



УДК 519.682.1

С.В. Листровой, д-р техн. наук

Украинский государственный университет железнодорожного транспорта
(Украина, 61050, Харьков, пл. Фейрбаха, 7,
тел. (050)9355042, e-mail: om1sergeyvladimirovih@gmail.com),

А.В. Сидоренко

(Samsung Electronics Ukraine Company, LLC Samsung R&D Institute Ukraine
(Украина, 01302, Киев, ул. Льва Толстого, 57,
тел. +380509800852, e-mail: cdandrey@gmail.com),

Е.С. Листровая, канд. техн. наук

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского
(Украина, 61070, Харьков, ул. Чкалова, 17,
e-mail: listravkina@gmail.com)

Метод перечисления максимальных независимых множеств в неориентированных графах

На основе рангового подхода предложен метод перечисления максимальных независимых множеств неориентированного связного графа с временной сложностью, в среднем не превышающей $O(n^6)$, где n — число вершин в графе, для графов, не содержащих разделяющих вершин, размерность которых не превышает $n = 125$.

К л ю ч е в ы е с л о в а: максимальное независимое множество, клика, вершинное покрытие.

На основі рангового підходу запропоновано метод перерахування максимальних незалежних множин неорієнтованого зв'язного графа з часовою складністю, що в середньому не перевищує $O(n^6)$, де n — число вершин у графі, для графів, що не мають розділяючих вершин, розмір яких не перевищує $n = 125$.

К л ю ч о в і с л о в а: максимальна незалежна множина, кліка, вершинне покриття.

Задача перечисления максимальных независимых множеств — одна из известных NP -трудных задач теории графов, для которой пока не найдено алгоритмов решения за полиномиальное время. Между тем, данная задача имеет многочисленные приложения. В биоинформатике при компьютерном анализе геномных баз данных она используется, например, при поиске потенциальных регуляторных структур рибонуклеиновых кислот.

Исследования в области перечисления независимых множеств в графах ведутся с середины прошлого века. Их результаты находят приложения не только непосредственно в математике (комбинаторная теория чи-

© С.В. Листровой, А.В. Сидоренко, Е.С. Листровая, 2017

сел, теория кодирования, теоретическая информатика), но и в других областях. Так, например, в теоретической химии важными характеристиками соединений являются индексы Мэррифилда—Симмонса [1] и Хосойи [2], которые есть не что иное, как число независимых множеств в соответствующих графах.

Множество X_i^r , состоящее из r попарно несмежных вершин графа $G(V, E)$, называется независимым множеством (НМ). Обозначим через Y_i^k множество вершин, с которыми связаны вершины i -го множества X_i^r в графе $G(V, E)$. Под максимальными независимыми множествами (МНМ) понимают максимальные по включению НМ, т.е. множества, удовлетворяющие условию $X_i^r \cup Y_i^k = V$, которое означает, что сформированное множество является максимально независимым, поскольку в этом случае подмножество Y_i^k будет представлять вершинное покрытие в графе $G(V, E)$, а подмножество X_i^r — МНМ вершин графа $G(V, E)$, дополняющее это подмножество до n . Если $X_i^r \cup Y_i^k \neq V$, то, очевидно, существуют вершины, которые можно добавить в X_i^r , и оно останется при этом независимым, и число этих вершин не превосходит $n - r$. Если же $X_i^r \cup Y_i^k = V$, то таких вершин в графе $G(V, E)$ не существует.

Максимальный размер α_0 независимого множества в графе $G(V, E)$ называется числом независимости графа $G(V, E)$. Семейство всех независимых множеств обозначим $I(G)$. Его можно рассматривать как объединение двух семейств, $I^l(G) \cup I^{\parallel}(G)$, где $I^l(G)$ — семейство всех МНМ, число которых обозначим $\varphi(G)$, и $I^{\parallel}(G)$ — семейство всех независимых множеств, не являющихся максимальными, т.е. для которых выполняется условие $X_i^r \cup Y_i^k \neq V$. В семействе $I^l(G)$ будем выделять подсемейство $I^M(G) \subseteq I^l(G)$ наибольших МНМ (НМНМ), число которых обозначим $\gamma(G)$.

Важной характеристикой анализируемых графов является плотность ρ ребер m в графе $G(V, E)$. Под плотностью ребер графа будем понимать отношение $\rho = m/E_{\max}$, где m — число ребер в графе $G(V, E)$, $E_{\max} = \frac{n(n-1)}{2}$ — максимально возможное число ребер в графе $G(V, E)$, содержащем n -вершин. На первый взгляд, кажется, что нахождение всех МНМ — простая задача, решаемая простым перебором НМ с одновременной проверкой их на максимальность. Представление о простоте задачи справедливо только для небольших графов (в простых предметных областях) с числом вершин не более 20. Однако при увеличении числа вершин этот метод поиска с вычислительной точки зрения становится громоздким.

Такой вывод получаем, исследуя зависимость числа клик от числа вершин в графах Муна—Мозера [3]. Понятие, противоположное НМ, есть

полный подграф [4]. В отличие от НМ, в котором не могут встретиться две смежные вершины, в полном подграфе все вершины попарно смежные. Очевидно, что НМ графа G соответствует полному подграфу графа \overline{G} , и наоборот. Здесь \overline{G} — дополнение графа G . Следовательно, задача поиска НМ графа G линейно преобразуется в задачу поиска полных подграфов графа \overline{G} .

В работе [4] указано, что лучшим из известных алгоритмов поиска семейства МНМ является метод перебора Брона—Кэрбоша с временной сложностью $O(3^n)$. В процессе выполнения этого алгоритма число формируемых МНМ увеличивается, но затем отбрасывается, так как обнаруживается, что они содержатся в других, ранее полученных множествах, и поэтому не являются максимальными. Основным недостатком метода Брона—Кэрбоша является необходимость во время работы алгоритма сохранять большое количество вспомогательной информации, полученной на всех шагах.

В работе [5] приведены результаты сравнения алгоритмов Лукакиса (Loukakis), Цукияма (Tsukiyama) и Чиба (Chiba) с алгоритмом Брона—Кэрбоша и его различными вариациями. Согласно этим результатам алгоритм Брона—Кэрбоша до сих пор является одним из самых эффективных для решения задачи о поиске всех МНМ неориентированного графа. В работе [6] представлена очередная модификация алгоритма Брона—Кэрбоша. В работе [7] также была получена оценка временной сложности алгоритма Брона—Кэрбоша: $O(3^{n/3})$.

Среди первых работ в области перечисления НМ — работы, посвященные поиску графов с наибольшим числом НМ [3, 4]. В работе [8] получены верхние и нижние оценки числа НМ в деревьях с заданным числом вершин. Пусть T — дерево с n вершинами. Тогда $I(T) \leq 2^n + 1$. При этом равенство $I(T) = \phi_n$ справедливо, если T является простой цепью, где ϕ_n — $(n+2)$ -е число Фибоначчи ($\phi_0 = 1, \phi_1 = 2, \phi_n = \phi_{n-1} + \phi_{n-2}$ при $n \geq 2$). В общем случае для произвольных графов справедливо неравенство $(n+1) \leq I(G) \leq 2^n$, где нижняя граница достигается на полном графе, а верхняя — на пустом графе. К сожалению, все известные оценки сверху являются грубыми и их трудно использовать на практике.

Будем рассматривать класс графов, в которых при переходе от графа G к его дополнению \overline{G} , и наоборот, граф остается связным и не содержит разделяющих вершин. Например, при переходе от графов Муна—Мозера к их дополнению получаем набор несвязанных компонент. Естественно, в таком несвязном графе число НМ при больших значениях n и большом числе несвязанных компонент будет приближаться к верхней границе 2^n . Представляет интерес разработка процедуры неявного полного перебора,

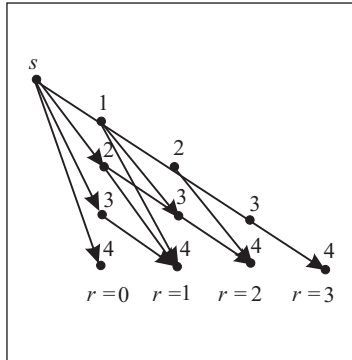


Рис. 1. Треугольный граф G_{Δ}

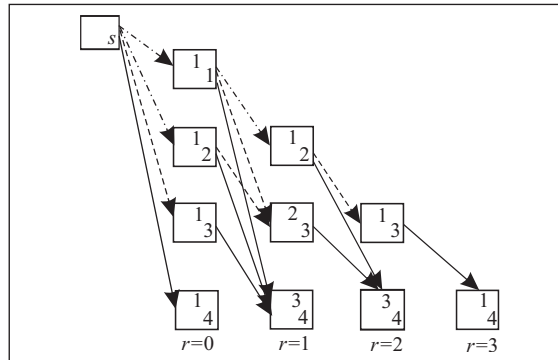


Рис. 2. Треугольник Паскаля в треугольном графе G_{Δ}

позволяющей снизить временную сложность процесса перечисления МНМ для рассматриваемого класса графов.

Формализация задачи и ее решение. Для реализации процедуры перечисления МНМ предлагается использовать идеи рангового подхода к решению задач дискретной оптимизации и теории графов [9—12]. Поскольку будут рассматриваться только сочетания несвязанных между собой вершин графа, множество всех сочетаний вершин произвольного неориентированного графа $G(V, E)$ можно представить в виде треугольного графа G_{Δ} (рис. 1). Для произвольной вершины i множество путей, ведущих в эту вершину из некоторой вершины s , можно представить в виде

$$M_s(i) = m_{si}^{r=1} \cup m_{si}^{r=2} \cup \dots \cup m_{si}^{r=n-1}, \quad i = \overline{1, n-1},$$

где $m_{si}^r = \{\mu_{si}^r\}$, $m_{sj}^r = \{\mu_{sj}^r\}$ — подмножества путей из произвольной вершины s в некоторую вершину i графа $G(V, E)$ ранга r . Суммарное число путей, заканчивающихся на r -м ярусе графа G_{Δ} , равно C_n^r . Если просуммировать множества путей, заканчивающихся на всех ярусах, получим $C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^n = 2^n - 1$. Фактически числа путей в графе G_{Δ} , ведущих к вершинам i , образуют треугольник Паскаля (рис. 2).

Рассмотрим возможность перечисления МНМ на основе формирования путей в графе G_{Δ} и введения правил отсечения неперспективных путей, на основе которых невозможно построить МНМ. Исходными данными для процедуры перечисления будут вершины i , располагаемые на нулевом ярусе $r=0$. Их можно рассматривать как путь μ_{si} , содержащий одну вершину i в графе G_{Δ} . Каждый путь μ_{si} будем задавать тремя множествами: $\mu_{si} = X_i | Y_i | Z_i$, где X_i — множество независимых вершин; Y_i —

1 2 345678910 1					
2 13 45678910 2					
3 24 15678910 3	13 24 5678910 3				
4 35 12678910 4					
5 46 12378910 5					
6 57 12348910 6					
7 68 12345910 7					
8 79 12345610 8					
9 810 1234567 9					
10 9 123345678 10					
$r = 0$	$r = 1$	$r = 2$	$r = 3$	$r = 4$	

Рис. 3. Представление треугольного графа G_{Δ} в виде таблицы

множество вершин, с которыми связаны вершины из множества X_i ; Z_i — множество вершин, дополняющее объединение множеств $X_i \cup Y_i$ до V . Например, если граф представляет собой цепь

$$1-----2-----3-----4-----5-----6-----7-----8-----9-----10, \quad (1)$$

исходными данными для решения задачи перечисления МНМ в таком графе будут следующие:

$$\begin{aligned} \mu_{s1}^{r=0} &= 1|2|345678910, \mu_{s2}^{r=0} = 2|13|45678910, \mu_{s3}^{r=0} = 3|24|15678910, \\ \mu_{s4}^{r=0} &= 4|35|12678910, \mu_{s5}^{r=0} = 5|46|12378910, \mu_{s6}^{r=0} = 6|57|12348910, \\ \mu_{s7}^{r=0} &= 7|68|12345910, \mu_{s8}^{r=0} = 8|79|12345610, \mu_{s9}^{r=0} = 9|810|1234567, \\ \mu_{s10}^{r=0} &= 10|9|12345678. \end{aligned} \quad (2)$$

В треугольном графе они расположены на нулевом ярусе, как показано на рис. 3, где треугольный граф G_{Δ} представлен в виде таблицы, в которой вершинам графа соответствуют клетки с номерами вершин треугольного графа. Если взять путь $\mu_{s1}^{r=0} = 1|2|345678910$, то на основе этого пути

можно формировать пути в вершины (3,4,5,6,7,8,9,10). Например, если сформировать путь $\mu_{s13}^{r=1}$ в вершину 3 на первом ярусе, то его идентификация будет иметь следующий вид:

$$\mu_{s13}^{r=1} = X_3 = \{13\} | Y_3 = \{24\} | Z_3 = \{5,6,7,8,9,10\},$$

где $X_3 = 1 \cup 3 = \{13\}$; $Y_3 = \{2\} \cup \{2,4\} = \{2,4\}$ или в упрощенном виде $\mu_{s13}^{r=1} = 13|24|5678910$.

Предположим, что на некотором ярусе r построен путь $\mu_i^r = abc|gde|qtls$. В множестве Z_i этого пути содержатся вершины, в которые данный путь может быть продлен. Ясно, что в графе G_Δ в вершины с номерами, большими, чем номер вершины c , данный путь не может быть продлен. Поэтому вершины с номерами, меньшими, чем номер вершины c , могут быть исключены из множества Z_i . Если номера всех вершин в множестве Z_i меньше номера вершины c , то из анализа может быть исключен весь путь μ_i .

Такие отсечения назовем правилом I отсечения неперспективных путей в графе G_Δ . После применения правила I в множестве Z образовалось два подмножества, Z^I и Z^II , удовлетворяющие условию $Z_i = Z_i^I \cup Z_i^II$, где Z_i^I — множество вершин, которое можно удалить из Z_i ; Z_i^II — множество вершин, которое остается в Z_i после удаления вершин $j \in Z_i^I$. Ясно, что если вершины, удаленные из множества Z_i , не связаны с множеством вершин Z_i^II , то на основе этих вершин не удастся построить МНМ, так как оно могло быть пополнено вершинами из множества Z_i^I , но они уже удалены из анализа.

Таким образом, можно сформулировать правило II отсечения неперспективных путей в графе G_Δ , а именно: проверяем, связаны ли вершины из множества Z_i^I с вершинами из множества Z_i^II и, если таких связей нет, то путь μ_i исключаем из анализа. Если организовать последовательное формирование путей в графе G_Δ сначала от вершины 1 ко всем остальным вершинам графа G_Δ , затем от вершины 2 ко всем остальным вершинам графа G_Δ и так далее, и если в процессе формирования пути к вершине с номером k при применении правил I и II оказывается, что путь μ_k можно исключить из анализа, то ясно, что пути к вершинам с номерами $k+1$ и больше процедура не строит. Такое отсечение назовем правилом III. Используя введенные правила отсечения, рассмотрим процедуру A перечисления МНМ.

Процедура А.

Шаг 1. На нулевом ярусе в множества X вносим все вершины и формируем для каждой вершины множества Y и Z . На основе введенных правил I—III исключаем из дальнейшего анализа те вершины, на основе

которых в перспективе невозможно построить МНМ, и переходим к выполнению следующего шага.

Шаг 2. Выбираем первую вершину ($s := 1$), формируем пути $\mu_{si}^{r=1}$ ранга $r = 1$ и для каждого пути определяем множества Y и Z . Пути, удовлетворяющие условию $X_i^r \cup Y_i^k = V$, заносим в множество U . В каждом пути на основе правил I—III исключаем из дальнейшего анализа те вершины, на основе которых в перспективе невозможно построить МНМ, и, если правила I—III позволяют, то исключаем из анализа и построенные пути и переходим к выполнению следующего шага.

Шаг 3. Проверяем множества путей $m_{si}^r = \emptyset$. Если они не пусты, то переходим к выполнению следующего шага, иначе — переходим к шагу 5.

Шаг 4. На основе путей текущего ранга μ_{si}^r формируем пути $\mu_{si}^{r:=r+1}$ следующего ранга $r + 1$ в вершины, указанные в множестве Z , и для каждого сформированного пути определяем множества Y и Z . Пути, удовлетворяющие условию $X_i^r \cup Y_i^k = V$, заносим в множество U . В каждом пути согласно правилам I—III исключаем из дальнейшего анализа те вершины, на основе которых в перспективе невозможно построить МНМ, и, если правила I—III позволяют, то и построенные пути исключаем из анализа и переходим к выполнению шага 3.

Шаг 5. Проверяем, построены пути или нет от всех вершин, не исключенных из анализа и расположенных на нулевом ярусе. Если да, то процедура заканчивает работу и множество U содержит все МНМ, иначе — $s := s + 1$; $r := 0$ и переходим к выполнению шага 4.

Рассмотрим пример работы процедуры A для графа (1). Исходными данными для графа (1) являются множества путей (2). В результате применения правил отсечения I, II в множестве остаются только два пути: $\mu_{s1}^{r=0} = 1|2|345678910$ и $\mu_{s2}^{r=0} = 2|13|45678910$. Пути $\mu_{s3}^{r=0} = 3|24|15678910$, $\mu_{s4}^{r=0} = 4|35|12678910$, $\mu_{s5}^{r=0} = 5|46|12378910$, $\mu_{s6}^{r=0} = 6|57|12348910$, $\mu_{s7}^{r=0} = 7|68|12345910$, $\mu_{s8}^{r=0} = 8|79|12345610$ отсекаются на основе правила II, а пути $\mu_{s9}^{r=0} = 9|810|1234567$ и $\mu_{s10}^{r=0} = 10|9|12345678$ — на основе правила I. Поскольку среди исходных путей осталось только два, процедура формирования будет состоять из двух этапов: формирования всех возможных путей процедурой A на основе пути $\mu_{s1}^{r=0} = 1|2|345678910$ и формирования путей процедурой A на основе пути $\mu_{s2}^{r=0} = 2|13|45678910$.

Результаты работы процедуры представлены на рис. 4, где цветом выделены пути и вершины, отсекаемые по правилу I, звездочкой помечены сформированные МНМ, а знаком # — пути, отсекаемые по правилу II, на первом и втором ярусах пути $110|29|345678$ и $1310|249|5678$ к вершине 10 не построены на основе правила III.

1 2 345678910				
1				
2	2			
3	13 24 5678910			
3		3		
4	14 235 678910			
4		4	4	
5	15 246 378910 #	135 246 78910		
5		5	5	5
6	16 257 348910 #	136 2457 8910 146 2357 8910		
6		6	6	6
7	17 268 345910 #	137 2468 5910 # 147 23568 910	1357 2468 910	
7		7	7	7
8	18 279 345610 #	138 2479 5610 #	1358 24679 10 1468 23579 10 1469 2357810*	
8		8	8	8
9	19 2810 3456	139 24810 567	1359 246810 7 1369 2457810* 1469 2357810* 1479 2356810*	13579 246810*
9		9	9	9
10			14710 23456789*	135710 24689* 135810 24679* 136810 24579* 146810 23579*
10		10	10	10
$r = 0$	$r = 1$	$r = 2$	$r = 3$	$r = 4$

a

	1	4 2		
2 13 45678910				
2	2	5 4		
3	3	3	7 1	
4	24 135 678910		4	1 0
4		4	4	
5	25 1346 78910		5	5
5		5	5	5
6	26 1357 48910 #	246 1357 8910		
6		6	6	6
7	27 1368 45910 #	247 13568 910 257 13468 910		
7		7	7	7
8		248 13579 610# 258 134679 610	2468 13579 10	
8		8	8	8
9			2479 1356810* 2469 1357810* 2579 1346810*	
9		9	9	9
10			25810 134679* 25710 134689* 24610 13579 8	246810 13579*
10		10	10	10
$r = 0$	$r = 1$	$r = 2$	$r = 3$	$r = 4$

b

Рис. 4. Формирование путей процедурой A на основе пути $\mu_{s1}^{r=0} = 1|2|345678910$ (a) и на основе пути $\mu_{s2}^{r=0} = 2|13|45678910$ (b)

1					
1	1				
1	2	1			
1	3	2	1		
1	4	3	3	1	
1	5	4	6	4	1
1	6	5	10	10	5
1	7	6	15	20	15
1	8	7	21	35	35
1	9	8	28	56	70
1	10	9	36	84	126
$r = 0$	$r = 1$	$r = 2$	$r = 3$	$r = 4$	
$\sum = 627$	45	120	210	252	

Рис. 5. Число путей, определяемых треугольником Паскаля

В анализируемом графе (1) имеется всего 16 МНМ:

{2 4 6 8 10}; {1 4 6 8 10}; {1 3 6 8 10}; {1 3 5 8 10};
 {1 3 5 7 10}; {1 3 5 7 9}; {2 5 8 10}; {2 5 7 10}; {2 5 7 9};
 {2 4 7 10}; {2 4 7 9}; {2 4 6 9}; {1 4 7 10}; {1 4 7 9}; {1 4 6 9}; {1 3 6 9}.

Как видим, процедура *A* все их перечислила. За два прохода процедура *A* построила 49 путей. Если перечислять все пути до четвертого яруса, определяемые треугольником Паскаля (рис. 5), то пришлось бы построить 627 путей. Таким образом, произошло сокращение перебираемых путей в 12,79 раз.

В представленном алгоритме отсекающие неперспективных вариантов, которые заведомо не приведут к построению клики, обеспечивается посредством использования дополнительного множества, в которое помещаются вершины, уже использованные для увеличения полного подграфа. Алгоритм оперирует тремя множествами вершин графа: множеством *Q*, содержащем на каждом шаге рекурсии полный подграф для данного шага (строится рекурсивно); множеством вершин *C*, с помощью которого можно увеличить значение *Q*, и множеством вершин *N*, уже использованных для расширения *Q* на предыдущих шагах. Алгоритм является рекурсивной процедурой, применяемой к этим трем множествам, и его сложность линейна относительно числа клик в графе.

Результаты экспериментального исследования работы процедуры и оценка ее временной сложности. При экспериментальном исследовании числа элементарных операций, выполняемых предложенной процедурой формирования МНМ, число вершин n графов изменялось в диапазоне от 10 до 100, а плотность ρ ребер в графе генерировалась по равномерному закону распределения. На каждую точку оценки при фиксированных значениях n и ρ генерировалось не менее 50 графов и определялось среднее значение числа элементарных операций сравнения Θ . Формируемые в процессе эксперимента графы не содержали разделяющих вершин, поскольку при их наличии число МНМ может быть экспоненциально большим. Вершина v графа G называется разделяющей, если граф $G - v$ имеет больше компонент, чем G . Все результаты получены с доверительной вероятностью 0,95. При проведении эксперимента оценивалось время решения задачи, вероятность решения задачи за время, не превышающее некоторого допустимого, равного 30 с, а также число φ МНМ, число γ НМНМ и число α_0 вершин в НМНМ. Результаты экспериментальных исследований приведены в табл. 1—6.

Как видно из табл. 1, 2, для семейства $S^l(A_i) \subseteq S(G)$ справедливо неравенство $I^l = |S^l| \leq \lambda$, т.е. если граф в виде цепи — связный, то общее число независимых множеств семейства $S(G)$ экспоненциально зависит от n , а число $I^l = |S^l|$ МНМ семейства $S^l(A_i) \subseteq S(G)$, по всей видимости, возрастает экспоненциально, но скорость возрастания данной экспоненты существенно ниже, что позволяет для графов с числом вершин, не превышающим 125 за полиномиальное время, перечислять МНМ.

Из табл. 1—4 видно, что временная сложность работы процедуры A в заданном диапазоне изменения вершин графа не превышает $O(n^6)$. Тестовые испытания показали, что данная тенденция сохраняется до значений, не превышающих $n \leq 125$.

Экспериментальное исследование работы процедуры A показало, что для графов данного типа выполняется неравенство $|I^l(G)| = \varphi(G) \ll |I^l(G)|$ и $\varphi(G) \leq \lambda = n^4$, т.е. для рассматриваемого класса графов число МНМ $\varphi(G)$ не превышает величину n^4 . Последнее может быть обусловлено тем, что число ω несвязанных пар X_i^{r-2} вершин в графе равно числу ребер в графе, являющемся дополнением \bar{G} графа $G(V, E)$, в котором вершины графа \bar{G} соединены ребрами, если они не соединены в графе $G(V, E)$. Если в графе $G(V, E)$ содержится m ребер, то справедливо равенство

$$\omega = E_{\max} - m = E_{\max} \left(1 - \frac{m}{E_{\max}} \right) = E_{\max} (1 - \rho).$$

При этом справедливо также неравенство $\omega < n^2$, и поскольку максимальный ранг пути в треугольном графе не может превысить $n-1$, а процедура

Таблица 1. Число элементарных операций Θ

n	ρ				n	ρ			
	30	50	70	90		30	50	70	90
10	1412,4	762,95	427,125	243,5	60	83253940	2348837	247262,5	33019,1
15	10080,15	3698,275	1548,375	681,975	65	1,56E+08	3714664	341551,2	42300,55
20	45701,7	12022,68	4080,6	1430,375	70	2,88E+08	5472673	463163,7	53212,33
25	178994,9	31065,93	8925	2632,85	75	5,07E+08	8192267	622493,6	65958,73
30	574507,9	71078,23	17133,35	4368,775	80	8,84E+08	11491946	805424,6	80744,53
35	1630869	154019,6	30304,35	6798,2	85	1,43E+09	16430697	1043164	97872,98
40	4140749	295232,4	51080,35	9851,625	90	2,40E+09	23090156	1329069	118094,6
45	9376882	524696,7	78721,2	14041,75	95	3,95E+09	31106591	1693379	139579,8
50	20969116	904203,9	119682,7	19218,8	100	6,07E+09	42559745	2086415	164390,6
55	42391736	1494709	177555,5	25593,28					

Таблица 2. Время перечисления МНМ (с)

n	ρ				n	ρ			
	30	50	70	90		30	50	70	90
10	0,0001	0,0001	0	0	60	6,3743	0,1672	0,018	0,0025
15	0,0009	0,0003	0,0001	0,0001	65	12,1251	0,2654	0,0242	0,0031
20	0,0037	0,001	0,0003	0,0001	70	22,4983	0,3925	0,0335	0,0039
25	0,0143	0,0024	0,0007	0,0002	75	39,7976	0,5887	0,0447	0,005
30	0,0446	0,0054	0,0013	0,0004	80	69,9057	0,8336	0,0576	0,0061
35	0,1223	0,0115	0,0022	0,0005	85	114,1993	1,207	0,0747	0,0072
40	0,3086	0,0218	0,0037	0,0008	90	193,376	1,693	0,0942	0,0087
45	0,698	0,0385	0,0056	0,0011	95	318,4027	2,2879	0,1191	0,0102
50	1,5917	0,0655	0,0087	0,0014	100	488,7817	3,1361	0,1474	0,0122
55	3,2247	0,1068	0,0128	0,0019					

Таблица 3. Вероятность перечисления МНМ за время, не превышающее 30 с

n	ρ				n	ρ			
	30	50	70	90		30	50	70	90
10	1	1	1	1	60	0,9904	1	1	1
15	1	1	1	1	65	0,9112	1	1	1
20	1	1	1	1	70	0,7413	1	1	1
25	1	1	1	1	75	0,5285	1	1	1
30	1	1	1	1	80	0,3584	1	1	1
35	1	1	1	1	85	0,2257	1	1	1
40	1	1	1	1	90	0,1478	1	1	1
45	1	1	1	1	95	0,0942	1	1	1
50	1	1	1	1	100	0,0614	0,9999	1	1
55	0,9999	1	1	1					

делает $n-1$ проход, то общее число путей, построенное процедурой, не превысит величины $\lambda = n^4$.

В случае произвольного графа, не содержащего разделяющих вершин, экспоненциально установлено, что если граф—связный, то при $\rho = 0,5$ и $n \leq 125$ процедура строит МНМ за полиномиальное время. Однако при малых значениях плотностей для этого требуется память, пропорциональная n^6 . Это обусловлено тем, что не все пути, построенные процедурой, в конечном счете приводят к построению МНМ, т.е. будет построено достаточно большое число лишних путей. При этом число МНМ не превышает значения λ (см. табл. 4). По всей видимости, при $\rho < 0,01$ и достаточно больших значениях n область необходимой памяти может экспоненциально возрастать.

Таблица 4. Число МНМ $\phi(G)$

n	ρ				n	ρ			
	30	50	70	90		30	50	70	90
10	13,075	11,45	9,075	4,75					
15	37,475	27,075	18,95	10,225	60	14723,95	1921,175	452,4	133,225
20	94,3	53,55	33,6	16,975	65	23712,18	2614,375	560,8	153,225
25	214,025	100,125	52,125	26,4	70	37289,55	3520,8	692,25	174,8
30	451,625	167,775	79,475	37,2	75	58063,05	4650,65	838,775	198,4
35	896,95	278,425	113,475	48,75	80	86997	6101,85	1016,375	220,8
40	1667,925	433,675	158,375	63,1	85	128568,5	7886,65	1213,825	247
45	3066,55	651,8	209,725	78,05	90	187178,1	10193,03	1431,7	276,875
50	5327,325	960,625	276,4	95,375	95	273065,9	12855,2	1693,275	304,25
55	9131,375	1358,725	357,075	114,075	100	385555,9	16020,8	1980,95	336,075

Таблица 5. Характеристики графа цепи на n вершинах

n	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	30	35	40	45	50
γ	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{5}{1}$	$\frac{6}{1}$	$\frac{7}{1}$	$\frac{8}{1}$	$\frac{9}{1}$	$\frac{10}{1}$	$\frac{11}{1}$	12	16	1	21	1	26
α_0	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{10}{11}$	11	15	18	20	23	25
ϕ	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{9}{12}$	$\frac{16}{21}$	$\frac{28}{37}$	$\frac{49}{65}$	$\frac{86}{114}$	$\frac{151}{200}$	$\frac{265}{351}$	465	4410	17991	73396	299426	1221537
λ	$\frac{256}{625}$	$\frac{1296}{2401}$	$\frac{4096}{6561}$	$\frac{10000}{14641}$	$\frac{20736}{28561}$	$\frac{38416}{50625}$	$\frac{65536}{83521}$	$\frac{104976}{130321}$	$\frac{160000}{194481}$	234256	810000	1500625	2560000	4100625	6256000

Примечание: над чертой указаны характеристики для четных значений n , под чертой — для нечетных значений n .

Характеристики графа (1) на четных и нечетных вершинах n представлены в табл. 5, из которой видно, что для четных значений n справедливы соотношения $\alpha_0 = n/2$ и $\gamma = n/2 + 1$, а для нечетных — эти соотношения имеют вид $\alpha_0 = (n+1)/2$, $\gamma = 1$ и справедливы при $n \geq 4$.

Выводы

Предложенная процедура при числе вершин в графе, не превышающем 125, позволяет перечислять МНМ за полиномиальное время, а при достаточно больших значениях n и малых плотностях графов имеет экспоненциальную сложность. Данная процедура работает более эффективно, чем процедуры, основанные на алгоритме Брона—Кербоша, так как продуцирует существенно меньше вспомогательных множеств для построения МНМ. В алгоритме Брона—Кербоша фактически перечисляются почти все независимые множества вершин, число которых, естественно, экспоненциально большое.

Описанный алгоритм основан на том, что всякая клика в графе является его максимальным по включению полным подграфом. Начиная с одиночной вершины (образующей полный подграф), на каждом шаге алгоритма происходит увеличение уже построенного полного подграфа в результате добавления в него вершины из множества кандидатов. Как следует из табл. 2 и 3, задача перечисления МНМ при числе вершин в графе, не превышающем 100, может быть решена в масштабе реального времени, что важно для современных систем управления, используемых в распределенных вычислительных системах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Merrifield R.E., Simmons H.E. Topological methods in chemistry. N.Y.: John Wiley & Sons, 1989.
2. Hosoya H. Topological index. A newly proposed quantity characterizing the topological nature of structural isomers of saturated hydrocarbons // Bull. Chem. Soc. Jpn. 1971, 44 (9), p. 2332—2339.
3. Miller R.E., Muller D.E. The problem of maximum consistent subsets — IBM Research Report RC-240. 1960. J.T. Watson Research Center, Yorktown Heights, N.Y. Moon J.W., Moser L. On cliques in graphs // Israel J. Math. 1965, vol. 3, p. 23—28.
4. Watson T. Research Center, Yorktown Heights, N.Y. Moon J.W., Moser L. On cliques in graphs // Israel J. Math. 1965, vol. 3, p. 23—28.
5. Harley E., Bonner A., Goodman N. Uniform integration of genome mapping data using intersection graphs // Bioinformatics, 2001, vol. 17, p. 487—494.
6. Moon J. W., Moser L. On cliques in graphs // Israel J. Math, 1965, vol. 3, p. 23—28.
7. Tomita E., Tanaka A., Takahashi H. The worst-case time complexity for generating all maximal cliques and computational experiments // Theoretical Computer Science, 2006, vol. 363, p. 28—42.

8. Prodinge H., Tichy R.F. Fibonacci numbers of graphs // *Fibonacci Quart*, 1982, 20 (1), p. 16—21.
9. Listrovoy S.V., Minukhin S.V. General Approach to Solving Optimization Problems in Distributed Computing Systems and Theory of Intelligence Systems Construction // *Journal of automation and information sciences*, 2010, vol. 42, N 3, p. 30—46
10. Листровой С.В., Минухин С.В. Общий подход к решению задач оптимизации в распределенных вычислительных системах и теории построения интеллектуальных систем // *Проблемы управления и информатика*, 2010, №2, с. 65—82.
11. Листровой С.В. Метод перечисления максимальных независимых множеств в произвольных неориентированных графах // *Электрон. моделирование*, 2014, **36**, № 1, с. 3—17.
12. Listrovoy S.V., Listrovaya E.S., Panchenko S.V., Moiseenko V.I., Kamenev A.U. Mathematical models in computer control systems RAILWAYS and parallel computing. Kharkiv: FOP Brovin O., 2017, 300 p.

Поступила 09.03.17;
после доработки 15.06.17

REFERENCES

1. Merrifield, R.E. and Simmons, H.E. (1989), *Topological methods in chemistry*, New York, John Wiley & Sons, USA.
2. Hosoya, H. (1971), Topological index. A newly proposed quantity characterizing the topological nature of structural isomers of saturated hydrocarbons, *Bull. Chem. Soc. Jpn.*, Vol. 44, no. 9, pp. 2332-2339.
3. Miller, R.E. and Muller, D.E. (1960), The problem of the maximum consistent subsets, IBM Research Report RC-240, J. T. Watson Research Center, Yorktown Heights, New York, USA. Moon J.W., Moser L. On cliques in graphs, *Israel J. Math.*, Vol. 3, p. 23-28.
4. Watson J.T. Research Center, Yorktown Heights, N.Y. Moon J.W., Moser L. On cliques in graphs, *Israel J. Math.* Vol. 3, p. 23-28.
5. Harley, E., Bonner, A. and Goodman, N. (2001), Uniform integration of genome mapping data using intersection graphs, *Bioinformatics*, Vol. 17, pp. 487-494.
6. Moon, J.W. and Moser, L. (1965), On cliques in graphs, *Israel J. Math.*, Vol. 3, pp. 23-28.
7. Tomita, E., Tanaka, A. and Takahashi, H. (2006), The worst-case time complexity for generating all maximal cliques and computational experiments, *Theoretical Computer Science*, Vol. 363, pp. 28-42.
8. Prodinge, H. and Tichy, R.F. (1982), Fibonacci numbers of graphs, *Fibonacci Quart*, Vol. 20, no. 1, pp.16-21.
9. Listrovoy, S.V. and Minukhin, S.V. (2010), General approach to solving optimization problems in distributed computing systems and theory of intelligence systems construction, *Journal of automation and information sciences*, Vol. 42, no. 3, pp. 30-46.
10. Listrovoy, S.V. and Minukhin, S.V. (2010), “A general approach to the solution of optimization problems in distributed computing systems and the theory of constructing intellectual systems”, *Problemy upravleniya i informatika*, no. 2, pp.65-82.
11. Listrovoy, S.V. (2014), “The method of enumeration of maximal independent sets in arbitrary non-oriented graphs”, *Elektronnoe modelirovanie*, Vol. 36, no. 1, pp. 3-17.
12. Listrovoy, S.V., Listrovaya, E.S., Panchenko, S.V., Moiseenko, V.I. and Kamenev, A.U. (2017), *Mathematical models in computer control systems RAILWAYS and parallel computing*: Monograph, FOP Brovin O., Kharkiv, Ukraine.

Received 09.03.17;
after revision 15.06.17

S.V. Listrovoy, A.V. Sidorenko, E.S. Listrovaya

METHOD OF ENUMERATION OF MAXIMUM
INDEPENDENT SETS IN NONORIENTED GRAPHS

Based on the rank approach the authors propose a method of enumeration of maximum independent sets of nonoriented connected graph with time complexity that does not exceed, at an average, $O(n^6)$, where n is the number of vertices in the graph, for the graphs which do not contain separating vertices, which dimension does not exceed $n=125$.

Keywords: maximal independent set, click, vertex cover.

ЛИСТРОВОЙ Сергей Владимирович, д-р техн. наук, профессор Украинского государственного университета железнодорожного транспорта (г. Харьков). В 1972 г. окончил Харьковское высшее военное командно-инженерное училище. Область научных исследований — задачи дискретной оптимизации и теории графов и их приложения к анализу вычислительных систем и сетей.

СИДОРЕНКО Андрей Владимирович, вед. инженер-программист фирмы Samsung Electronics Ukraine Company, LLC Samsung R&D Institute Ukraine (г. Киев). В 2001 г. окончил Харьковский военный университет. Область научных исследований — задачи дискретной оптимизации и теории графов и их приложения к анализу вычислительных систем и сетей.

ЛИСТРОВАЯ Елена Сергеевна, канд. техн. наук, доцент кафедры экономики и маркетинга Национального аэрокосмического университета им. Н.Е. Жуковского (г. Харьков), который окончила в 1998 г. Область научных исследований — применение информационных систем в экономической сфере деятельности.

