МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.95

Ф.Г. Фейзиев [1], д-р физ.-мат. наук,
М.Р. Мехтиева [2], канд. физ.-мат. наук, **А.Дж. Гусейнова**[1], докторант
[1] Сумгаитский госуниверситет
(Азербайджан, AZ5008, Сумгаит, 43 квартал, ул. Баку, 1,
тел. (+994018) 6448906, e-mail: FeyziyevFG@mail.ru),
[2] Бакинский госуниверситет
(Азербайджан, AZ1148, Баку, ул. Академика Захида Халилова, 23,
тел. (+994012) 5390535)

Двухзначный аналог полинома Вольтерры для описания полной реакции двоичных многомерных нелинейных модулярных динамических систем

Рассмотрено построение двухзначного аналога полинома Вольтерры для описания полной реакции двоичных многомерных нелинейных модулярных динамических систем. Приведены рекуррентные формулы для определения неизвестных коэффициентов этого полинома при известных значениях входных и выходных последовательностей многомерных нелинейных модулярных динамических систем.

Ключевые слова: многомерные нелинейные модулярные динамические системы, двухзначный аналог полинома Вольтерры, рекуррентные формулы.

Розглянуто побудову двозначного аналогу полінома Вольтери для опису повної реакції двоічних багатовимірних нелінійних модулярних динамічних систем. Наведено рекурентні формули для визначення невідомих коефіцієнтів цього полінома при відомих значеннях вхідних та вихідних послідовностей багатовимірних нелінійних модулярних динамічних систем.

Ключові слова: багатовимірні нелінійні модулярні динамічні системи, двозначний аналог полінома Вольтери, рекурентні формули.

Конечные последовательностные машины или модулярные динамические системы (МДС) [1—5] широко применяются в вычислительной технике, в системах диагностики, кодировании и декодировании дискретных сообщений, криптографии, защиты данных и программного обеспечения ЭВМ [1, 3, 4]. В этих приложениях используются в основном линейные классы МДС. Нелинейные МДС (НМДС) успешно применяются в моделировании и управлении различными непрерывными и дискретными процессами

[3—6]. Для развития теории и приложений НМДС прежде всего необходима формула их общего представления (описания). В настоящее время получены формулы в виде двухзначных аналогов полинома Вольтерры для описания полной реакции некоторых классов и однопараметрических и многопараметрических классов МДС [2—5].

Будем рассматривать аналитическое описание полной реакции двоичных многомерных НМДС (МНМДС) в виде двухзначных аналогов полинома Вольтерры и вывод формул коэффициентов для этого полинома при известных значениях входных и выходных последовательностей.

Постановка задачи. Рассмотрим МНМДС с фиксированной памятью n_0, характеризуемой функциональным соотношением

$$y[n] = G\{u[\tau] \mid n - n_0 \le \tau \le n\},\ GF(2), \tag{1}$$

где $n \in T = \{0,1,2,...\}$; $y[n] \in GF^r(2)$ и $u[n] \in GF^q(2)$ — выходная и входная последовательности НМДС. Кроме того,

$$y[n] = (y_1[n],...,y_r[n]),\ u[n] = (u_1[n],...,u_q[n]),\ G\{...\} = (G_1\{...\},...,G_r\{...\}).$$

Аналитическое описание полной реакции МНМДС (1) состоит в представлении оператора $G\{...\}$ в виде двухзначного аналога полинома Вольтерры и определении его неизвестных коэффициентов при известных входной и выходной последовательностях рассматриваемой МНМДС.

Двухзначный аналог полинома Вольтерры для описания двоичных МНМДС. Для каждой $\alpha \in \{1,...,r\}$ функция $G_\alpha\{...\}$ может быть записана в виде модулярной функции, зависящей от $(n_0+1)\,q$ аргументов:

$$G_\alpha\{...\} = f_\alpha(u_1[n-n_0],...,u_1[n],...,u_q[n-n_0],...,u_q[n]). \tag{2}$$

Пусть

$$F(i) = \{\overline{m} \mid \overline{m} = (m_1,...,m_q), \sum_{\alpha=1}^{q} m_\alpha = i, m_\alpha \in \{0,1,...,n_0+1\}, \alpha = \overline{1,q}\},$$

$$Q(i,\overline{m}) = \{\alpha \mid \alpha \in \{1,...,r\}, m_\alpha \text{— компонента } \overline{m} \text{ и } m_\alpha \ne 0\}, \tag{3}$$

$$\Gamma_1(m_\alpha) = \{\overline{\tau}(\alpha) = (\tau(\alpha,1),...,\tau(\alpha,m_\alpha)) \mid 0 \le \tau(\alpha,1) < ... < \tau(\alpha,m_\alpha) \le n_0\},$$

$$\overline{\overline{\tau}} = (\overline{\tau}(\ell_1),...,\overline{\tau}(\ell_\mu)),$$

где μ — число ненулевых элементов в множестве $Q(i,\overline{m})$. При $\overline{\tau}(\alpha) \in \Gamma_1(m_\alpha)$, $\alpha \in Q(i,\overline{m})$ множество всех блочных векторов (наборов) $\overline{\overline{\tau}}$ обозначим через $\Gamma(i,\overline{m})$. Ясно, что $\Gamma(i,\overline{m}) = \prod_{\alpha \in Q(i,\overline{m})} \Gamma_1(m_\alpha)$.

Теорема 1. С использованием (2) и (3) соотношение (1) может быть представлено в виде следующего полинома:

$$y_\ell[n]=h_{\ell,0}+\sum_{i=1}^{(n_0+1)q}\sum_{\overline{m}\in F(t)}\sum_{\bar{\bar{\tau}}\in\Gamma(i,\overline{m})}h_{\ell,\overline{m}}[\bar{\bar{\tau}}]\prod_{\alpha\in Q(i,\overline{m})}\prod_{\sigma=1}^{m_\alpha}u_\alpha[n-\tau(\alpha,\sigma)],$$

$$\ell=1,...,r,\ GF(2). \tag{4}$$

Формула (4) является общей формулой для представления двоичных МНМДС, заданных в виде (1). Далее при записи вектора $\overline{m}$ в открытом виде иногда будем записывать лишь его ненулевые компоненты с указанием номера компонента в индексе.

Определение неизвестных коэффициентов полиномиальных представлений для полной реакции МНМДС. Рассмотрим определение коэффициентов в (4) при известных значениях входных и выходных последовательностей. Пусть для всех значений $u_\ell[n-\gamma]$, $\gamma\in\{0,1,...,n_0+1\}$, $\ell=1,...,q$, известно значение $y_\ell[n]$. Из (2) получим $y_\ell[n]=f_\ell(u_1[n-n_0],...,u_1[n],...$ $...,u_q[n-n_0],...,u_q[n])$, $\ell=1,...,r$. Из (4) видно, что

$$h_{\alpha,0}=f_\alpha(0,...,0,...,0,...,0),\quad \alpha=1,...,r. \tag{5}$$

Введем обозначения

$$x(\ell,\tau)=u_\ell[n-\tau],\quad \tau=\overline{0,n_0},\quad \ell=1,...,q, \tag{6}$$

$$X=\{x(\ell,\tau)\,|\,\tau=0,...,n_0,\ \ell=1,...,q\}. \tag{7}$$

Пусть $\tau\in\{0,1,...,n_0\}$, $\ell\in\{1,...,q\}$ и $x(\ell,\tau)$ является единственной переменной из X, принимающей значение 1. В этом случае для каждого $\alpha\in\{1,...,r\}$ обозначим через $f_\alpha(x(\ell,\tau)=1)$ значение функции $f_\alpha(\ldots)$. С учетом значений переменных из X в (4) для каждого $\alpha\in\{1,...,r\}$ получим

$$h_{\alpha,(1_\ell)}[(\tau)]=h_{\alpha,0}+f_\alpha(x(\ell,\tau)=1), \tag{8}$$

где (1_ℓ) — элемент $\overline{m}\in F(1)$, в котором $m_\ell=1$, а остальные компоненты этого элемента суть 0.

Утверждение 1. Пусть $x(\ell,n-\tau_\sigma)=1$, $\sigma=\overline{1,\gamma}$, а остальные переменные из X имеют значения 0, и при этом для каждого $\alpha\in\{1,...,r\}$ значения функции $f_\alpha(...)$ обозначены через $f_\alpha(x(\ell,n-\tau_\sigma)=1|\sigma=\overline{1,\gamma})$, где $\ell\in\{1,...,q\}$, $0\le\tau_1<...<\tau_\gamma\le n_0$, $\gamma\le n_0+1$. Тогда для каждого $\alpha\in\{1,...,r\}$ справедливо равенство

$$h_{\alpha,(\gamma_\ell)}[(\tau_1,...,\tau_\gamma)]=f_\alpha(x(\ell,n-\tau_\sigma)=1|\sigma=\overline{1,\gamma})+$$

$$+h_{\alpha,0}+\sum_{\sigma=1}^{\gamma-1}\sum_{(\beta_1,...,\beta_\sigma)\in\Omega_\sigma(\gamma)}h_{\alpha,(\sigma_\ell)}[\tau_{\beta_1},...,\tau_{\beta_\sigma})],\ GF(2), \tag{9}$$

где $\Omega_\sigma(\gamma)$ — множества $\Omega_\sigma(\gamma)=\{(\beta_1,...,\beta_\sigma)\,|\,\beta_1<...<\beta_\sigma\le\gamma\}$; (σ_ℓ) — элемент $\overline{m}\in F(\gamma)$, в котором $m_\ell=\sigma$, а остальные компоненты этого элемента суть 0 $(\sigma=1,...,\gamma)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. С учетом значения $x(\ell,\tau)$, $\tau=\overline{0,n_0}$, $\ell=1,...,q$, в правой части (4) после удаления нулевых слагаемых получим

$$f_\alpha(x(\ell,n-\tau_\sigma)=1\,|\,\sigma=1,\gamma)=h_{\alpha,0}+$$

$$+\sum_{\sigma=1}^{\gamma}\sum_{(\beta_1,...,\beta_\sigma)\in\Omega_\sigma(\gamma)}h_{\alpha,(\sigma_\ell)}[(\tau_{\beta_1},...,\tau_{\beta_\sigma})]\prod_{\xi=1}^{\sigma}x(\ell,\tau_{\beta_\xi}),\ \alpha=1,...,r,\ GF(2). \quad (10)$$

Поскольку $x(\ell,\tau_{\beta_\xi})=1$, $\xi=\overline{1,\sigma}$, из (10) получаем

$$f_\alpha(x(\ell,n-\tau_\sigma)=1\,|\,\sigma=\overline{1,\gamma})=h_{\alpha,0}+$$

$$+\sum_{\sigma=1}^{\gamma}\sum_{(\beta_1,...,\beta_\sigma)\in\Omega_\sigma(\gamma)}h_{\alpha,(\sigma_\ell)}[(\tau_{\beta_1},...,\tau_{\beta_\sigma})],\ \alpha=1,...,r,\ GF(2),$$

или

$$f_\alpha(x(\ell,n-\tau_\sigma)=1\,|\,\sigma=\overline{1,\gamma})=h_{\alpha,0}+$$

$$+\sum_{\sigma=1}^{\gamma-1}\sum_{(\beta_1,...,\beta_\sigma)\in\Omega_\sigma(\gamma)}h_{\alpha,(\sigma_\ell)}[(\tau_{\beta_1},...,\tau_{\beta_\sigma})]+h_{\alpha,(\gamma_\ell)}[(\tau_1,...,\tau_\gamma)],\ \alpha=1,...,r,\ GF(2).$$

Отсюда для определения $h_{\alpha,(\gamma_\ell)}[(\tau_1,...,\tau_\gamma)]$ получаем (9). Утверждение доказано.

Аналогично докажем следующее утверждение.

Утверждение 2. Пусть $x(\ell_\eta,\tau_\eta)$, $\eta=\overline{1,\mu}$, а остальные переменные из X имеют значения 0, и для каждой величины $\alpha\in\{1,...,r\}$ через $f_\alpha(x(\ell_\eta,\tau_\eta)=$ $=1\,|\,\eta=\overline{1,\mu})$ обозначено значение функции $f_\alpha(...)$, где $\mu\in\{1,...,q\}$, $\ell_\eta\in\{1,...,q\}$, $0\le\tau_\eta\le n_0$, $\eta=\overline{1,\mu}$. Тогда для $h_{\alpha,(1_{\ell_1},...,1_{\ell_\mu})}[(\tau_1),...,(\tau_\mu)]$ справедливо следующее:

$$h_{\alpha,(1_{\ell_1},...,1_{\ell_\mu})}[(\tau_1),...,(\tau_\mu)]=f_\alpha(x(\ell_\eta,\tau_\eta)=1\,|\,\eta=\overline{1,\mu})+h_{\alpha,0}+$$

$$+\sum_{\eta=1}^{\mu-1}\sum_{(s_1,...,s_\eta)\in\Omega_\eta(\mu)}h_{\alpha,(1_{\ell_{s_1}},...,1_{\ell_{s_\eta}})}[((\tau_{s_1}),...,(\tau_{s_\eta}))],\ \alpha=1,...,r,\ GF(2), \quad (11)$$

где $Q_\eta(\mu)=\{(s_1,...,s_\eta)\,|\,1\le s_1<...<s_\eta\le\mu\}$; $(1_{\ell_{\xi_1}},...,1_{\ell_{\xi\eta}})$ — элемент $\overline{m}\in F(\eta)$, в котором $m_{\ell_{\xi_1}}=1$, ..., $m_{\ell_{\xi_\eta}}=1$, а остальные компоненты этого элемента суть 0 $(\eta=1,...,\mu)$.

Утверждение 3. Пусть $x(\ell_\eta, \tau(\ell_\eta, j)) = 1$, $j = \overline{1, \varepsilon(\ell_\eta)}$, $\eta = \overline{1, \mu}$, а остальные переменные из X имеют значения 0, и при этом для каждой величины $\alpha \in \{1, ..., r\}$ функция $f_\alpha(...)$ обозначена через $f_\alpha(x(\ell_\eta, \tau(\ell_\eta, j)) = 1 \,|\, j = \overline{1, \varepsilon(\ell_\eta)}, \eta = \overline{1, \mu})$, где $\mu \in \{1, ..., q\}$, $1 \le \ell_1 < ... < \ell_\mu \le q$, $0 \le \tau(\ell_\eta, 1) < ... ... < \tau(\ell_\eta, \varepsilon(\ell_\eta)) \le n_0$, $\bar{\varepsilon}(\bar{\ell}) = (\varepsilon(\ell_1), ..., \varepsilon(\ell_\mu))$, $1 \le \varepsilon(\ell_\eta) \le n_0 + 1$, $\eta = \overline{1, \mu}$.

Пусть $i^* = \sum_{\eta=1}^{\mu} \varepsilon(\ell_\eta)$. Тогда справедливо следующее:

$$h_{\alpha, \bar{\varepsilon}(\bar{\ell})}[((\tau(\ell_1, 1), ..., \tau(\ell_1, \varepsilon(\ell_1))), ..., (\tau(\ell_\mu, 1), ..., \tau(\ell_\mu, \varepsilon(\ell_\mu)))] =$$
$$= f_\alpha(x(\ell_\eta, \tau(\ell_\eta, j)) = 1 \,|\, j = \overline{1, \varepsilon(\ell_\eta)}, \eta = \overline{1, \mu}) + h_{\alpha, 0} +$$
$$+ \sum_{k=1}^{i^*-1} \sum_{(\theta, \bar{v}, \bar{s}) \in F_1(k, \bar{\varepsilon}(\bar{\ell}))} \sum_{\bar{\pi}_1(\bar{\ell}, \bar{s}) \in \Omega(\theta, \bar{v}, \bar{s})} h_{\alpha, \bar{v}}[\bar{\bar{\tau}}(\bar{s}, \bar{\pi}_1(\bar{\ell}, \bar{s}))], \ \alpha = 1, ..., r, GF(2). \quad (12)$$

Здесь

$$\bar{\ell} = (\ell_1, ..., \ell_\mu);$$
$$\bar{\bar{\tau}}(\bar{s}, \bar{\pi}_1(\bar{\ell}, \bar{s})) = ((\tau(\ell_{s_1}, \pi(\ell_{s_1}, 1)), ...$$
$$..., \tau(\ell_{s_1}, \pi(\ell_{s_1}, v_{s_1}))), ..., (\tau(\ell_{s_\theta}, \pi(\ell_{s_\theta}, 1)), ..., \tau(\ell_{s_\theta}, \pi(\ell_{s_\theta}, v_{s_\theta}))));$$
$$F_1(k, \bar{\varepsilon}(\bar{\ell})) = \{(\theta, \bar{v}, \bar{s}) \,|\, 1 \le \theta \le \mu, \bar{v} = (v_1, ..., v_\theta), \bar{s} = (s_1, ..., s_\theta),$$
$$1 \le s_1 < ... < s_\theta \le \mu, \ \sum_{\gamma=1}^{\theta} v_{s_\gamma} = k, \ v_{s_\gamma} \in \{0, ..., \varepsilon(\ell_{s_\gamma})\}, \ \gamma = \overline{1, \theta}\}; \quad (13)$$
$$\Omega(\theta, \bar{v}, \bar{s}) = \prod_{\gamma=1}^{\theta} \Omega_1(v_{s_\gamma}, \varepsilon(\ell_{s_\gamma})),$$

где $\Omega_1(v_{s_\gamma}, \varepsilon(\ell_{s_\gamma})) = \{\bar{\pi}(\ell_{s_\gamma}) = (\pi(\ell_{s_\gamma}, 1), ..., \pi(\ell_{s_\gamma}, v_{s_\gamma})) \,|\, 1 \le \pi(\ell_{s_\gamma}, 1) < ... ... < \pi(\ell_{s_\gamma}, v_{s_\gamma}) \le \varepsilon(\ell_{s_\gamma})\}$. Элементы множества $\Omega(\theta, \bar{v}, \bar{s})$ обозначены через $\bar{\pi}_1(\bar{\ell}, \bar{s}) = (\bar{\pi}(\ell_{s_1}), ..., \bar{\pi}(\ell_{s_\theta}))$.

Доказательство. Ясно, что $\bar{\varepsilon}(\bar{\ell}) = (\varepsilon(\ell_1), ..., \varepsilon(\ell_\mu)) \in F(i^*)$. С учетом значения $x(v, t)$, $t \in \{0, 1, ..., n_0\}$, $v = 1, ..., q$, после удаления нулевых слагаемых в правой части (4) остаются слагаемые, которые отличны от нуля. Понятно, что отличные от нуля слагаемые состоят из множителей, являющихся элементами множества

$$\{x(\ell_\eta, \tau(\ell_\eta, j)) = 1 \,|\, j = \overline{1, \varepsilon(\ell_\eta)}, \eta = \overline{1, \mu}\}. \quad (14)$$

Из элементов множества (14) можно образовать различные произведения, у которых степени нелинейности изменяются от 1 до i^*. Все такие произведения являются ненулевыми слагаемыми в правой части (4). Общий вид произведения из элементов (14) можно записать в виде

$$\prod_{\gamma=1}^{\theta}\prod_{\beta=1}^{v_{s_\gamma}} x(\ell_{s_\gamma}, \tau(\ell_{s_\gamma}, \pi(\ell_{s_\gamma}, \beta))), \tag{15}$$

где $\bar{\pi}_1(\bar{\ell},\bar{s})\in\Omega(\theta,\bar{v},\bar{s})$, $(\theta,\bar{v},\bar{s})\in F_1(k,\bar{\varepsilon}(\bar{\ell}))$, $k\in\{1,\ldots,i^*\}$. Число входных последовательностей, входящих в произведение (15) как множители, равно θ, а число множителей из γ-х входных последовательностей ($\gamma=1,\ldots,\tau$), являющихся множителями в произведении (15), равно v_{s_γ}. Таким образом, степень нелинейности произведения (15) суть $i^* = \sum_{\gamma=1}^{\theta} v_{s_\gamma}$. Согласно (13) коэффициент слагаемого (15) есть $h_{\alpha,\bar{v}}[\bar{\bar{\tau}}(\bar{s},\bar{\pi}_1(\bar{\ell},\bar{s}))]$.

Для фиксированного значения $\bar{\pi}_1(\bar{\ell},\bar{s})\in\Omega(\theta,\bar{v},\bar{s})$, $(\theta,\bar{v},\bar{s})\in F_1(k,\bar{\varepsilon}(\bar{\ell}))$ и $k\in\{1,\ldots,i^*\}$ каждой $\bar{\bar{\tau}}(\bar{s},\bar{\pi}_1(\bar{\ell},\bar{s}))\in\Omega(\theta,\bar{v},\bar{s})$ соответствует слагаемое вида (15). Тогда, учитывая значения $x(v,t)$, $t\in\{0,1,\ldots,n_0\}$, $v=1,\ldots,q$ в (4), получаем

$$f_\alpha(x(\ell_\eta,\tau(\ell_\eta,j))=1\,|\, j=\overline{1,\varepsilon(\ell_\eta)},\ \eta=\overline{1,\mu})=h_{\alpha,0}+$$

$$+\sum_{k=1}^{i^*}\ \sum_{(\theta,\bar{v},\bar{s})\in F_1(k,\bar{\varepsilon}(\bar{\ell}))}\ \sum_{\bar{\pi}_1(\bar{\ell},\bar{s})\in\Omega(\theta,\bar{v},\bar{s})} h_{\alpha,\bar{v}}[\bar{\bar{\tau}}(\bar{s},\bar{\pi}_1(\bar{\ell},\bar{s}))]\times$$

$$\times\prod_{\gamma=1}^{\theta}\prod_{\beta=1}^{v_{s_\gamma}} x(\ell_{s_\eta},\tau(\ell_{s_\eta},\pi(\ell_{s_\gamma},\beta))),\ \alpha=1,\ldots,r,\ GF(2).$$

Из (14) получаем

$$f_\alpha(x(\ell_\eta,\tau(\ell_\eta,j))=1\,|\, j=\overline{1,\varepsilon(\ell_\eta)},\ \eta=\overline{1,\mu})=h_{\alpha,0}+$$

$$+\sum_{k=1}^{i^*}\ \sum_{(\theta,\bar{v},\bar{s})\in F_1(k,\bar{\varepsilon}(\bar{\ell}))}\ \sum_{\bar{\pi}_1(\bar{\ell},\bar{s})\in\Omega(\theta,\bar{v},\bar{s})} h_{\alpha,\bar{v}}[\bar{\bar{\tau}}(\bar{s},\bar{\pi}_1(\bar{\ell},\bar{s}))],$$

$$\alpha=1,\ldots,r,\ GF(2). \tag{16}$$

При $k=i^*$ множество $F_1(k,\bar{\varepsilon}(\bar{\ell}))$ содержит единственную тройку $(\theta,\bar{v},\bar{s})$ и $\theta=\mu$, $v_j=\varepsilon(\ell_j)$, $j=\overline{1,\mu}$, $s_j=j$, $j=\overline{1,\mu}$. Множество $\Omega_1(v_{s_\gamma},\varepsilon(\ell_{s_\gamma}))$ также имеет единственный элемент $\bar{\pi}(\ell_{s_\gamma})=(\pi(\ell_{s_\gamma},1)),\ldots,\pi(\ell_{s_\gamma},v_{s_\gamma}))$ и

$(\pi(\ell_{s_\gamma},1)<\ldots<\pi(\ell_{s_\gamma},v_{s_\gamma}))=(\pi(\ell_\gamma,1),\ldots,\pi(\ell_\gamma,\varepsilon(\ell_\gamma)))=(1,\ldots,\varepsilon(\ell_\gamma))$. Следовательно, $\Omega(\theta,\bar{v},\bar{s})=((1,\ldots,\varepsilon(\ell_1)),\ldots,(1,\ldots,\varepsilon(\ell_\mu)))$. Поэтому из (16) получим

$$f_\alpha(x(\ell_\eta,\tau(\ell_\eta,j))=1\,|\,j=\overline{1,\varepsilon(\ell_\eta)},\ \eta=\overline{1,\mu})=h_{\alpha,0}+$$

$$+h_{\alpha,\bar{\varepsilon}(\bar{\ell})}[((\tau(\ell_1,1),\ldots,\tau(\ell_1,\varepsilon(\ell_1))),\ldots,(\tau(\ell_\mu,1),\ldots,\tau(\ell_\mu,\varepsilon(\ell_\mu))))]+$$

$$+\sum_{k=1}^{i^*-1}\ \sum_{(\theta,\ \bar{v},\bar{s})\in F_1(k,\ \bar{\varepsilon}(\bar{\ell}))}\ \sum_{\bar{\pi}_1(\bar{\ell},\bar{s})\in\Omega(\theta,\ \bar{v},\bar{s})} h_{\alpha,\bar{v}}[\bar{\bar{\tau}}(\bar{s},\bar{\pi}_1(\bar{\ell},\bar{s}))],$$

$$\alpha=1,\ldots,r,\ GF(2).$$

Отсюда вытекает справедливость формулы (12). Утверждение доказано.

Формулы (8), (9), (11), (12) основаны на обозначениях (6). Запишем эти формулы без учета обозначений (6). Формулу (8) можно записать в виде

$$h_{\alpha,(1_\ell)}[(\tau)]=h_{\alpha,0}+f_\alpha(u_\ell[n-\tau]=1), \tag{17}$$

формулу (9) — в виде

$$h_{\alpha,(\gamma_\ell)}[(\tau_1,\ldots,\tau_\gamma)]=f_\alpha(u_\ell[n-\tau_\sigma]=1\,|\,\sigma=\overline{1,\gamma})+h_{\alpha,0}+$$

$$+\sum_{\sigma=1}^{\gamma-1}\ \sum_{(\beta_1,\ \ldots,\ \beta_\sigma)\in\Omega_\sigma(\gamma)} h_{\alpha,(\sigma_\ell)}[(\tau_{\beta_1},\ldots,\tau_{\beta_\sigma}],\ GF(2), \tag{18}$$

формулу (11) — в виде

$$h_{\alpha,(1_{\ell_1},\ldots,1_{\ell_\mu})}[(\tau_1),\ldots,(\tau_\gamma)]=f_\alpha(u_{\ell_\eta}[n-\tau_\eta]=1\,|\,\eta=\overline{1,\mu})+h_{\alpha,0}+$$

$$+\sum_{\eta=1}^{\mu-1}\ \sum_{(s_1,\ \ldots,\ s_\eta)\in Q_\eta(\mu)} h_{\alpha,(1_{\ell_{s_1}},\ldots,1_{\ell_{s_\eta}})}[((\tau_{s_1}),\ldots,(\tau_{s_\eta}))],$$

$$\alpha=1,\ldots,r,\ GF(2), \tag{19}$$

а формулу (12) — в виде

$$h_{\alpha,\bar{\varepsilon}(\bar{\ell})}[((\tau(\ell_1,1),\ldots,\tau(\ell_1,\varepsilon(\ell_1))),\ldots,(\tau(\ell_\mu,1),\ldots,\tau(\ell_\mu,\varepsilon(\ell_\mu)))]=$$

$$=f_\alpha(u_{\ell_\eta}[n-\tau(\ell_\eta,j)]=1\,|\,j=\overline{1,\varepsilon(\ell_\eta)},\ \eta=\overline{1,\mu})+h_{\alpha,0}+$$

$$+\sum_{k=1}^{i^*-1}\ \sum_{(\theta,\ \bar{v},\bar{s})\in F_1(k,\ \bar{\varepsilon}(\bar{\ell}))}\ \sum_{\bar{\pi}_1(\bar{\ell},\bar{s})\in\Omega(\theta,\ \bar{v},\bar{s})} h_{\alpha,\bar{v}}[\bar{\bar{\tau}}(\bar{s},\bar{\pi}_1(\bar{\ell},\bar{s}))],$$

$$\alpha=1,\ldots,r,\ GF(2).$$

Для выведения общей формулы определения любых коэффициентов в (4) рассмотрим произвольную пару $(i,\overline{m})$, где $\overline{m}=F(i)$ и $i\in\{1,...,q(n_0+1)\}$. Через $m(\ell)$ обозначим ℓ-й компонент вектора $\overline{m}$. Пусть число ненулевых компонентов в $\overline{m}$ есть μ и номера этих компонентов — $\ell_1, ..., \ell_\mu$. Пусть $u_{\ell_\eta}[n-\tau(\ell_\eta, j)]=1,\ j=\overline{1,\ m(\ell_\eta)},\ \eta=\overline{1,\mu}$, а остальные переменные из множества $U=\{u_1[n-n_0],...,u_1[n],...,u_q[n-n_0],...,u_q[n]\}$ имеют значение 0 и для каждой величины $\alpha\in\{1,...,r\}$ функция $f_\alpha(...)$ обозначена через $f_\alpha(u_{\ell_\eta}[n-\tau(\ell_\eta,j)] \mid j=\overline{1,m(\ell_\eta)},\ \eta=\overline{1,\mu})$, где $0\le\tau(\ell_\eta,1)<...<\tau(\ell_\eta,m(\ell_\eta))\le n_0,\ \eta=\overline{1,\mu}$.

При учете значений переменных из U в правой части (4) ненулевой член максимальной нелинейности имеет коэффициент

$$h_{\alpha,\overline{m}}[((\tau(\ell_1,1),...,\tau(\ell_1,m(\ell_1))),...,(\tau(\ell_\mu,1),...,\tau(\ell_\mu,m(\ell_\mu))))]. \quad (20)$$

Аналогично доказательству утверждения 3 можно доказать следующую теорему.

Теорема 2. Для коэффициента (20) справедлива следующая формула:

$$\begin{gathered} h_{\alpha,\overline{m}}[((\tau(\ell_1,1),...,\tau(\ell_1,m(\ell_1))),...,(\tau(\ell_\mu,1),...,\tau(\ell_\mu,m(\ell_\mu))))]= \\ =f_\alpha(u_{\ell_\eta}[n-\tau(\ell_\eta,j)]=1 \mid j=\overline{1,m(\ell_\eta)},\ \eta=\overline{1,\mu})+h_{\alpha,0}+ \\ +\sum_{k=1}^{i-1}\ \sum_{(\theta,\,\overline{v},\overline{s})\in F_2(k,\,\overline{m})}\ \sum_{\overline{\pi}_1(\overline{\ell},\overline{s})\in\Omega(\theta,\,\overline{v},\overline{s})} h_{\alpha,\overline{v}}[\overline{\overline{\tau}}(\overline{s},\overline{\pi}_1(\overline{\ell},\overline{s}))], \\ \alpha=1,...,r,\ GF(2). \end{gathered} \quad (21)$$

Здесь

$$\begin{gathered} \overline{\overline{\tau}}(\overline{s},\overline{\pi}_1(\overline{\ell},\overline{s}))=((\tau(\ell_{s_1},\pi(\ell_{s_1},1)),... \\ ...,\tau(\ell_{s_1},\pi(\ell_{s_1},v_{s_1}))),...,(\tau(\ell_{s_\theta},\pi(\ell_{s_\theta},1)),...,\tau(\ell_{s_\theta},\pi(\ell_{s_\theta},v_{s_\theta})))); \\ F_2(k,\overline{m})=\{(\theta,\overline{v},\overline{s}) \mid 1\le\theta\le\mu,\overline{v}=(v_1,...,v_\theta),\overline{s}=(s_1,...,s_\theta); \\ 1\le s_1<...<s_\theta\le\mu;\ \sum_{\gamma=1}^{\theta}v_{s_\gamma}=k;\ v_{s_\gamma}\in\{0,...,m(\ell_{s_\gamma})\};\ \gamma=\overline{1,\theta}\}; \\ \Omega(\theta,\overline{v},\overline{s})=\prod_{\gamma=1}^{\theta}\Omega_1(v_{s_\gamma},m(\ell_{s_\gamma})), \end{gathered}$$

где $\Omega_1(v_{s_\gamma},\ m(\ell_{s_\gamma}))=\{\overline{\pi}(\ell_{s_\gamma})=(\pi(\ell_{s_\gamma},1),...,\pi(\ell_{s_\gamma},v_{s_\gamma})) \mid 1\le\pi(\ell_{s_\gamma},1)<...$ $...<\pi(\ell_{s_\gamma},v_{s_\gamma})\le m(\ell_{s_\gamma})\}$; $\overline{\pi}_1(\overline{\ell},\overline{s})=(\overline{\pi}(\ell_{s_1}),...,\overline{\pi}(\ell_{s_\theta}))$ — элемент множества $\Omega(\theta,\overline{v},\overline{s})$.

Формула (21) вместе с (5), (17)—(19) является рекуррентным соотношением для нахождения коэффициентов полинома (4) при известных входных и выходных значениях.

Пример. Пусть в (1) $r=1$, $n_0=1$, $q=2$. Тогда $(n_0+1)\,q=4$. Поскольку $r=1$, при описании переменных y, f, h и других индекс α, принимающий значение от 1 до r, не будет использован. При $y[n]=f(u_1[n],\ u_1[n-1],\ u_2[n], u_2[n-1])$ запишем полиномиальное представление в виде (4). Для этого запишем элементы множества $F(i)$, $Q(i,\overline{m})$ и $\Gamma(i,\overline{m})$ при $i=0,1,\ldots,4$.

$\boldsymbol{i}=\mathbf{1}$. В этом случае $F(1)=\{(1,0),(0,1)\}$.

а) $\overline{m}=(1,0)$. При этом

$$Q(1,(1,0))=\{1\}, \Gamma_1(1)=\{(\tau(1,1)=0),(\tau(1,1)=1)\}\,, \Gamma(1,(1,0))=\{((0)),((1))\}.$$

б) $\overline{m}=(1,0)$. При этом

$$Q(1,(0,1))=\{2\}, \Gamma_1(1)=\{(\tau(2,1)=0),(\tau(2,1)=1)\}\,, \Gamma(1,(0,1))=\{((0)),((1))\}.$$

Этому случаю соответствуют следующие слагаемые:

$$\begin{gathered} S_1=h_{(1,0)}[((0))]\,u_1[n],\ S_2=h_{(1,0)}[((1))]\,u_1[n-1]\,, \\ S_3=h_{(0,1)}[((0))]\,u_2[n],\ S_4=h_{(0,1)}[((1))]\,u_2[n-1]\,. \end{gathered} \tag{22}$$

$\boldsymbol{i}=\mathbf{2}$. В этом случае $F(2)=\{(1,1),(2,0),(0,2)\}$.

а) $\overline{m}=(1,1)$. При этом

$$Q(2,(1,1))=\{1,2\}, \Gamma_1(1)=\{(\tau(1,1)=0),(\tau(1,1)=1)\},$$

$$\Gamma(2,(1,1))=\{((0),(0)),((0),(1)),((1),(0)),((1),(1))\}.$$

Этому случаю соответствуют следующие слагаемые:

$$S_5=h_{(1,1)}[((0),(0))]\,u_1[n]\,u_2[n], S_6=h_{(1,1)}[((0),(1))]\,u_1[n]\,u_2[n-1], \tag{23}$$

$$S_7=h_{(1,1)}[((1),(0))]\,u_1[n-1]\,u_2[n], S_8=h_{(1,1)}[((1),(1))]\,u_1[n-1]\,u_2[n-1]\,.$$

б) $\overline{m}=(2,0)$. При этом

$$Q(2,(2,0))=\{1\}, \Gamma_1(2)=\{(\tau(1,1),\tau(1,2))=(0,1)\}\,, \Gamma(2,(2,0))=\{((0,1))\}.$$

Соответствующие слагаемые:

$$S_9=h_{(2,0)}[((0,1))]\,u_1[n]\,u_1[n-1]\,. \tag{24}$$

в) $\overline{m}=(0,2)$. При этом

$$Q(2,(0,2))=\{2\}, \Gamma_1(2)=\{(\tau(2,1),\tau(2,2))=(0,1)\}\,, \Gamma(2,(0,2))=\{((0,1))\}.$$

Соответствующие слагаемые:

$$S_{10} = h_{(0,2)}[((0,1))]\,u_2[n]\,u_2[n-1]. \qquad (25)$$

$\boldsymbol{i=3}$. В этом случае $F(3)=\{(2,1),(1,2)\}$.

а) $\overline{m}=(2,1)$. При этом

$$Q(3,(2,1))=\{1,2\},\ \Gamma_1(2)=\{(\tau(1,1),\tau(1,2))=(0,1)\},$$

$$\Gamma_1(1)=\{(\tau(2,1)=0),(\tau(2,1)=1)\}.$$

Элементы множества $\Gamma(3,(2,1))$ имеют вид $((\tau(1,1),\tau(1,2)),(\tau(2,1)))$. Поэтому

$$\Gamma(3,(2,1))=\{((0,1),(0)),((0,1),(1))\}.$$

Соответствующие слагаемые:

$$S_{11} = h_{(2,1)}[((0,1),(0))]\,u_1[n]\,u_1[n-1]\,u_2[n], \qquad (26)$$

$$S_{12} = h_{(2,1)}[((0,1),(1))]\,u_1[n]\,u_1[n-1]\,u_2[n-1].$$

б) $\overline{m}=(1,2)$. При этом

$$Q(3,(1,2))=\{1,2\},\ \Gamma_1(1)=\{(\tau(1,1)=0),(\tau(1,1)=1)\},$$

$$\Gamma_1(2)=\{(\tau(2,1),\tau(2,2))=(0,1)\}.$$

Элементы множества $\Gamma(3,(1,2))$ имеют вид $((\tau(1,1)),(\tau(2,1),\tau(2,2)))$. Поэтому

$$\Gamma(3,(1,2))=\{((0),(0,1)),((1),(0,1))\}.$$

Соответствующие слагаемые:

$$S_{13} = h_{(1,2)}[((0),(0,1))]\,u_1[n]\,u_2[n]\,u_2[n-1], \qquad (27)$$

$$S_{14} = h_{(1,2)}[((1),(0,1))]\,u_1[n-1]\,u_2[n]\,u_2[n-1].$$

$\boldsymbol{i=4}$. В этом случае $F(4)=\{(2,2)\}$. При этом

$$Q(3,(2,2))=\{1,2\},\ \Gamma_1(2)=\{(\tau(1,1),\ \tau(1,2))=(0,\ 1)\},$$

$$\Gamma_1(2)=\{(\tau(2,1),\tau(2,2))=(0,1)\},\ \Gamma(4,(1,2))=\{((0,1),(0,1))\}.$$

Поэтому соответствующее слагаемое следующее:

$$S_{15} = h_{(2,2)}[((0,1),(0,1))]\,u_1[n]\,u_1[n-1]\,u_2[n]\,u_2[n-1]. \qquad (28)$$

Таким образом,

$$y[n]=h_0+S_1+S_2+S_3+S_4+S_5+$$
$$+S_6+S_7+S_8+S_9+S_{10}+S_{11}+S_{12}+S_{13}+S_{14}+S_{15},\ GF(2), \qquad (29)$$

где S_i, $i=\overline{1,15}$, определяем по (22)—(29), а $h_0 \in GF(2)$.

Теперь рассмотрим определение какого-либо коэффициента из (29), например коэффициента $h_{(1,2)}[((1),(0,1))]$, при известных значениях входной и выходной последовательностей. Коэффициент $h_{(1,2)}[((1),(0,1))]$ является коэффициентом слагаемого $u_1[n-1]u_2[n]u_2[n-1]$. При $u_1[n-1]=$ $=u_2[n]=u_2[n-1]=1$, $u_1[n]=0$ через $f(u_1[n-1],\ u_2[n],\ u_2[n-1]=1)$ обозначим функцию $f(u_1[n],\ u_1[n-1],\ u_2[n],\ u_2[n-1])$. Для $h_{(1,2)}[((1),\ (0,1))]$ получаем $i=3$, $\overline{m}=(m_1,m_2)=(1,2)$, $\ell_1=1$, $\ell_2=2$, $\tau(1,1)=1, \tau(2,1)=0, \tau(2,2)=1$.

***k* = 1.** В этом случае $F_2(1,(1,2))=\{(1,(1),(1)),(1,(1),2))\}$, т.е. возможно два варианта:

а) $\theta=1$, $v_1=1$, $s_1=1$. При этом

$$\Omega_1(v_{s_1}, m(\ell_{s_1}))=\Omega_1(1,1)=\{\pi(1)=1\},\ \Omega(\theta,\overline{v},\overline{s})=\Omega(1,(1),(1))=((1)),$$
$$\overline{\pi}_1(\overline{\ell},\overline{s})=((1)),\ \overline{\overline{\tau}}(\overline{s},\overline{\pi}_1(\overline{\ell},\overline{s}))=\overline{\overline{\tau}}((1),((1)))=((\tau(1,1)))=((1)).$$

Этому случаю соответствует коэффициент $h_{(1,0)}[((1))]$.

б) $\theta=1$, $v_1=1$, $s_1=2$. При этом

$$\Omega_1(v_{s_1}, m(\ell_{s_1}))=\Omega_1(1,2)=\{\pi^{(1)}(2)=(1),\pi^{(2)}(2)=(2)\},$$
$$\Omega(\theta,\overline{v},\overline{s})=\Omega(1,(1),(2))=\{\overline{\pi}_1^{(1)}(\overline{\ell},\overline{s})=((1)),\overline{\pi}_1^{(2)}(\overline{\ell},\overline{s})=((2))\},$$
$$\overline{\overline{\tau}}(\overline{s},\overline{\pi}_1^{(1)}(\overline{\ell},\overline{s}))=\overline{\overline{\tau}}^{(1)}((2),((2)))=((\tau^{(1)}(2,1))=((0)),$$
$$\overline{\overline{\tau}}(\overline{s},\overline{\pi}_1^{(2)}(\overline{\ell},\overline{s}))=\overline{\overline{\tau}}^{(2)}((2),((2)))=((\tau^{(2)}(2,1))=((1)).$$

Этому случаю соответствуют коэффициенты $h_{(0,1)}[((0))]$ и $h_{(0,1)}[((1))]$.

***k* = 2.** В этом случае $F_2(2,(1,2))=\{(1,(2),(2)),(2,(1,1),(1,2))\}$.

а) $\theta=1$, $v_1=2$, $s_1=2$. Как и в случае $k=1$, этому случаю соответствует коэффициент $h_{(0,2)}[((0),(1))]$.

б) $\theta=2$, $v_1=1$, $v_2=1$, $s_1=1$, $s_2=2$. Как и в случае $k=1$, этому случаю соответствуют коэффициенты $h_{(1,1)}[((1),(0))]$ и $h_{(1,1)}[((1),(1))]$.

Таким образом, на основании (16) получаем

$$h_{(1,2)}[((1),(0,1))]=f(u_1[n-1],u_2[n],u_2[n-1]=1)+h_0+h_{(1,0)}[((1))]+$$
$$+h_{(0,1)}[((0))]+h_{(0,1)}[((1))]+h_{(0,2)}[((0),(1))],\ GF(2).$$

Выводы

Двухзначный аналог полинома Вольтерры в виде (4) является общим функциональным соотношением для МНМДС с фиксированной памятью n_0 и может быть использован при исследовании ее свойств, например при постановке и решении различных математических и прикладных задач. Полученное рекуррентное соотношение для определения коэффициентов полиномиальных представлений может быть использовано при разработке алгоритмов и программ для вычисления значений этих коэффициентов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фараджев Р.Г.* Линейные последовательностные машины. — М. : Сов. радио, 1975. — 248 с.
2. *Блюмин С.Л., Фараджев Р.Г.* Линейные клеточные машины: Подход пространства состояний (обзор)// Автоматика и телемеханика. — 1982. — № 2. — С. 125—163.
3. *Фараджев Р.Г., Фейзиев Ф.Г.* Методы и алгоритмы решения задачи квадратичной оптимизации для двоичных последовательностных машин.— Баку: Изд-во Элм, 1996. — 180 с.
4. *Фейзиев Ф.Г., Фараджева М.Р.* Модулярные последовательностные машины: Основные результаты по теории и приложению. — Баку: Изд-во Элм, 2006. — 234 с.
5. *Фейзиев Ф.Г., Самедова З.А.* Полиномиальное соотношение для представления полной реакции 3*D*-нелинейных модулярных динамических систем// Электрон. моделирование. — 2011. — **33**, № 2. — С. 33—50.
6. *Блюмин С.Л., Корнеев А.М.* Дискретное моделирование систем автоматизации и управления. — Липецк: Липецкий эколого-гуманитарный ин-т, 2005. — 124 с.

Поступила 27.02.17

REFERENCES

1. Faradjev, R.G. (1975), *Lineynye posledovatelnoctnye mashiny* [Linear sequential machines], Sovetskoe radio, Moscow, Russia.
2. Blyumin, S.L. and Faradjev, R.G. (1982), “Linear cellular machines: The approach of the state space (review)”, *Avtomatika i telemekhanika*, no 2, pp. 125-163.
3. Faradjev, R.G. and Feyziyev, F.G. (1996), *Metody i algoritmy resheniya zadachi kvadratichnoy optimizatsii dlya dvoichnykh posledovatelnostnykh mashin* [Methods and algorithms for solving quadratic optimization problem for binary sequential machines], Elm, Baku, Azerbaijan.
4. Feyziyev, F.G. and Faradjeva, M.R. (2006), *Modulyarnye posledovatelnostnye mashiny: Osnovnye rezultaty po teorii i prilozheniyu* [Modular sequential machines: The main results in the theory and application], Elm, Baku, Azerbaijan.
5. Feyziyev, F.G. and Samedova, Z.A. (2011), “Polynomial ratio to represent the full reaction 3*D*-nonlinear modular dynamical systems”, *Elektronnoe modelirovanie*, Vol. 33, no. 2, pp. 33-50.
6. Blyumin, S.L. and Korneyev, A.M. (2005), *Diskretnoye modelirovaniye system avtomatizatsii i upravleniya: Monografiya* [Discrete modeling of automation and control systems: Monograph], Lipetsk Ekologo-gumanitarny institut, Lipetsk, Russia.

Received 27.02.17

F.G. Feyziyev, M.R. Mekhtiyeva, A.J. Huseynova

THE TWO-VALUED ANALOGUE OF VOLTERRA POLYNOMIAL
FOR DESCRIPTION OF FULL REACTION OF BINARY MULTIDIMENSIONAL
NONLINEAR MODULAR DYNAMIC SYSTEMS

The construction of a two-valued analogue of Volterra polynomial for description of full reaction of binary multidimensional nonlinear modular dynamic systems is considered. The recurrence formulas are presented for determining coefficients of this polynomial at certain values of the input and output sequences of multidimensional nonlinear modular dynamic systems.

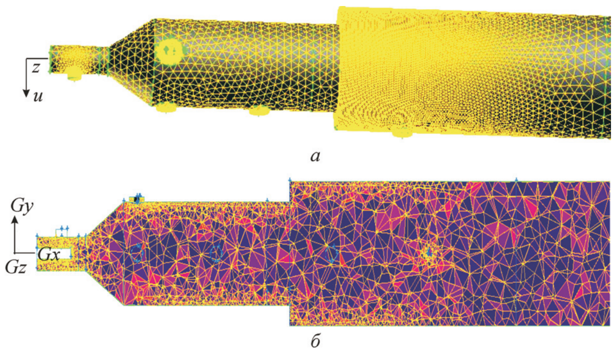
K e y w o r d s: multidimensional nonlinear modular dynamic system, two-valued analogue of Volterra polynomial, the recurrence formulas.

ФЕЙЗИЕВ Фикрат Гюлали оглы, д-р физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой дифференциальных уравнений и оптимизации Сумгаитского госуниверситета. В 1978 г. окончил Азербайджанский госуниверситет. Область научных исследований — математическая кибернетика, теория конечных автоматов и теоретические вопросы информатики.

МЕХТИЕВА Марал Рзабала кызы, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики Бакинского госуниверситета. В 1992 г. окончила Азербайджанский госуниверситет. Область научных исследований — математическая кибернетика, теория конечных автоматов и теоретические вопросы информатики.

ГУСЕЙНОВА Айнура Джаббар кызы, докторант Сумгаитского госуниверситета. В 2002 г. окончила Азербайджанский госуниверситет, а в 2007 г. — Сумгаитский госуниверситет. Область научных исследований — теория конечных автоматов.

Рис. 2. Розрахункова сітка на зовнішній поверхні стенду ВГП-100В (*а*) та сітка стенду з моделлю термопари на першій діагностичній секції (*б*)



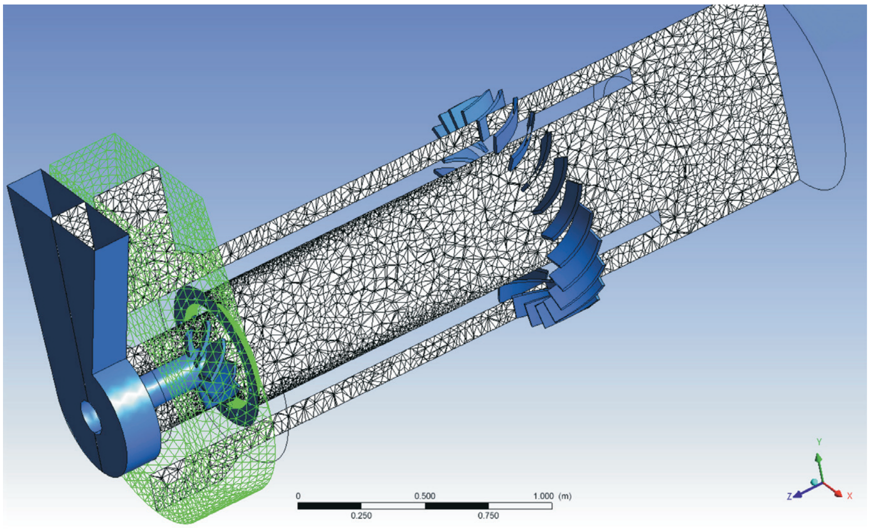


Рис. 4. Розрахункова сітка пальника котла ТПП-210А

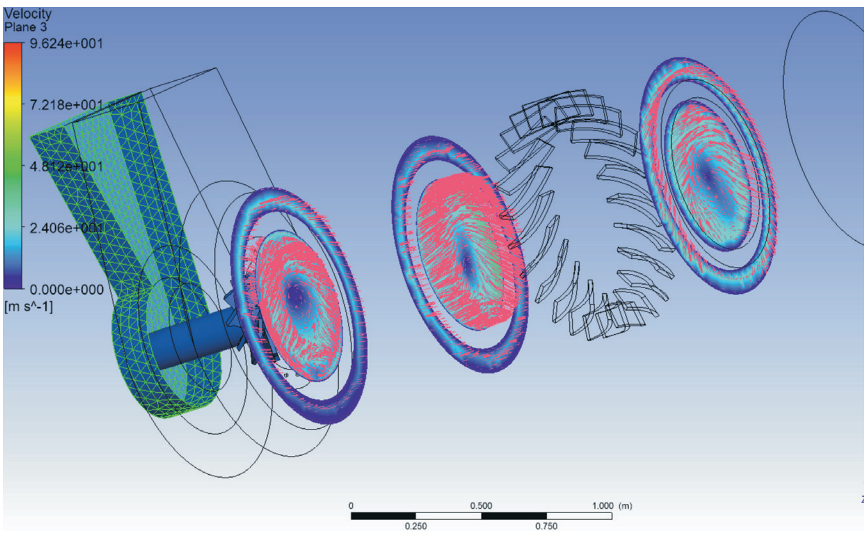
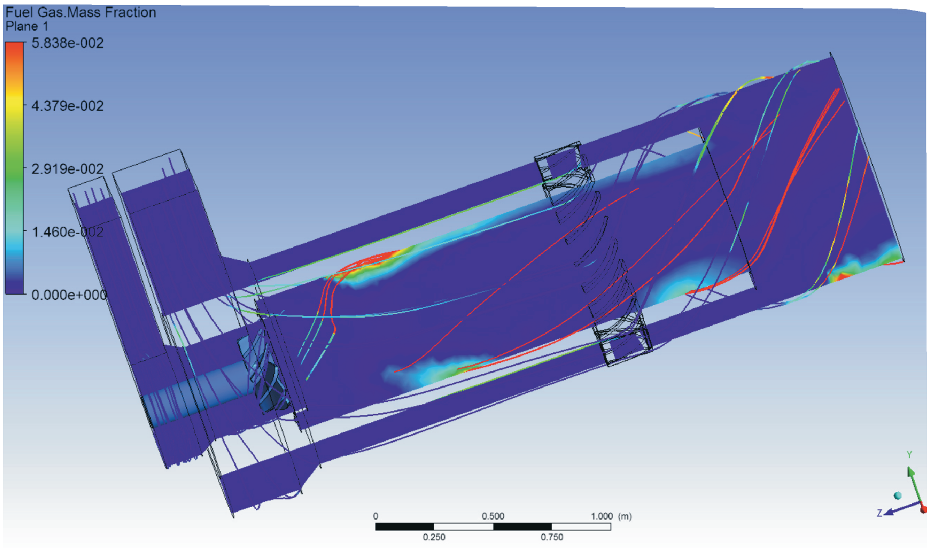
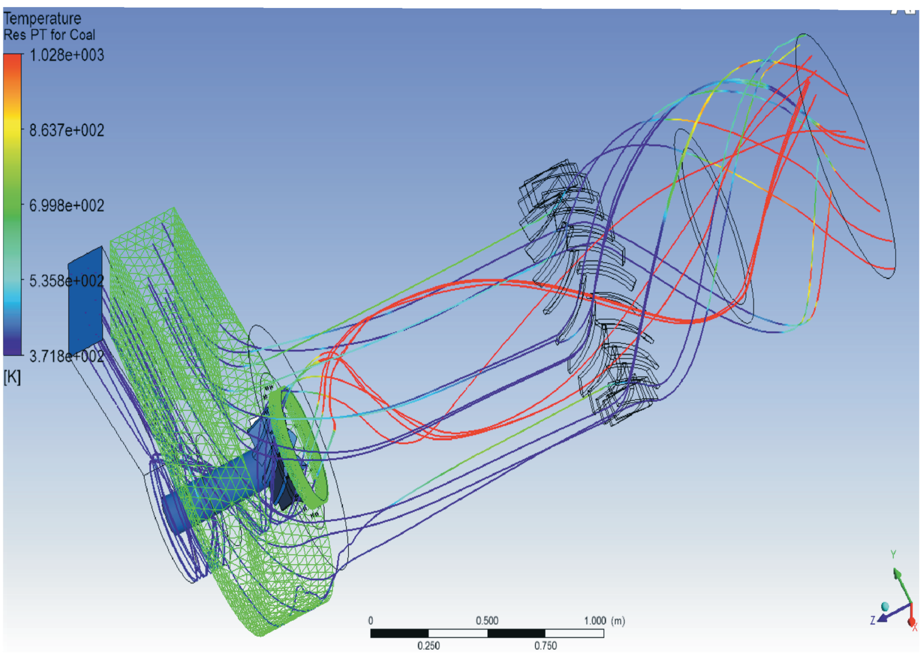


Рис. 5. Розподіл векторів швидкості на поперечних перерізах



а



б

Рис. 6. Поле концентрації летких у перерізі пальника, суміщене з треками часточок вугілля (*а*), та 3-*d* треки вугільних часток за температурами (*б*)