
УДК 681.5.015

Ю.А. Клевцов, канд. техн. наук
(Украина, 03150, Киев,
тел. (044) 5290566, e-mail: kk123@ukr.net)

Моделирование объектов с распределенными параметрами четвертого порядка

На основании теории конечных интегральных преобразований рассмотрен класс моделей — передаточные функции объектов, для описания которых необходимы дифференциальные уравнения в частных производных. Приведены правила, устанавливающие соответствие между операциями в пространственно-временной и спектральной областях. Рассмотрены примеры моделирования объектов с распределенными параметрами.

К л ю ч е в ы е с л о в а: конечные интегральные преобразования, объекты с распределенными параметрами, передаточная функция.

На основі теорії кінцевих інтегральних перетворень розглянуто клас моделей — передавальні функції об'єктів, для опису яких необхідні диференціальні рівняння у частинних похідних. Наведено правила, які встановлюють відповідність між операціями в просторово-часовій та спектральній областях. Розглянуто приклади моделювання об'єктів з розподіленими параметрами.

К л ю ч о в і с л о в а: скінченні інтегральні перетворення, об'єкти з розподіленими параметрами, передаточна функція.

Спектральная теория нестационарных систем управления [1] применяется для решения задач управления объектами с сосредоточенными и распределенными параметрами [2—6]. Используя конечные интегральные преобразования, можно от решения дифференциальных уравнений перейти к решению систем линейных алгебраических уравнений, что упрощает решение задачи моделирования.

Однако спектральная теория нестационарных систем управления применялась для решения задач моделирования и идентификации распределенных объектов, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных не выше второго порядка. Поэтому будем рассматривать возможность использования полученных ранее результатов для моделирования объектов с распределенными параметрами (ОРП) более высокого порядка, а именно четвертого, а также возможность моделирования различных гра-

© Ю.А. Клевцов, 2017

ничных условий (не только первого, второго и третьего рода), возникающих при исследовании объектов высокого порядка. Такие объекты встречаются в механике, например моделирование поперечного колебания балки, консоли, пластины. На простых примерах моделирования одномерных и двумерных ОРП покажем методику моделирования ОРП четвертого порядка.

Постановка задачи. Допустим, модель некоторого абстрактного объекта можно представить в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} \right) = \Phi(x, y, z, t), \quad (1)$$

где $u = u(x, y, z, t)$, $t \geq 0$; t — время; x, y, z — пространственные аргументы, $0 \leq x \leq l_x, 0 \leq y \leq l_y, 0 \leq z \leq l_z, a \neq 0$. Все функции удовлетворяют необходимым условиям гладкости, функция $u(x, y, z, t)$ четырежды дифференцируема по пространственным аргументам и дважды по временному. Уравнение (1) должно удовлетворять начальным,

$$u(x, y, z, 0) = f(x, y, z), \quad \frac{\partial u(x, y, z, 0)}{\partial t} = g(x, y, z), \quad (2)$$

и некоторым граничным условиям, например,

$$\begin{aligned} u(0, y, z, t) &= u(l_x, y, z, t) = u(x, 0, z, t) = 0, \\ u(x, l_y, z, t) &= u(x, y, 0, t) = u(x, y, l_z, t) = 0, \\ \frac{\partial u(0, y, z, t)}{\partial x} &= \frac{\partial u(l_x, y, z, t)}{\partial x} = \frac{\partial u(x, 0, z, t)}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial u(x, l_y, z, t)}{\partial y} &= \frac{\partial u(x, y, 0, t)}{\partial z} = \frac{\partial u(x, y, l_z, t)}{\partial z} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Требуется найти функцию $u(x, y, z, t)$, удовлетворяющую (1) с соответствующими начальными и граничными условиями.

Метод решения. Решение задачи будем искать на основании спектральной теории нестационарных систем управления [2—6], которая оперирует со спектральными характеристиками (СХ) функций. Поскольку функция $u(x, y, z, t)$, описывающая поведение трехмерного объекта (1), есть функция четырех аргументов, рассмотрим четырехмерную СХ U_{ijklm} . Если функция $u(x, y, z, t)$ интегрируема с квадратом по всем аргументам,

$$\int_0^T \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} \int_0^{l_z} u^2(x, y, z, t) dx dy dz dt < \infty,$$

то

$$U_{ijklm} = \int_0^T \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} \int_0^{l_z} \Psi_{ijklm}^*(x, y, z, t) u(x, y, z, t) dx dy dz dt, \quad (4)$$

где $\{\Psi_{ijklm}(x, y, z, t)\}$ — система ортонормированных базисных функций (ОБФ) на рассматриваемых отрезках в пространстве L_2 . Эту систему ОБФ можно представить в виде произведения одномерных ОБФ по одной переменной в пространстве L_2 :

$$\Psi_{ijklm}(x, y, z, t) = \psi_i(x) \psi_j(y) \varphi_k(z) \varphi_m(t),$$

где $\{\psi_i(x)\}, \{\psi_j(y)\}, \{\varphi_k(z)\}, \{\varphi_m(t)\}$ — системы ОБФ по одной переменной. Обратное преобразование осуществляется по формуле

$$u(x, y, z, t) = \sum_{ijklm} U_{ijklm} \Psi_{ijklm}(x, y, z, t). \quad (5)$$

Оператор определения СХ (4) обозначим $U_{ijklm} = S^4[u(x, y, z, t)]$, где степень при S указывает, относительно скольких аргументов определяется СХ.

Для того чтобы уравнение (1) с соответствующими начальными и граничными условиями записать в спектральной области, рассмотрим правила, устанавливающие соответствие между операциями в пространственно-временной и спектральной областях.

П р а в и л о 1. Вторая производная функции $u(x, y, z, t)$ по временному аргументу с учетом начальных условий (2) в спектральной области имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x, y, z, t)}{\partial t^2} &\Rightarrow (E \otimes E \otimes E \otimes P^2)U - \\ &- S^3[f(x, y, z)]P\Delta_t - S^3[g(x, y, z)]\Delta_t, \end{aligned} \quad (6)$$

где E — единичная матрица; \otimes — символ прямого произведения матриц; P — спектральная (двумерная) характеристика оператора дифференцирования, учитывающая начальные условия [1],

$$P_{ij} = \int_0^T \varphi_i^*(t) \frac{d\varphi_j(t)}{dt} dt + \varphi_i^*(0) \varphi_j(0);$$

S^3 — оператор определения спектральной характеристики функции трех аргументов; Δ_t — одномерная спектральная характеристика дельта функции, $\Delta_t = S[\delta(t)]$.

Рассмотрим правила дифференцирования по пространственным аргументам. Они зависят от вида граничных условий. Для упрощения записи примем следующее: $l = l_x = l_y = l_z$.

П р а в и л о 2. Четвертая производная функции $u(x, y, z, t)$ по аргументу x при граничных условиях

$$u(0, y, z, t) = \frac{\partial u(0, y, z, t)}{\partial x} = 0, \quad u(l, y, z, t) = \frac{\partial u(l, y, z, t)}{\partial x} = 0, \quad (7)$$

в спектральной области выполняется по правилу

$$\frac{\partial^4 u(x, y, z, t)}{\partial x^4} \Rightarrow (D_2 \otimes E \otimes E \otimes E)U, \quad (8)$$

где $D_2 = PPRR$; P — СХ оператора дифференцирования, не учитывающая граничных условий [1],

$$P_{ij} = \int_0^l \psi_i^*(x) \frac{d\psi_j(x)}{dx} dx;$$

R — СХ оператора дифференцирования, учитывающая граничные условия [3],

$$R_{ij} = \int_0^l \psi_i^*(x) \frac{d\psi_j(x)}{dx} dx + \psi_i^*(0)\psi_j(0) - \psi_i^*(l)\psi_j(l).$$

Правило дифференцирования (7) по аргументу x обобщим на правила дифференцирования по аргументам y, z . Спектральная характеристика четвертой производной функции $u(x, y, z, t)$ по аргументу y вычисляется по формуле

$$\frac{\partial^4 u(x, y, z, t)}{\partial y^4} \Rightarrow (E \otimes D_2 \otimes E \otimes E)U, \quad (9)$$

если заданы граничные условия

$$u(x, 0, z, t) = \frac{\partial u(x, 0, z, t)}{\partial y} = 0, \quad u(x, l, z, t) = \frac{\partial u(x, l, z, t)}{\partial y} = 0.$$

Спектральная характеристика четвертой производной функции $u(x, y, z, t)$ по аргументу z вычисляется по формуле

$$\frac{\partial^4 u(x, y, z, t)}{\partial z^4} \Rightarrow (E \otimes E \otimes D_2 \otimes E)U, \quad (10)$$

если заданы граничные условия

$$u(x, y, 0, t) = \frac{\partial u(x, y, 0, t)}{\partial z} = 0, \quad u(x, y, l, t) = \frac{\partial u(x, y, l, t)}{\partial z} = 0.$$

Если ОРП одномерный и граничные условия аналогичны (7), то

$$\frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} \Rightarrow (D_2 \otimes E)U. \quad (11)$$

П р а в и л о 3. Пусть заданы граничные условия вида

$$u(0, y, z, t) = \frac{\partial^2 u(0, y, z, t)}{\partial x^2} = 0, \quad u(l, y, z, t) = \frac{\partial^2 u(l, y, z, t)}{\partial x^2} = 0. \quad (12)$$

В этом случае четвертая производная функции $u(x, y, z, t)$ по x в спектральной области вычисляется по формуле

$$\frac{\partial^4 u(x, y, z, t)}{\partial x^4} \Rightarrow (D_3 \otimes E \otimes E \otimes E)U,$$

где $D_3 = PRPR$.

Рассмотренное правило дифференцирования функции $u(x, y, z, t)$ по аргументу x обобщим на правила дифференцирования по аргументам y и z . Спектральная характеристика функции по аргументу y вычисляется по формуле

$$\frac{\partial^4 u(x, y, z, t)}{\partial y^4} \Rightarrow (E \otimes D_3 \otimes E \otimes E)U,$$

если заданы граничные условия

$$u(x, 0, z, t) = \frac{\partial^2 u(x, 0, z, t)}{\partial y^2} = 0, \quad u(x, l, z, t) = \frac{\partial^2 u(x, l, z, t)}{\partial y^2} = 0.$$

Спектральная характеристика четвертой производной функции $u(x, y, z, t)$ по аргументу z вычисляется по формуле

$$\frac{\partial^4 u(x, y, z, t)}{\partial z^4} \Rightarrow (E \otimes E \otimes D_3 \otimes E)U,$$

если заданы граничные условия

$$u(x, y, 0, t) = \frac{\partial^2 u(x, y, 0, t)}{\partial z^2} = 0, \quad u(x, y, l, t) = \frac{\partial^2 u(x, y, l, t)}{\partial z^2} = 0.$$

Если функционирование ОРП зависит только от x и y , то

$$\frac{\partial^4 u(x, y)}{\partial x^4} \Rightarrow (D_3 \otimes E)U, \quad \frac{\partial^4 u(x, y)}{\partial y^4} \Rightarrow (E \otimes D_3)U. \quad (13)$$

Если ОРП одномерный и граничные условия аналогичны (12), то

$$\frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} \Rightarrow (D_3 \otimes E)U. \quad (14)$$

П р а в и л о 4 позволяет учитывать смешанные производные. Четвертая производная функции $u(x, y, t)$ по аргументам x и y в спектральной области вычисляется по формуле

$$\frac{\partial^4 u(x, y, t)}{\partial x^2 \partial y^2} \Rightarrow (D_{4x} \otimes D_{4y} \otimes E)U, \quad (15)$$

при граничных условиях $u(0, y, t) = u(l, y, t) = u(x, 0, t) = u(x, l, t) = 0$, где $D_{4x} = D_{4y} = PR$.

П р а в и л о 5. Спектральная характеристика четвертой производной функции $u(x, t)$ по аргументу x с учетом условий

$$u(0, t) = \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial^2 u(l, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u(l, t)}{\partial x^3} = 0$$

вычисляется по формуле

$$\frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} \Rightarrow (D_5 \otimes E)U. \quad (16)$$

Здесь $D_5 = RRPP$, где

$$R_{ij} = \int_0^1 \psi_i^*(x) \frac{d\psi_j(x)}{dx} dx - \psi_i^*(l) \psi_j(l).$$

Эта СХ учитывает граничные условия на правой границе

$$P_{ij} = \int_0^1 \psi_i^*(x) \frac{d\psi_j(x)}{dx} dx + \psi_i(0) \psi_j(0).$$

Спектральная характеристика P учитывает условия на левой границе.

П р а в и л о 6. Если коэффициент a в уравнении (1) является функцией пространственных и временного аргументов, то необходимо применить правило, позволяющее вычислять произведение функций нескольких ар-

гументов в спектральной области. Пусть требуется найти СХ произведения функций $f(x, y, z, t)$, $u(x, y, z, t)$. Если функцию f можно представить в виде произведения $f(x, y, z, t) = a(x)b(y)c(z)v(t)$, то правило произведения функций будет иметь вид

$$[a(x)b(y)c(z)v(t)]u(x, y, z, t) \Rightarrow (A \otimes B \otimes C \otimes V)U,$$

где A, B, C, V — матрицы СХ множителей соответственно $a(x), b(y), c(z), v(t)$. Эти СХ вычисляются по формуле [1]

$$A_{ij} = \int_0^l \psi_i^*(x) \psi_j(x) a(x) dx.$$

По аналогичным формулам вычисляются СХ матриц B, C, V . Если $a = \text{const}$, то правило б упрощается:

$$a u(x, y, z, t) \Rightarrow a U. \quad (17)$$

Таким образом, операциям дифференцирования функции четырех аргументов в спектральной области соответствуют алгебраические операции над матрицами СХ. Используем рассмотренные правила для решения задачи моделирования.

Алгоритм моделирования применяем к абстрактному объекту (1) с начальными (2) и граничными (3) условиями. Для того чтобы трансформировать это уравнение в спектральную область, используем правила 1, 2, 6 и формулы (6)—(10), (17). В результате получаем

$$(E \otimes E \otimes E \otimes P^2)U + a[(D_2 \otimes E \otimes E \otimes E)U] + \\ + (E \otimes D_2 \otimes E \otimes E)U + (E \otimes E \otimes D_2 \otimes E)U = F + H, \quad (18)$$

где $F = S^4[\Phi(x, y, z, t)]$ — СХ возмущающей функции; $H = S^3[f(x, y, z)] \times \times P\Delta_t(0) + S^3[g(x, y, z)]\Delta_t(0)$ — СХ начальных условий. Выполнив алгебраические преобразования уравнения (18), получим

$$[E \otimes E \otimes E \otimes P^2 + a(D_2 \otimes E \otimes E \otimes E + \\ + E \otimes D_2 \otimes E \otimes E + E \otimes E \otimes D_2 \otimes E)] = F + H,$$

откуда $U = W(F + H)$, где

$$W = [E \otimes E \otimes E \otimes P^2 + a(D_2 \otimes E \otimes E \otimes E + \\ + E \otimes D_2 \otimes E \otimes E + E \otimes E \otimes D_2 \otimes E)]^{-1}. \quad (19)$$

Система алгебраических уравнений (19) разрешима, если существует обратная матрица W , критерием существования которой может служить

теорема 8.5.1 из работы [7], обобщенная на многомерный случай. Если $\lambda_m + a(\mu_i + \mu_j + \mu_k) \neq 0$, то матрица W существует, где $\lambda_m, \mu_i, \mu_j, \mu_k$ — собственные значения матриц P^2, D_2 .

Поскольку матрица W связывает СХ входной функции $\Phi(x, y, z, t)$ и выходной функции $u(x, y, z, t)$, то эта матрица является передаточной функцией объекта с распределенными параметрами (1) с краевыми условиями (3). Если в качестве входного воздействия использовать произведение дельта-функций $\delta(x-\xi)\delta(y-\zeta)\delta(z-\eta)\delta(t-\tau)$, то можно показать, что W есть СХ функции Грина $G(x-\xi, y-\zeta, z-\eta, t-\tau)$ объекта.

Численные примеры. Применение аналитического аппарата прямого или кронекерова произведения матриц является удобным способом записи операций над СХ. Матрицы СХ U_{ijkm} и F_{ijkm} представляются в виде матриц столбцов. Такое преобразование осуществляется посредством обхода сначала по индексу i , затем по индексу j и так далее. Матрицы, выполняющие операции дифференцирования, например $E \otimes E \otimes E \otimes P^2$, вследствие прямого произведения представляются в общем случае в виде квадратных матриц. Применение такого аппарата позволяет использовать для численных расчетов стандартные программы операций над матрицами.

Для проверки работоспособности приведенного алгоритма рассмотрим несколько примеров, три из которых — одномерные случаи, позволяющие упростить понимание метода.

Пример 1. Пусть некоторый объект описывается уравнением [8]

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0, \quad (20)$$

с начальными,

$$u(x, 0) = \sin(\pi x) + 0,5 \sin(3\pi x) = f(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0,$$

и граничными,

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad \frac{\partial^2 u(0, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(1, t)}{\partial x^2} = 0,$$

условиями. Данная задача описывает динамику тонкой колеблющейся балки, концы которой свободно опираются на две опоры (оба конца на шарнирах). Используя формулы (6), (14) и учитывая отсутствие аргументов y и z , уравнение (20) с соответствующими начальными и граничными условиями в спектральной области представим в виде $(E \otimes P^2)U + (D_3 \otimes E)U = H$, где $H = S [\sin(\pi x) + 0,5 \sin(3\pi x)] P \Delta_t(0)$, откуда

$$U = (E \otimes P^2 + D_3 \otimes E)^{-1} H. \quad (21)$$

Для численных расчетов во всех примерах в качестве базисных функций по временному и пространственным аргументам будем использовать ортонормированные на $[0, 1]$ полиномы Лежандра. Порядок матриц в примере 1 равен 55. Численные значения матриц $\Delta_t(0)$, P , \mathbf{P} , R приведены в [4, 9], $S[f(x)] = [0,742 \ 0 \ -0,102 \ 0 \ -0,242 \ 0 \ 0,067 \ 0 \ 0,008 \ \dots]^T$. Подставляя численные значения СХ в (21), получаем систему линейных алгебраических уравнений, решая которую с использованием обращения (5), находим функцию $u(x, t)$. Результаты моделирования спектральным методом сравнивались с точным решением [8]

$$u_{01}(x, t) = \cos(\pi^2 t) \sin(\pi x) + 0,5 \cos(9\pi^2 t) \sin(3\pi x).$$

Абсолютная относительная погрешность не превысила 1 %.

Пример 2. Моделируем динамику тонкой балки, концы которой жестко зажаты. Пусть уравнение, описывающее динамику такой балки, имеет вид

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} = \Phi(x, t). \quad (22)$$

Заданы начальные,

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \quad (23)$$

и граничные,

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial u(1, t)}{\partial x} = 0, \quad (24)$$

условия, а также возмущающая функция $\Phi(x, t) = 2\sin^2(\pi x)(1 + 4\pi^4 t^2) - 8\pi^4 t^2 \cos^2(\pi x)$. Используя формулы (6), (11) и учитывая отсутствие пространственных аргументов y и z , уравнение (22) с начальными (23) и граничными (24) условиями в спектральной области запишем в виде $(E \otimes P^2)U + (D_2 \otimes E)U = S^2[\Phi(x, t)]$, откуда получим

$$U = (E \otimes P^2 + D_2 \otimes E)^{-1} S^2[\Phi(x, t)]. \quad (25)$$

Для моделирования этого примера также использовались ортонормированные на $[0, 1]$ полиномы Лежандра. Порядок матриц равен 11. Решая (25) и используя формулу обращения (5), находим функцию $u(x, t)$. Результаты моделирования сравнивались с аналитическим решением $u_{02}(x, t) = t^2 \sin^2(\pi x)$. Абсолютная относительная погрешность не превысила 0,5 %.

Пример 3. Моделируем поперечные колебания тонкой балки (консоль). Один конец консоли закреплен, другой — свободен. Поперечные колебания такой балки описываются уравнением

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} = \Phi(x,t), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0, \quad (26)$$

с начальными,

$$u(x,0) = f(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = g(x),$$

и граничными,

$$u(0,t) = \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 u(1,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u(1,t)}{\partial x^3} = 0,$$

условиями. Задана возмущающая функция $\Phi(x,t) = 10e^{-1} \sin(\pi x)$ и начальные условия $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x$. Используя формулы (6) и (16) и учитывая, что отсутствуют аргументы y и z , уравнение (26) с соответствующими начальными и граничными условиями в спектральной области запишем в следующем виде: $(E \otimes P^2)U + (D_5 \otimes E)U = F$, где $F = S[f(x)]P\Delta_t(0) + S[g(x)]\Delta_t(0) + S^2[\Phi(x,t)]$. Отсюда $U = (E \otimes P^2 + D_5 \otimes E)^{-1}F$. Используя формулу обращения (5), находим функцию $u(x,t)$. Результаты моделирования приведены на рисунке (размер СХ равен 20).

Эталонное решение вычислено с использованием функции Грина:

$$u_{03}(x,t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 f(\xi) G(x,\xi,t) d\xi + \int_0^1 g(\xi) G(x,\xi,t) d\xi + \int_0^t \int_0^1 \Phi(\xi,\tau) G(x,\xi,t-\tau) d\xi d\tau,$$

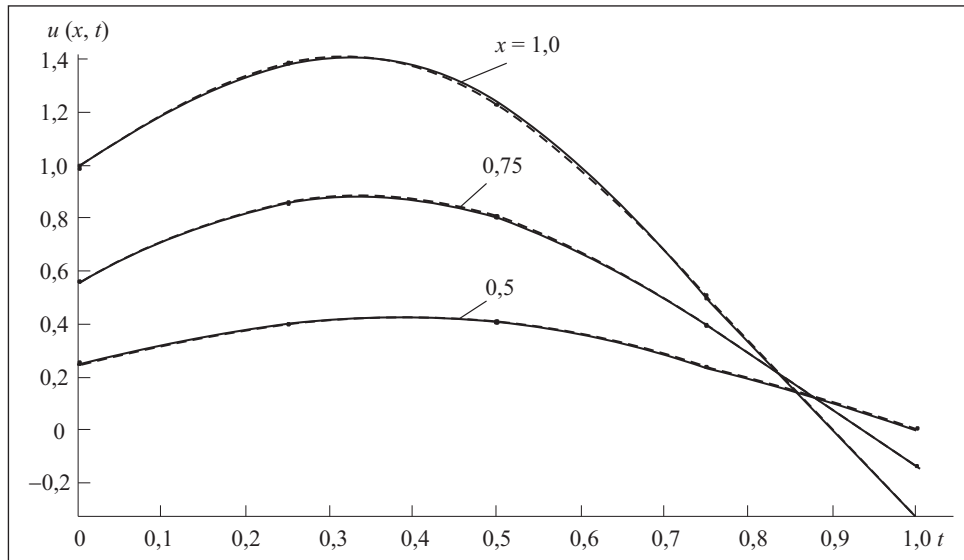
где $G(x,\xi,t)$ — функция Грина,

$$G(x,\xi,t) = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(\xi)}{\lambda_n^2 \varphi_n^2(1)} \sin^2(\lambda_n^2 t);$$

$$\varphi_n(x) = [\sinh(\lambda_n) + \sin(\lambda_n)][\cosh(\lambda_n x) - \cos(\lambda_n x)] - [\cosh(\lambda_n) + \cos(\lambda_n)][\sinh(\lambda_n x) - \sin(\lambda_n x)];$$

λ_n — положительные корни уравнения $\cosh(\lambda_n) \cos(\lambda_n) + 1 = 0$.

Из рисунка видно, что абсолютная погрешность составляет менее 1%. Погрешность носит синусоидальный характер и увеличивается при $x=1$.



Результаты моделирования (штриховая кривая) поперечных колебаний консоли и эталонное решение $u_{03}(x, t)$ (сплошная кривая) для траекторий точек консоли x

Пример 4. Моделируем поперечные колебания жесткой прямоугольной пластинки на упругом основании с шарнирной опорой по всему контуру. Поперечные колебания пластинки описываются уравнением [10]

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u(x, y)}{\partial y^4} - u(x, y) = \Phi(x, y), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1,$$

с граничными условиями

$$u(0, y) = u(1, y) = \frac{\partial^2 u(0, y)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(1, y)}{\partial x^2} = 0,$$

$$u(x, 0) = u(x, 1) = \frac{\partial^2 u(x, 0)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u(x, 1)}{\partial y^2} = 0.$$

Пусть $\Phi(x, y) = (4\pi^4 - 1)\sin(\pi x)\sin(\pi y)$. Используя правила 3, 4 и формулы (13), (15) и учитывая отсутствие аргумента t , данное уравнение с граничными условиями трансформируем в спектральную область:

$$(D_3 \otimes E)U + 2(D_{4x} \otimes D_{4y})U + (E \otimes D_3)U - (E \otimes E)U = S^2[\Phi(x, t)].$$

Отсюда получаем

$$U = (D_3 \otimes E + 2D_{4x} \otimes D_{4y} + E \otimes D_3 - E \otimes E)^{-1} S^2[\Phi(x, t)].$$

Используя формулу обращения (5), находим функцию $u(x, y)$.

Пример 5. Пусть некоторый абстрактный трехмерный ОРП описывается уравнением (1), $\Phi(x, y, z, t) = (1 + 3a\pi^4 e^{-t} \sin(\pi x) \sin(\pi y) \sin(\pi z))$, $a = 5$. Заданы начальные,

$$u(x, y, z, 0) = \sin(\pi x) \sin(\pi y) \sin(\pi z) = f(x, y, z),$$

$$\frac{\partial u(x, y, z, 0)}{\partial t} = -\sin(\pi x) \sin(\pi y) \sin(\pi z) = g(x, y, z),$$

и граничные условия (3). Используя формулы (6), (8)—(10), с учетом (3) запишем уравнение (1) в спектральной форме:

$$(E \otimes E \otimes E \otimes P^2)U + 5[(D_2 \otimes E \otimes E \otimes E)U] + \\ + (E \otimes D_2 \otimes E \otimes E)U + (E \otimes E \otimes D_2 \otimes E)U = F + H.$$

Здесь $F = S^4[\Phi(x, y, z, t)]$; $H = S^3[f(x, y, z)]P\Delta_t(0) + S^3[g(x, y, z)]\Delta_t(0)$, откуда $U = W(F + H)$, где $W = [E \otimes E \otimes E \otimes P^2 + 5(D_2 \otimes E \otimes E \otimes E + E \otimes D_2 \otimes E \otimes E + E \otimes E \otimes D_2 \otimes E)]^{-1}$.

Для моделирования использована та же система ортонормированных на $[0, 1]$ базисных функций — полиномы Лежандра. Используя формулу обращения (5), находим функцию $u(x, y, z, t)$. Результаты моделирования спектральным методом при различных значениях n сравнивались с точным решением $u_0(x, y, z, t) = e^{-t} \sin(\pi x) \sin(\pi y) \sin(\pi z)$.

Для сравнения результата моделирования u и эталонного решения u_0 использована величина средней относительной погрешности

$$\delta = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left| \frac{u_i - u_{i0}}{u_{i0}} \right|.$$

Зависимость δ от размера СХ n приведена в таблице для примеров 4 и 5. Как видно из таблицы, с увеличением размера СХ повышается точность вычислений. Однако дальнейшее увеличение размера СХ не приводит к повышению точности.

Пример	Значение δ при n							
	3	4	5	6	7	8	9	10
4	669	0,12	1,98	0,003	0,007	0,0017	0,0016	0,0016
5	296	0,03	0,11	0,0015	0,001	0,001	0,001	0,001

Приведенные формулы справедливы для бесконечномерных матриц. Численные расчеты выполнены с усеченными матрицами. Спектральные характеристики усекаются, когда дискретные аргументы i, j, k, l изменяются от единицы до размера СХ n . Усечение приводит к погрешности результата.

Выводы

Сравнивая результаты пяти примеров моделирования с эталонными значениями можно сделать вывод о том, что спектральная теория нестационарных систем управления может быть использована для описания ОРП четвертого порядка. Простые примеры имеют аналитическое решение. Совпадение аналитического решения и решения спектральным методом подтверждает правильность разработанных алгоритмов.

Комбинируя матрицы СХ операторов дифференцирования, можно учесть различные граничные условия.

Передаточная функция ОРП зависит от вида граничных условий. Используя прямое произведение матриц (кронекерово произведение), удобно рассматривать трехмерные, двумерные, одномерные модели ОРП. Поскольку выполняются стандартные операции над матрицами спектральных характеристик (сложение, перемножение, обращение), метод удобен в программировании.

Предложенный алгоритм не зависит от систем базисных функций, что придает методу универсальность. Однако применение рассмотренного алгоритма ограничено объектами, заданными на параллелепипеде. Тем не менее, спектральный метод позволяет работать с объектами, имеющими более сложные границы [11]. Для этого необходимо преобразовать пространственные переменные так, чтобы прямоугольная область преобразовалась в прямоугольную. При этом исходное уравнение с новыми переменными получается более сложного вида. В дальнейшем планируется развивать спектральную теорию нестационарных систем управления для задачи моделирования стохастических и дискретных ОРП.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Солодовников В.В., Семенов В.В. Спектральная теория нестационарных систем управления. М.: Наука, 1974, 335с.
2. Краскевич В.Е., Клевцов Ю.А. Спектральный метод структурно-параметрической идентификации объектов с распределенными параметрами // Вестн. КПИ. Сер. Техническая кибернетика. Вып. 5. Киев: Вища школа, 1981, с. 10—12.
3. Краскевич В.Е., Клевцов Ю.А. Спектральное представление линейных объектов с распределенными параметрами // Кибернетика на морском транспорте, 1981, вып. 10, с. 87—94.

4. Клевцов Ю.А. Спектральное описание объектов с распределенными параметрами // Электрон. моделирование, 1988, **10**, № 3, с. 27—31.
5. Клевцов Ю.А. Алгоритм моделирования краевой задачи третьего рода // Там же, 2001, **23**, № 3, с. 40—46.
6. Клевцов Ю.А. Моделирование многомерных объектов с распределенными параметрами // Там же, 2012, **34**, №5, с. 20—40.
7. Ланкастер П. Теория матриц. М.: Наука, 1978, 280 с.
8. Фарлоу С. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров. М.: Мир, 1985, 384 с.
9. Клевцов Ю.А. Структурные преобразования моделей систем с распределенными параметрами // Электрон. моделирование, 2016, **38**, № 1, с. 35—46.
10. Бутковский А.Г. Характеристики систем с распределенными параметрами. М.: Наука, 1979, 224 с.
11. Клевцов Ю.А. Моделирование объекта с распределенными параметрами, заданного на непрямоугольной области // Электрон. моделирование, 2011, **33**, № 1, с. 47—55.

Поступила 27.04.17;
после доработки 02.07.17

REFERENCES

1. Solodovnikov, V.V. and Semenov, V.V. (1974), *Spektralnaya teoriya nestatsionarnykh sistem upravleniya* [Spectral theory of non-stationary control systems], Nauka, Moscow, USSR.
2. Kraskevich, V.Ye. and Klevtsov, Yu.A. (1981), “Spectral method of structural-parametric identification of objects with distributed parameters”, *Vestnik KPI, Ser. Tekhnicheskaya kibernetika*, Vol. 5, pp. 10-12.
3. Kraskevich, V.Ye. and Klevtsov, Yu.A. (1981), “Spectral representation of linear objects with distributed parameters”, *Kibernetika na morskoy transporty*, Vol. 10, pp. 87-94.
4. Klevtsov, Yu.A. (1988), “Spectral description of objects with distributed parameters”, *Elektronnoye modelirovaniye*, Vol. 10, no. 3, pp. 27-31.
5. Klevtsov, Yu.A. (2001), “Algorithm for modeling a boundary value problem of the third kind”, *Elektronnoye modelirovaniye*, Vol. 23, no. 3, pp. 40-46.
6. Klevtsov, Yu.A. (2012), “Modeling multidimensional objects with distributed parameters”, *Elektronnoye modelirovaniye*, Vol. 34, no. 5, pp. 20-40.
7. Lancaster, P. (1978), *Teoriya matrits* [Matrix theory], Nauka, Moscow, USSR.
8. Farlou, S. (1985), *Uravneniya s chastnymi proizvodnymi dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov* [Partial differential equations for scientists and engineers], Mir, Moscow, USSR.
9. Klevtsov, Yu.A. (2016), “Structural transformations of models of systems with distributed parameters”, *Elektronnoye modelirovaniye*, Vol. 38, no. 1, pp. 35-46.
10. Butkovskiy, A.G. (1979), *Kharakteristiki sistem s raspredelennymi parametrami* [Characteristics of distributed systems], Nauka, Moscow, USSR.
11. Klevtsov, Yu.A. (2011), “Modeling the object with distributed parameters defined on a nonrectangular domain”, *Elektronnoye modelirovaniye*, Vol. 33, no. 1, pp. 47-55.

Received 27.04.17;
after revision 02.07.17

Yu.A. Klevtsov

MODELING OF OBJECTS WITH DISTRIBUTED
PARAMETERS OF THE FOURTH ORDER

Based on the theory of finite integral transformations the author has considered a class of models — transfer functions of the objects, which description requires partial differential equations. The rules establishing the correspondence between operations in the space-time and spectral domain are presented. The examples of modeling the objects with distributed parameters are considered.

Key words: finite integral transformations, systems with distributed parameters, transfer function, mathematical modeling.

КЛЕВЦОВ Юрий Алексеевич, канд. техн. наук. В 1973 г. окончил Киевский политехнический ин-т. Область научных исследований — объекты с распределенными параметрами, спектральная теория нестационарных систем управления, задачи моделирования и идентификации.