коэффициент термической диффузии,  $k_T$  — аналог коэффициента  $k_h$  в уравнении Максвелла для плотности тока,  $\beta$  — коэффициент, характеризующий разогрев сверхпроводника (см. [23]),  $\lambda_T$  — характерный пространственный масштаб изменения температуры,  $\theta = T/T_0$ , где  $T_0$  — некоторое равновесное распределение температуры.

В общих переменных систему (П1.1), (П1.2) можно записать в виде

$$b_t = D_h(bb_x)_x + v_h[(1 - \theta)b]_x, \quad (\text{П1.3})$$

$$\frac{t_T}{t_h} \theta_t = D_\theta \left( \frac{\lambda_T}{\lambda_J} \right)^2 \theta_{xx} - k_T^2 \beta \frac{\lambda_T}{\lambda_J} b b_x - k_T \beta b, \quad (\text{П1.4})$$

где введены обозначения:  $t_2 = (t_h/t_T)t_1$ ,  $x_2 = (\lambda_J/\lambda_T)x_1$  и  $t_1 \rightarrow t$ ,  $x_1 \rightarrow x$ .

Обычно для жестких сверхпроводников полагают  $\lambda_T = \lambda_J = l$  и рассматривают параметр  $\tau = t_h/t_T$ . Так, при  $\tau \gg 1$  из уравнения (П1.4) в нулевом приближении вытекает соответствующее стационарное уравнение, которое при  $\beta \ll 1$  допускает редукцию:

$$\theta_{xx} = 0 \quad (\text{П1.5})$$

с граничными условиями

$$\theta(0) = \theta(\infty) = \theta_0. \quad (\text{П1.6})$$

Очевидно, краевая задача (П1.5), (П1.6) не имеет других решений, кроме стационарного решения  $\theta(x) \equiv \theta_0$ . Таким образом, при адиабатическом разогреве ( $\tau \ll 1$ ) и слабом тепловыделении ( $\beta \ll 1$ ) можно ограничиться изотермическим приближением, т.е. рассматривать температуру как параметр.

С другой стороны, если для уравнения (П1.5) вместо граничных условий (П1.6) рассматривать краевые условия

$$\theta(0) = \theta_0 \text{ и } \theta(\infty) = -q \quad (q > 0), \quad (\text{П1.7})$$

то решение задачи (П1.5), (П1.7) имеет вид  $\theta(x) = -qx + \theta_0$ .

Неоднородное распределение температуры приводит к тому, что теперь система уравнений

$$b_t = D_h(bb_x)_x + v_h(1 - \theta)b_x - v_h b \theta_x, \quad (\text{П1.8})$$

$$\tau^{-1} \theta_t = D_\theta \theta_{xx} - k_T^2 \beta b b_x - k_T \beta b \quad (\text{П1.9})$$

при  $\beta \ll 1$  и  $\tau \gg 1$  допускает редукцию к одному уравнению (П1.7) с известной функцией  $\theta_x$  в правой части уравнения, что и является одной из причин возникновения пространственно-периодических распределений амплитуды магнитного поля.

### Приложение 2. Условие модельности гранулированного сверхпроводника

Движение гипервихря со скоростью  $v(J, V)$  порождает электрическое поле, которое удовлетворяет равенству  $EJ = |N|F_L V$ . Это функциональное соотношение определяет баланс мощностей для единичного объема при условии, что движение гипервихря со скоростью  $v(J)$  является единственным диссипативным процессом в гранулированном сверхпроводнике [2,3]. Такие сверхпроводники мы называем модельными.

В более общем случае уравнение баланса мощностей определяется уравнением [2,3]:

$$EJ = |N|F_L v + rQ + W_j |N|_t, \quad (\text{П2.1})$$

где  $N(x, t)$  — концентрация гипервихрей. При этом предполагается, что в единицу времени в единичном объеме исчезает  $r$  вихрей. Выражение для энергии диссипации при исчезновении вихря можно определить по формуле  $Q = (3/2)W$ , где  $W$  — энергия гипервихря;  $W_j$  в уравнении (П2.1) — это потенциальная энергия джозефсоновских контактов.

В [3] показано, что энергию  $W_j$  можно заменить энергией заряженных межгранульных емкостей  $W_c$  в момент времени  $t = 0$ . В дальнейшем энергия  $W_c$  рассеивается при микроволновых колебаниях в джозефсоновских контактах. Поэтому можно положить  $W_c(+0) = W_j(-0) = W/2$  и получить выражение для энергии диссипации вихря  $Q$ . Если  $U(t)$  — полная энергия сверхпроводника, то ее изменение при исчезновении одного гипервихря равно (за время  $\tau$ ) энергии вихря  $W$ .

С учетом определения силы Лоренца  $F_L$ , определения  $Q$  и уравнения непрерывности



$|N|_t = -(|N|v)_x - r$  уравнение (П2.1) можно преобразовать к виду

$$EJ = \frac{Bv}{c} J - \frac{1}{2} W(2|b|_t + 3(|b|v)_x). \quad (\text{П2.2})$$

Уравнение (П2.2) можно записать в безразмерном виде:

$$ej = \frac{\Phi v_0}{c E_c} b \bar{v} j - \frac{W}{2 J_c E_c} \left( \frac{2}{t_h} \frac{\partial |b|}{\partial t} + \frac{3 v_0}{\lambda_J J_c} \frac{\partial}{\partial x} (|b|v) \right), \quad (\text{П2.3})$$

где  $E_c$  — значение электрического поля, соответствующее значению критического тока  $J_c$  на вольт-амперной характеристике гранулированного сверхпроводника;  $e = E/E_c$ ,  $b = |B|\Phi$ ,  $t \rightarrow t/t_h$ , где  $t_h$  — время жизни гипервихря;  $x \rightarrow x/\lambda_J$  и  $\bar{v} \rightarrow v/v_0$ , где  $v_0 = J_c \lambda_J^2 \Phi / (W \tau c)$ , согласно определению скорости  $v(J)$ . Параметр  $\tau = \Phi / (2\pi I_J R_c)$ , где  $I_J$  — средний критический ток контактов,  $R_c$  — среднее нормальное сопротивление контактов.

Пусть

$$\frac{W}{J_c E_c t_h} \ll 1 \text{ и } \frac{W v_0}{J_c E_c \lambda_J} \ll 1.$$

При  $t_h = v_0/\lambda_J$  эти неравенства эквивалентны и, очевидно, выполняются при достаточно малой энергии гипервихря и/или больших плотностях критического тока, что типично для гранулированных сверхпроводников [3]. Тогда дифференциальными слагаемыми в равенстве (П2.3) можно пренебречь (на любом конечном интервале времени) и приходим к задаче с единственным процессом диссипации — вязким течением потока гипервихрей.

1. В.К. Игнатъев, *ФНТ* **26**, 340 (2000).
2. Е.З. Мейлихов, *СФХТ* **2**, 5 (1989).
3. В.К. Игнатъев, *ФНТ* **23**, 687 (1997).
4. Э.Б. Сонин, *Письма в ЖЭТФ* **47**, 415 (1988).
5. А.С. Петров, Е.Е. Слядникова, *СФХТ* **6**, 538 (1993).
6. Е.З. Мейлихов, В.Г. Шапиро, *СФХТ* **4**, 1437 (1991).
7. Н.А. Зеликман, *СФХТ* **7**, 946 (1994).
8. В.К. Игнатъев, *СФХТ* **7**, 215 (1994).
9. А. Gurevich and Н. Kupfer, *Phys. Rev.* **B48**, 6477 (1993).
10. В.Р. Романовский, *ЖТФ* **70** (12), 47 (2000).
11. И.Б. Краснюк, Ю.В. Медведев, *Письма в ЖТФ* **31** (10), 40 (2005).
12. А.А. Самарский, В.А. Галактионов, С.П. Курдюмов, А.П. Михайлов, *Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений*, Наука, Москва (1987).
13. Г.И. Баренблатт, *ПММ* **6** (1), 67 (1952).
14. R.E. Grundy, *IMA J. Appl. Math.* **31**, 121 (1983).
15. V.V. Chabanenko, A.I. D'yachenko, H. Szymczak, and S. Piechota, *Physica* **C289**, 211 (1997).

16. I.S. Aranson, A. Gurevich, M.S. Welling, R.J. Wijngaardem, V.K. Vlasko-Vlasov, V.M. Vinokur, and U. Welp, *arXiv: cond-mat/0407490*, v. 1, 19 July (2004).
17. P. Leiderer, J. Boneberg, P. Brull, V. Bujok, and S. Herminghaus, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 2646 (1993).
18. H. Bolz, D. Schmidt, B. Bichler, B.U. Runge, R.G. Mints, K. Nussen, H. Kinder, and P. Leiderer, *Physica* **C388–389**, 715 (2003).
19. E. Altshuler, *Rev. Mod. Phys.* **76**, 471 (2004).
20. K. Behnia, C. Capan, D. Mailly, and B. Etienne, *Phys. Rev.* **B61**, 3815 (2000).
21. Р.Г. Минц, А.Л. Рахманов, *Неустойчивости в сверхпроводниках*, Наука, Москва (1984).
22. А.Вл. Гуревич, Р.Г. Минц, А.Л. Рахманов, *Физика композитных сверхпроводников*, Наука, Москва (1987).
23. A.L. Rakhmanov, D.V. Shantsev, Y.M. Galperin, and T.H. Johansen, *Phys. Rev.* **B70**, 224502-1 (2004).

### The mechanisms of magnetic flux penetration to model granulated superconductors

I.B. Krasnyuk and M.V. Zalutski

The process of magnetic flux penetration to a high- $T_c$  second-order granulated superconductor occupying a half-space  $x \geq 0$  is considered. For  $x = 0$  the magnetic field amplitude is charged by the power law  $b(0, t) = b_0(1 + t/t_0)^m$ ,  $m > 0$ . Such boundary condition are realized experimentally at  $m = 1$ . The superconductor is ideal in that the hypervortex evolution at a velocity  $v(j, b)$  generates the only dissipative process ( $j = J/J_c$ ,  $J_c$  is the critical current). The evolution of magnetic fields amplitude is modelled by the equation of porous medium or the Bussinesk equation. The self-similar solutions of the boundary problem determine the profile of magnetic field amplitude. Analytical formulae for magnetic wave front coordinate and velocity of magnetic flux penetration to the superconductor are derived. These depend in parameters of external magnetic pumping and superconductor parameters. The penetration of magnetic fluxes in the form of «fingers» which exist only at rather high external magnetic fields is considered.

PACS: 74.81.Bd Granular, melt-textured, amorphous, and composite superconductors;  
74.25.Qt Vortex lattices, flux pinning, flux creep;  
**74.50.+r** Tunneling phenomena; point contacts, weak links, Josephson effects.

Keywords: granulated high- $T_c$  superconductors, dynamic of magnetic flux penetration, hypervortex pinning, thermomagnetic instability, dendrite structures.