УДК 539.2:519.63

Х.М. Гамзаев, д-р техн. наук
Азербайджанский государственный
университет нефти и промышленности
(Азербайджан, AZ 1010, Баку, пр-т Азадлыг, 20,
тел. (994 55) 6826701, e-mail: xan.h@rambler.ru)

Об одной обратной задаче Стефана для фазового превращения в твердых телах

Рассмотрен процесс диффузионного фазового превращения, описываемый нелинейной системой дифференциальных уравнений в частных производных с подвижной границей. Поставлена обратная задача по определению концентрации растворенного вещества на внешней поверхности рассматриваемого объема, обеспечивающей перемещение подвижной границы по заданному закону. С помощью методов выпрямления фронтов и разностной аппроксимации поставленная задача сведена к двум разностным задачам. Предложен вычислительный алгоритм для решения полученных разностных задач.

Ключевые слова: диффузионное фазовое превращение, подвижная граница раздела фаз, метод выпрямления фронтов, разностный метод.

Розглянуто процес дифузійного фазового перетворення, описуваний нелінійною системою диференціальних рівнянь у частинних похідних з рухомою межею. Поставлено зворотню задачу щодо визначення концентрації розчиненої речовини на зовнішній поверхні розглядуваного об'єму, яка забезпечує переміщення рухомої межі за заданим законом. За допомогою методів випрямляння фронтів та різницевої апроксимації поставлену задачу зведено до двох різницевих задач. Запропоновано обчислювальний алгоритм для розв'язку отриманих різницевих задач.

Ключові слова: дифузійне фазове перетворення, рухома межа розділення фаз, метод випрямляння фронтів, різницевий метод.

Известно, что в твердых телах могут быть реализованы фазовые превращения двух типов: бездиффузионные, происходящие без изменения химического состава и не связанные с диффузионным перераспределением компонентов, и диффузионные, при которых лимитирующим звеном процесса является перенос примеси [1—4]. Часто модель процессов диффузионного фазового превращения в твердых телах представляется в виде задачи Стефана с одной или двухфазной зоной [1,2]. При формулировании задачи Стефана с двухфазной зоной математическая постановка задачи сводится к двум дифференциальным уравнениям в частных производных с соответствующими краевыми условиями, описывающими диффузию в первой и во второй фазах, и уравнению материального баланса на границе раздела фаз. Решение этой задачи, т.е. распределение концентрации растворенного вещества в фазах и положение границы раздела фаз, определены в основном аналитическими методами при постоянных коэффициентах диффузии, граничных и начальных условиях. Однако анализ реальных процессов фазового превращения показывает, что условия протекания этих процессов часто таковыми не являются. Следовательно, применение результатов таких аналитических исследований может привести к получению неверных оценок параметров диффузионного фазового превращения.

Необходимо заметить, что эффективность процессов фазового превращения во многом зависит от закона перемещения подвижной границы раздела фаз. В связи с этим важной является задача регулирования движения подвижной границы раздела фаз в диффузионных фазовых превращениях. Предлагается проблему регулирования движения границы раздела двух фаз представлять как граничную обратную задачу для системы уравнений диффузионного фазового превращения.

Постановка задачи. Рассмотрим процесс диффузионного фазового превращения в конечной области, представляемый задачей Стефана с двухфазной зоной

$$\frac{\partial c_1}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(D_1(c_1)\frac{\partial c_1}{\partial t}\right),\ (x,t)\in\Omega^-=\{0<x<s(t),\ 0<t\le T\}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial c_2}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(D_2(c_2)\frac{\partial c_2}{\partial t}\right),\ (x,t)\in\Omega^+=\{s(t)<x<L,\ 0<t\le T\}, \tag{2}$$

где $c_i(x,t)$ и $D_i(c_i)$, $i=1,2$, — концентрация и коэффициент диффузии растворенного вещества в соответствующей фазе; $s(t)$ — координата подвижной границы раздела фаз.

Пусть в начальный момент времени $t=0$ распределение концентрации растворенного вещества в фазах и положение границы раздела фаз известны, т.е. для системы (1), (2) имеем следующие начальные условия:

$$c_1|_{t=0}=\varphi_1(x),\quad c_2|_{t=0}=\varphi_2(x),\quad s(0)=0\,. \tag{3}$$

Предположим, что в первой фазе изменение концентрации во времени на границе $x=0$ описывается функцией $f(t)$, а во второй фазе концентрация на границе $x=L$ изменяется во времени по закону $\xi(t)$. Тогда на фиксированных границах $x=0$ и $x=L$ получим следующие граничные условия:

$$c_1|_{x=0}=f(t),\quad c_2|_{x=L}=\xi(t)\,. \tag{4}$$

На границе раздела фаз $x = s(t)$ концентрация растворенного вещества равна равновесной [2],

$$c_1|_{x=s(t)} = c_1^r(t),\ c_2|_{x=s(t)} = c_2^r(t), \tag{5}$$

а закон перемещения подвижной границы представляется в виде уравнения массового баланса на границе раздела фаз:

$$(c_2^r(t) - c_1^r(t))\frac{ds}{dt} = D_1 \frac{\partial c_1}{\partial x}\bigg|_{x=s(t)} - D_2 \frac{\partial c_2}{\partial x}\bigg|_{x=s(t)}. \tag{6}$$

Следует заметить, что прямая задача диффузионного фазового превращения состоит в нахождении функций $c_1(x,t)$, $c_2(x,t)$, $s(t)$, удовлетворяющих уравнениям (1), (2), (6) и дополнительно заданным условиям (3)—(5). Существенной особенностью прямой задачи является наличие подвижной границы раздела фаз, закон перемещения которого определяется в ходе решения задачи [5, 6]. Однако для процессов диффузионных фазовых превращений важное практическое значение имеют задачи, когда по заранее заданному закону движения границы раздела фаз исследуются условия для первой фазы на границе $x = 0$, при которых такие движения возможны.

В рамках модели (1)—(6) поставим следующую задачу: для первой фазы найти такой закон изменения во времени концентрации растворенного вещества на границе $x = 0$, который обеспечивал бы перемещение границы раздела фаз по заданному закону. Таким образом, закон перемещения границы раздела фаз $s(t)$ считается известным и требуется определить функции $f(t)$, $c_1(x,t)$, $c_2(x,t)$ из уравнений (1), (2) и дополнительных условий (3)—(6).

Метод решения. Используя метод выпрямления фронтов, преобразуем задачу (1)—(6). Введем замену переменных $y = \dfrac{x - s(t)}{L - s(t)}$, $t = t$, и область задания (2) Ω^+ отобразим на область $\Omega = \{0 < y < 1, 0 < t \le T\}$. Тогда уравнение (2) и соответствующие ему дополнительные условия запишем в виде

$$\frac{\partial c_2}{\partial x} = d(t)\frac{\partial}{\partial y}\left(D_2(c_2)\frac{\partial c_2}{\partial y}\right) + u(y,t)\frac{\partial c_2}{\partial y},$$

$$(y,\ t) \in \Omega = \{0 < y < 1, 0 < t \le T\}, \tag{7}$$

$$c_2|_{t=0} = \varphi_2(y), \tag{8}$$

$$c_2|_{y=0} = c_2^r(t), \tag{9}$$

$$c_2|_{y=1} = \xi(t), \tag{10}$$

где

$$d(t) = \frac{1}{(L - s(t))^2}, \; u(y,t) = \frac{1-y}{L-s(t)}\frac{ds}{dt} \; .$$

Аналогично замену переменных $y = x / s(t)$, $t = t$, отображает область задания уравнения (1) Ω^- на область Ω. В результате уравнение (1) и соответствующие ему дополнительные условия запишем в виде

$$\frac{\partial c_1}{\partial t} = r(t)\frac{\partial}{\partial y}\left(D_1(c_1)\frac{\partial c_1}{\partial y}\right) + q(y,t)\frac{\partial c_1}{\partial y},$$

$$(y,t) \in \Omega = \{0 < y < 1, 0 < t \le T\}, \tag{11}$$

$$c_1|_{t=0} = \varphi_1(y), \tag{12}$$

$$c_1|_{y=0} = f(t), \tag{13}$$

$$D_1(c_1)\frac{\partial c_1}{\partial y}\bigg|_{y=1} = w(t) + \lambda(t) D_2(c_2)\frac{\partial c_2}{\partial y}\bigg|_{y=0}, \tag{14}$$

$$c_1|_{y=1} = c_1^r(t), \tag{15}$$

где

$$r(t) = \frac{1}{s^2(t)}; \quad q(y,t) = \frac{y}{s(t)}\frac{ds}{dt};$$

$$w(t) = s(t)(c_2^r(t) - c_1^r(t))\frac{ds}{dt}; \;\; \lambda(t) = \frac{s(t)}{L - s(t)} \; .$$

Таким образом, в результате применения метода выпрямления фронтов задача (1)—(6) расщепляется на две задачи. При этом каждая из них рассматривается в прямоугольной области Ω с фиксированными границами. Поскольку функции $s(t)$, $d(t)$, $u(y,t)$, $c_2^0(y)$, $c_2^r(t)$, $\xi(t)$ являются заданными, задача (7)—(10) принадлежит к классу прямых задач. Решив прямую задачу (7)—(10), можно определить $c_2(y,t)$.

В задаче (11)—(15) известны функции $r(t)$, $q(y,t)$, $\lambda(t)$, $w(t)$, а также $c_2(y,t)$ из решения прямой задачи (7)—(10). Неизвестными являются функции $c_1(y,t)$ и $f(t)$. Следовательно, задача (11)—(15) относится к классу граничных обратных задач [7, 8].

Некоторые вопросы корректности постановок и единственности решений граничных обратных задач Стефана исследованы в работах [9, 10]. Известно, что решения граничных обратных задач не обладают свойством устойчивости к погрешностям исходных данных. Именно с этой особенностью граничных обратных задач связаны основные трудности построения эффективных вычислительных алгоритмов. Одним из распространенных методов решения граничных обратных задач является метод регуляризации Тихонова, основная идея которого заключается в сведении обратной задачи к задаче минимизации некоторого функционала с дополнительным стабилизирующим слагаемым [7—10].

Однако необходимо заметить, что при решении обратных задач методом регуляризации Тихонова требуется большой объем вычислений, связанных с процедурой поиска нужного значения параметра регуляризации. Кроме того, при применении глобальной регуляризации обратная задача решается одновременно для всех моментов времени, что приводит к потере оперативности определения решения обратной задачи. В связи с этим для решения обратных задач считается целесообразным применение методов саморегуляризации, основанных на свойствах вязкости вычислительных алгоритмов [7, 8]. В отличие от метода глобальной регуляризации с помощью методов саморегуляризации обратная задача решается последовательно в отдельные моменты времени.

Для решения полученной граничной обратной задачи (11)—(15) используем метод саморегуляризации, основанный на конечно-разностной аппроксимации, используя в качестве параметра регуляризации шаг дискретизации по времени. Сначала построим дискретный аналог задачи (7)—(10). Для этого введем равномерную разностную сетку в области $\overline{\Omega}$:

$$\varpi_{h\tau} = \{(y_i, t_j): y_i = ih,\ t_j = j\tau,\ i = 0,1,2,\ldots,n,\ j = 0,1,2,\ldots,m\}.$$

Дискретный аналог задачи (7)—(10) на сетке $\varpi_{h\tau}$ запишем в виде

$$\frac{c_{2,i}^{j+1} - c_{2,i}^{j}}{\tau} = d^{\,j+1}\frac{1}{h}\left[D_{2,i+1/2}^{j}\frac{c_{2,i+1}^{j+1} - c_{2,i}^{j+1}}{h} - D_{2,i-1/2}^{j}\frac{c_{2,i}^{j+1} - c_{2,i-1}^{j+1}}{h}\right] +$$

$$+ u_i^{j+1}\,\frac{c_{2,i+1}^{j+1} - c_{2,i}^{j+1}}{h},\quad i = \overline{1, n-1},\ \ j = \overline{0, m-1}, \tag{16}$$

$$c_{2,i}^{0} = \varphi_{2,i},\ \ i = \overline{0,n},$$

$$c_{2,0}^{j+1} = c_2^{r,\,j+1},$$

$$c_{2,n}^{j+1} = \xi^{\,j+1},$$

где $c_{2,i}^{j+1} \approx c_2(y_i, t_{j+1})$; $D_{2,i\pm1,2}^{j} \approx D_2(c_2(y_{i\pm1/2}, t_j))$; $u_i^{j+1} = u(y_i, t_{j+1})$; $\varphi_{2,i} = \varphi(y_i)$; $c_2^{r,j+1} = c_2^r(t_{j+1})$; $\xi^{j+1} = \xi(t_{j+1})$; $d^{j+1} = d(t_{j+1})$; $h = 1/n$ — шаг по переменной y; $\tau = T/m$ — шаг по переменной t.

Дискретная задача (16) при каждом фиксированном значении j, $j = \overline{0, m-1}$, представляет собой систему линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей, в которой неизвестными являются приближенные значения искомой функции $c_2(y, t)$ в узлах разностной сетки, т.е. $c_{2,i}^{j+1}$, $i = \overline{0, n}$, $j = \overline{1, m-1}$. Для решения таких систем можно использовать алгоритм Томаса (метод прогонки) [8].

Найдя численное решение задачи (7)—(10), можно перейти к численному решению задачи (11)—(15). Дискретный аналог задачи (11)—(15) на сетке $\varpi_{h\tau}$ запишем в виде

$$\frac{c_{1,i}^{j+1} - c_{1,i}^{j}}{\tau} = r^{j+1}\frac{1}{h}\left[D_{1,i+1/2}^{j}\frac{c_{1,i+1}^{j+1} - c_{1,i}^{j+1}}{h} - D_{1,i-1/2}^{j}\frac{c_{1,i}^{j+1} - c_{1,i-1}^{j+1}}{h}\right] +$$

$$+ q_i^{j+1}\frac{c_{1,i+1}^{j+1} - c_{1,i}^{j+1}}{h}, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad j = \overline{0, m-1},$$

$$c_{1,i}^{0} = \varphi_{1,i}, \ i = \overline{0, n},$$

$$c_{1,0}^{j+1} = f^{j+1},$$

$$D_{1,n}^{j}\frac{c_{1,n}^{j+1} - c_{1,n-1}^{j+1}}{h} = w^{j+1} + \lambda^{j+1} D_{2,0}^{j}\frac{c_{2,1}^{j+1} - c_{2,0}^{j+1}}{h},$$

$$c_{1,n}^{j+1} = c_1^{r,j+1},$$

где

$$c_{1,i}^{j+1} \approx c_1(y_i, t_{j+1}); D_{1,i\pm1,2}^{j} \approx D_1(c_1(y_{i\pm1/2}, t_j)); \ q_i^{j+1} = q(y_i, t_{j+1});$$

$$\varphi_{1,i} = \varphi_1(y_i); r^{j+1} = r(t_{j+1}); \ c_1^{r,j+1} = c_1^r(t_{j+1});$$

$$f^{j+1} \approx f(t_{j+1}); \lambda^{j+1} = \lambda(t_{j+1}); \ w^{j+1} = w(t_{j+1}).$$

Полученную систему разностных уравнений преобразуем к виду

$$a_i c_{1,i-1}^{j+1} - p_i c_{1,i}^{j+1} + b_i c_{1,i+1}^{j+1} = -\theta_i, \ i = \overline{1, n-1}, \ j = \overline{0, m-1}, \tag{17}$$

$$c_{1,i}^{0} = \varphi_{1,i}, \ i = \overline{0, n}, \tag{18}$$

$$c_{1,0}^{j+1}=f^{\,j+1}, \tag{19}$$

$$c_{1,n}^{j+1}=\mu^{j+1}c_{1,n-1}^{j+1}+\eta^{j+1}, \tag{20}$$

$$c_{1,n}^{j+1}=c_1^{r,j+1}, \tag{21}$$

где

$$a_i=\frac{\tau r^{j+1}D_{1,i-1,2}^{j}}{h^2};\; b_i=\frac{\tau r^{j+1}D_{1,i+1,2}^{j}}{h^2}+\frac{\tau q_i^{j+1}}{h};\; p_i=a_i+b_i+1;\; \theta_i=c_{1,i}^{j};$$

$$\eta^{j+1}=\frac{\lambda^{j+1}D_{2,0}^{j}(c_{2,1}^{j+1}-c_{2,0}^{j+1})+w^{j+1}h}{D_{1,n}^{j}};\quad \mu^{j+1}=1.$$

Для решения задачи (17)—(21) используем вычислительный алгоритм, предложенный в [11]. При каждом фиксированном значении j, $j=\overline{0,m-1}$, решение задачи (17)—(21) представим в виде

$$c_{1,i+1}^{j+1}=\alpha_{i+1}c_{1,i}^{j+1}+\beta_{i+1}\,,\; i=0,1,2,\ldots,n-1, \tag{22}$$

где α_{i+1},β_{i+1} — неизвестные коэффициенты. Запишем аналогичное выражение для $c_{1,i}^{j+1}$: $c_{1,i}^{j+1}=\alpha_i c_{1,i-1}^{j+1}+\beta_i$. Подставляя выражения для $c_{1,i}^{j+1}$, $c_{1,i+1}^{j+1}$ в уравнение (17), получаем следующие формулы для определения коэффициентов α_i,β_i:

$$\alpha_i=a_i/(c_i-\alpha_{i+1}b_i),\; \beta_i=\frac{(b_i\beta_{i+1}+\theta_i^{j+1})}{(c_i-\alpha_{i+1}b_i)},\; i=N-1,\,N-2,\ldots,1,$$

$$\alpha_n=\mu^{j+1},\;\; \beta_n=\eta^{j+1}.$$

После нахождения коэффициентов α_i, β_i для всех $i=\overline{1,n}$ можно определить зависимость между $c_{1,n}^{j+1}$ и $c_{1,0}^{j+1}$ в явном виде. Для этого соотношение (22) запишем при $i=n-1$:

$$c_{1,n}^{j+1}=\alpha_n c_{1,n-1}^{j+1}+\beta_n. \tag{23}$$

Подставив в (23) выражение $c_{1,n-1}^{j+1}=\alpha_{n-1}c_{1,n-2}^{j+1}+\beta_{n-1}$, получим

$$c_{1,n}^{j+1}=\alpha_n\alpha_{n-1}c_{1,n-2}^{j+1}+\alpha_n\beta_{n-1}+\beta_n. \tag{24}$$

Далее, подставляя в (24) выражения для $c_{1,n-2}^{j+1}$, $c_{1,n-3}^{j+1}$, ..., $c_{1,1}^{j+1}$, получаем формулу, в которой $c_{1,n}^{j+1}$ выражено через $c_{1,0}^{j+1}$:

$$c_{1,n}^{j+1}=c_{1,0}^{j+1}\prod_{i=1}^{n}\alpha_i+\sum_{i=1}^{n-1}\beta_i\prod_{k=i+1}^{n}\alpha_k+\beta_n.$$

Отсюда с учетом (19), (21) находим

$$f^{j+1}=\frac{c_1^{r,j+1}-\sum\limits_{i=1}^{n-1}\beta_i\prod\limits_{k=i+1}^{n}\alpha_k-\beta_n}{\prod\limits_{i=1}^{n}\alpha_i}. \tag{25}$$

Определив f^{j+1} по формуле (25), можно последовательно найти $c_{1,1}^{j+1}$, $c_{1,2}^{j+1}$, ..., $c_{1,n-1}^{j+1}$, по рекуррентной формуле (22). При переходе на следующий временной слой описанная процедура вычислений повторяется.

Результаты численного эксперимента

t, с	f^t	$\bar{f}$	$\tilde{f}$ при $\tau = 1$ с
1	0,782	0,782	0,782
2	0,449	0,449	0,450
3	0,544	0,544	0,587
4	0,798	0,798	0,808
5	0,491	0,491	0,505
6	0,493	0,493	0,528
7	0,798	0,798	0,813
8	0,542	0,542	0,550
9	0,450	0,450	0,474
10	0,783	0,783	0,809
11	0,598	0,598	0,591
12	0,419	0,419	0,472
13	0,753	0,753	0,722
14	0,654	0,654	0,716
15	0,402	0,402	0,446
16	0,710	0,710	0,725

Таким образом, предложенный численный метод позволяет на каждом временном слое последовательно определять распределение концентрации растворенного вещества во второй фазе, концентрацию на границе $x=0$ и распределение концентрации в первой фазе.

Результаты численных расчетов. Для проверки эффективности предложенного вычислительного алгоритма были проведены численные эксперименты для модельных задач. Схема численного эксперимента состоит в следующем. Для заданных функций $f(t)$, $s(t)$ последовательно решаются прямые задачи (7)—(10) и (11)—(14). Найденная зависимость $c_1^r(t)=c_1(1,t)$ принимается в качестве точных данных для численного решения обратной задачи по восстановлению $f(t)$.

Первая серия расчетов выполнена с использованием невозмущенных данных, вторая — проведена при наложении на $c_1^r(t)$ некоторой функции, моделирующей погрешность входных данных: $\tilde{c}_1^r(t)=c_1^r(t)+\delta\sigma(t)$, где $\sigma(t)$ — случайный процесс, моделируемый с помощью датчика случайных чисел, δ — уровень погрешности. Расчеты выполнялись на пространственно-временной разностной сетке с шагом $h=0{,}02$, $\tau=0{,}5$, $\tau=1$ с.

Результаты численного эксперимента для $s(t)=vt^2$, $D_1(c_1)=$ $=D_0(1+g_1c_1)$, $D_2(c_2)=D_0(1+g_2c_2)$, $f(t)=0{,}6+0{,}2\sin 2t$, $L=0{,}6$ м, $g_1=0{,}01$, $g_2=0{,}02$, $v=0{,}002$, $D_0=5\cdot10^{-2}$ м^2/с при использовании невозмущенных и возмущенных входных данных представлены в таблице, где t — время, f^t — точные значения функции $f(t)$, $\bar{f}$ — вычисленные значения $f(t)$ при невозмущенных данных, $\tilde{f}$ — вычисленные значения $f(t)$ при возмущенных данных. Для возмущенных входных данных использован уровень погрешности $\delta=0{,}5$.

Как свидетельствуют результаты численного эксперимента, при использовании невозмущенных входных данных искомая функция $f(t)$ восстанавливается точно при всех расчетных сетках по времени (см. табл. столбцы 2, 3). При использовании возмущенных входных данных искомая функция $f(t)$ восстанавливается с определенной погрешностью. Однако результаты, полученные при больших шагах во времени ($\tau=1$), свидетельствуют о том, что увеличение временного шага обеспечивает устойчивость алгоритма как к погрешностям входных данных, так и к вычислительным погрешностям.

Выводы

Анализ результатов численного эксперимента показывает, что предложенный вычислительный алгоритм можно применять при изучении диффузионных фазовых превращений в твердых телах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Любов Б.Я.* Кинетическая теория фазовых превращений. М.: Металлургия, 1969.
2. *Любов Б.Я.* Диффузионные процессы в неоднородных твердых средах. М.: Наука, 1981.
3. *Мерер Х.* Диффузия в твердых телах. Долгопрудный: Изд. Дом «Интеллект», 2011.
4. *Бокштейн Б.С.* Диффузия в металлах. М.: Металлургия, 1978.
5. *Рубинштейн Л.И.* Проблема Стефана. Рига: Звайгзне, 1967.
6. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Вычислительная теплопередача. М.: Едиториал, 2003.
7. *Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В.* Экстремальные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1988.
8. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Численные методы решения обратных задач математической физики. М.: Изд-во ЛКИ, 2009.
9. *Гольдман Н.Л.* Классическое и обобщенное решение двухфазной граничной обратной задачи Стефана // Вычислительные методы и программирование, 2002, **3**, № 1, с. 133—143.
10. *Гольдман Н.Л.* Свойства решений граничной обратной задачи Стефана // Дифференциальные уравнения, 2003, **39**, № 1, с. 63—69.
11. *Гамзаев Х.М.* Численное решение одной задачи ненасыщенной фильтрации с подвижной границей // Электрон. моделирование, 2015, **37**, № 1, с. 15—24.

Поступила 24.04.17;
после доработки 08.06.17

REFERENCES

1. Lyubov, B.Ya. (1969), *Kineticheskaya teoriya fazovykh prevrashcheniy* [Kinetic theory of phase transformations], Metallurgiya, Moscow, USSR.
2. Lyubov, B.Ya. (1981), *Diffuzionnyie protsessy v neodnorodnykh tvyordykh sredakh* [Diffusion processes in inhomogeneous solid media], Nauka, Moscow, USSR.
3. Merer, Kh. (2011), *Diffuziya v tvyordykh telakh* [Diffusion in solids], Izdatelskiy dom «Intellect», Dolgoprudny, Russia.
4. Bokshtein, B.S. (1978), *Diffuziya v metallakh* [Diffusion in metals], Metallurgiya, Moscow, USSR.
5. Rubinshtein, L.I. (1967), *Problema Stefana* [The problem of Stefan], Zvaygzne, Riga, USSR.
6. Samarskiy, A.A. and Vabishchevich, P.N. (2003), *Vychislitelnaya teploperedacha* [Computing heat transfer], Editorial, Moscow, Russia.
7. Alifanov, O.M., Artyukhin, E.A. and Rumyantsev, S.V. (1988), *Ekstremalnyie metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Extreme methods of the solution of incorrect problems], Nauka, Moscow, USSR.
8. Samarskiy, A.A. and Vabishchevich, P.N. (2009), *Chislennyie metody resheniya obratnykh zadach matematicheskoi fiziki* [Numerical methods of the solution of the inverse problems of mathematical physics], Izdatelstvo LKI, Moscow, Russia.
9. Goldman, N.L. (2002), "Classical and generalized solution of the two-phase boundary inverse Stefan problem", *Vychislitelnyie metody i programmirovanie*, Vol. 3, no. 1, pp. 133-143.
10. Goldman, N.L. (2003), "Properties of solutions of the inverse Stefan problem", *Differentsialnyie uravneniya*, Vol. 39, no. 1, pp. 66-72.
11. Gamzaev, Kh.M. (2015), "Numerical solution of the problem of unsaturated filtration with a moving boundary", *Elektronnoe modelirovanie*, Vol. 37, no. 1, pp.15-24.

Received 24.04.17;
affer revision 08.06.17

Kh.M. Gamzaev

ABOUT ONE STEFAN INVERSE PROBLEM
FOR PHASE TRANSFORMATIONS IN SOLIDS

The diffusion phase transformation process described by a nonlinear system of partial differential equations with a moving boundary has been considered. The inverse problem is formulated to determine the solute concentration on the external surface of the volume under consideration, which ensures the moving boundary displacement according to a given law. Applying the methods of fronts rectification and difference approximation, the problem posed is reduced to two difference problems. A computational algorithm is proposed for solving the obtained difference problems.

K e y w o r d s: diffusion phase transformation, moving phase boundary, forward rectification method, boundary inverse problem, difference method.

ГАМЗАЕВ Ханлар Мехвали оглы, д-р техн. наук, профессор кафедры «Общая и прикладная математика» Азербайджанского государственного университета нефти и промышленности, который окончил 1976 г. Область научных исследований — математическое моделирование, вычислительная гидродинамика, численные методы.