

К теории бозе-эйнштейновской конденсации квазичастиц: о возможности конденсации ферромагнонов при высоких температурах

А.И. Бугрий, В.М. Локтев

*Институт теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова НАН Украины
ул. Метрологическая, 14-б, г. Киев, 03143, Украина*

E-mail: abugrij@bitp.kiev.ua
vloktev@bitp.kiev.ua

Статья поступила в редакцию 31 июля 2006 г.

Рассмотрена бозе-конденсация магнонов в тонких ферромагнитных пленках как физических системах конечного размера. Показано, что в соответствии с современными экспериментальными возможностями, позволяющими достигать в таких пленках плотностей длинноволновых спиновых возбуждений $\sim 10^{18}\text{--}10^{19}\text{ см}^{-3}$, формирование когерентного конденсата этих квазичастиц наступает уже при температурах $T \sim 10^2\text{ К}$ (включая комнатные). Установлено, что бозе-конденсация сопровождается явлением скейлинга, согласно которому основной термодинамической переменной оказывается не число частиц N , а отношение N/T . Последнее свидетельствует, что наблюдать бозе-конденсацию магнонов можно при относительно низких их плотностях (и, соответственно, накачках). Проанализированы роли формы спектра спин-волновых возбуждений и толщины пленки для наблюдения фазового перехода в состояние с бозе-конденсатом, а также парциальные вклады разных групп квазичастиц в полное спектральное распределение магнонов по энергиям.

Розглянуто бозе-конденсацію магнонів у тонких ферромагнітних плівках як фізичних системах скінченного розміру. Показано, що у відповідності з сучасними експериментальними можливостями, що дозволяють досягати у таких плівках густин довгохвильових спинових збуджень $\sim 10^{18}\text{--}10^{19}\text{ см}^{-3}$, формування когерентного конденсату цих квазічастинок настає вже при температурах $T \sim 10^2\text{ К}$ (включаючи кімнатні). Встановлено, що бозе-конденсація супроводжується явищем скейлінгу, згідно з яким основною термодинамічною змінною виявляється не число частинок N , а відношення N/T . Останнє свідчить, що спостерігати бозе-конденсацію магнонів можна при відносно низьких їх густинах (та, відповідно, накачках). Проаналізовано ролі форми спектра спин-хвильових збуджень і товщини плівки для спостереження фазового переходу у стан з бозе-конденсатом, а також парціальні внески від різних груп квазічастинок у повний спектральний розподіл магнонів за енергією.

PACS: 05.30.Jp, 75.30.Ds, **75.70.-i**

Ключевые слова: бозе-конденсация, магноны, спектральная плотность, фазовый переход.

1. Введение

Бозе-эйнштейновская конденсация (БЭК) атомов и молекул [1,2] стала одним из самых замечательных явлений, обнаруживших и подтвердивших квантовую природу ряда макроскопических процессов. Формирование бозе-конденсата, т.е. накопление тождественных частиц с целочисленным спином в одном из квантовых состояний, может быть прису-

ще как истинным частицам (атомам, молекулам), так и квазичастичным возбуждениям многочастичных систем. В этом смысле квазичастицы — экситоны и биэкситоны, а также магноны — особенно интересны, поскольку, существуя лишь как возбужденные состояния, фактически отсутствуют (если не учитывать теплового фона) в системах при нормальных температуре и давлении. Без специально подоб-

ранных условий понижение температуры уменьшает равновесную плотность тепловых квазичастиц. Поэтому изучение БЭК квазичастиц, или их «нетеплового» накопления в одном из состояний, требует, в первую очередь, наличия макроскопического (по сути неравновесного) полного числа квазичастиц. Этого можно добиться, лишь используя методы создания и поддержания в конденсированных системах большого числа квазичастиц хотя бы в течение времени, за которое могут осуществиться, во-первых, их относительно быстрая термализация, а во-вторых — последующая БЭК. Последняя в таких условиях будет происходить как (квази)равновесное явление при сохраняющемся (в среднем) числе квазичастиц, что обеспечивается каким-либо внешним источником их интенсивного рождения.

Явление БЭК ассоциируется, как правило, с очень низкими температурами: критическая температура T_{BEC} , при которой зарождается бозе-конденсат, зависит от плотности газа n и от массы m составляющих его частиц согласно известной формуле [3]

$$T_{BEC} = \frac{n^{2/3}}{m} \frac{2\pi\hbar^2}{k_B \zeta^{2/3}(3/2)}, \quad (1.1)$$

где $\zeta(x)$ — ζ -функция Римана. Так, в опытах по наблюдению БЭК [4,5] из-за большой массы атомов щелочных элементов и малой плотности (примерно 10^3 частиц в объеме $\sim 10^{-6}$ см³) систему необходимо «охлаждать» вплоть до 10^{-9} – 10^{-8} К. Или, например, в случае «наиболее идеального» из реальных газов — гелия — температура перехода в бозе-конденсированное состояние $T_{BEC} \approx 2 \cdot 10^{-2}$ К при плотности $\approx 10^{19}$ см⁻³, соответствующей газообразному состоянию. Поэтому очевидно, что наблюдать БЭК при высоких (вплоть до комнатных) температурах можно только в системах, состоящих из легких (слабовзаимодействующих) бозонов. Как это неоднократно отмечалось, на роль таких бозонов вполне подходят квазичастичные возбуждения, эффективная масса которых достаточно мала, в частности сравнима с электронной m_e .

Если говорить о БЭК квазичастиц, то наибольшее внимание уделялось, по-видимому, экситонам и биэкситонам. Начиная с пионерских работ Москаленко [6] и Келдыша [7], много работ посвящено исследованию фазовой диаграммы полупроводни-

ков при больших концентрациях неравновесных электронов и дырок, а также попыткам обнаружения различных типов их совместного конденсированного состояния. Несмотря на малое время жизни экситонных состояний и интенсивные процессы электрон-дырочной аннигиляции, имеется несколько убедительных экспериментальных свидетельств в пользу наблюдения экситонной (и биэкситонной) БЭК [8].

Но есть и другие системы, перспективные для изучения БЭК квазичастиц. В частности, к интересным объектам, пригодным для этого (см. [9]), относятся магнетики, среди них — ферромагнитные диэлектрики, где путем импульсной микроволновой накачки удается создавать высокие (до 10^{18} – 10^{19} см⁻³) концентрации магнонов. Напомним, что магноны — это элементарные возбуждения над полем намагниченности, в хорошем приближении подчиняющиеся бозе-статистике.* Их спектр формируется благодаря присутствию нескольких взаимодействий, главными из которых служат обменное и магнитное диполь-дипольное [10]. Первое из них определяет изотропный спектр спиновых волн с длинами k^{-1} , меньшими характерных размеров системы L , так что $kL \gg 1$. Второе же, наоборот, срабатывает на длинах волн, для которых $kL \leq 1$, и, кроме того, приводит к зависимости спектра магнонов от направления \mathbf{k} . Анализ условий БЭК именно этих элементарных возбуждений в сравнительно тонких пластинах (микропленках) является целью настоящей работы, в которой ставится задача рассмотреть условия наблюдения и особенности БЭК в ферромагнитных (ФМ) диэлектрических пленках с разным видом спектра спиновых волн. При этом мы считаем, что имеется по меньшей мере несколько причин, делающих магноны очень перспективными для изучения БЭК квазичастиц. Во-первых, относительно большое время их жизни и, как говорилось, возможность достигать плотностей $\sim 10^{19}$ см⁻³; во-вторых, наличие технологий выращивания очень тонких (толщиной менее 10 мкм) пленок с достаточно совершенной структурой и прецизионно измерять в них спектры магнонов оптическими методами и, в третьих, легко менять температуру и магнитное поле в широких пределах, позволяя детальное сравнение теории и эксперимента.

Отметим, что в последнее время появилось достаточное количество работ (к примеру, [11–16]), где

* Интересно заметить, что в работе [8] сделано утверждение, что все известные случаи БЭК связаны с концепцией составных бозонов, образованных четным числом фермионов. К таковым относятся как частицы — атомы гелия, атомы щелочных металлов, так и квазичастицы — куперовские пары, экситоны, биэкситоны. Это, безусловно, так, если речь идет о частицах, а также об экситонах Ванье—Мотта и биэкситонах. Труднее согласиться с подобным утверждением для экситонов малого радиуса, или экситонов Френкеля. И, по-видимому, оно ни в какой мере не включает такие квазичастицы, как магноны, особенно в диэлектриках, описываемых моделью Гейзенберга.

идеи о БЭК магновов используются для описания фазовых переходов в (преимущественно) АФМ из их немагнитного (синглетного) состояния в магнитоупорядоченное под действием внешнего магнитного поля. Дело в том, что вынужденное появление в конечных полях намагниченности действительно может быть формально описано и интерпретировано на языке конденсации магнитных возбуждений. Но как таковая БЭК не происходит, поскольку речь в данном случае идет лишь о перестройке основного состояния системы и, следовательно, о виртуальных, а не реальных магнонах (см., например, [17]). Мы же концентрируем внимание на реальных — возбужденных — состояниях, появляющихся вследствие накачки в систему электромагнитной энергии, которая идет на рождение квазичастиц над основным состоянием, как это мастерски осуществлено в недавней экспериментальной работе с использованием микропленок железо-иттриевого граната (ЖИГ) [18].

2. Модель и общие соотношения

Предположим, что ФМ кристалл имеет форму параллелепипеда (см. рис. 1) объемом $V = L_x L_y L_z$. Количество узлов N_j вдоль соответствующих осей (j пробегает значения x, y, z) определяется параметрами решетки a_j : $N_j = L_j/a_j + 1$. Как известно, основное магнитное состояние такого кристалла предполагает одинаковое направление всех спинов (например, вдоль оси квантования z), а нижайшее возбужденное соответствует одному «перевернутому» спину [19,20]. Из линейной комбинации таких состояний можно построить собственное состояние в виде спиновой волны с амплитудой $b_{\mathbf{q}}(\mathbf{r})$. Вид этих амплитуд зависит от граничных условий. Обычно для упрощения используют *циклические* граничные условия, когда амплитуды на противоположных гранях кристалла одинаковы. Тогда амплитуды имеют вид плоской волны

$$b_{\mathbf{q}}(\mathbf{r}) = \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r}) \prod_j N_j^{-1/2}, \quad (2.1)$$

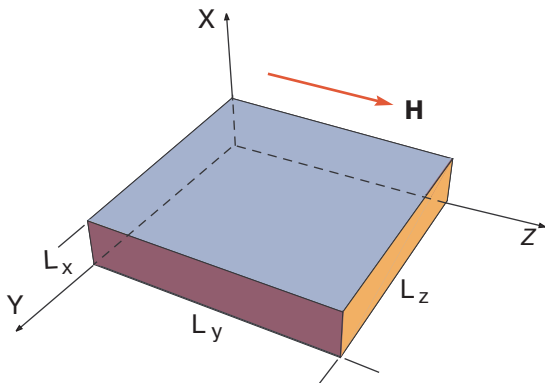


Рис. 1. Форма ФМ кристалла.

где в данном случае вектор \mathbf{r} нумерует узлы решетки ($r_j = 1, 2, \dots, N_j$), а безразмерный квазиимпульс \mathbf{q} определен в зоне Бриллюэна ($-\pi < q_j \leq \pi$) и пробегает дискретный спектр значений с шагом $\Delta q_j^{\text{per}} = 2\pi/N_j$.

Если же спины на гранях «свободны», то решение краевой задачи с соответствующими (*свободными*) граничными условиями приводит в отличие от (2.1) к амплитудам

$$b_{\mathbf{q}}(\mathbf{r}) = \prod_j \sin(q_j r_j) [2/(N_j + 1)]^{1/2}. \quad (2.2)$$

Зона Бриллюэна здесь определена несколько иначе — $0 < q_j < \pi$, а шаг дискретности $\Delta q_j^{\text{free}} = \pi/(N_j + 1)$. Укажем на главные различия в спектрах квазиимпульса в (2.1) и (2.2). Во-первых, для периодических граничных условий существует нулевая мода $\mathbf{q} = 0$, а для свободных ее нет: минимальное значение, которое может принимать каждая из компонент квазиимпульса, $q_j^{\text{min}} = \Delta q_j^{\text{free}}$. Во-вторых, спектр квазиимпульса для свободных граничных условий вдвое плотнее, чем для периодических, так как при $N_j \gg 1$ отношение $\Delta q_j^{\text{per}} / \Delta q_j^{\text{free}} = 2N_j / (N_j + 1) \approx 2$.

Считается почти очевидным, что конкретный вид граничных условий не влияет на поведение физических величин. Это и в самом деле так, если речь идет об очень «больших» системах. Однако, как будет показано далее, для «малых» систем отмеченное выше различие — отсутствие нулевой моды в спектре для случая свободных граничных условий — приводит к появлению в некоторых наблюдаемых характеристиках вполне ощутимых вкладов (вейлевские поправки), отсутствующих в случае идеализированных периодических граничных условий. Поскольку мы намерены изучить вопрос о БЭК в микропленках толщиной ~ 1 мкм, представляется обоснованным использовать свободные граничные условия как более реалистичные.

Несмотря на указанные отличия, выражение для энергии магновов, определяемой изотропным обменным взаимодействием, одинаково для обоих вариантов граничных условий и может быть записано в безразмерном виде:

$$\epsilon(\mathbf{q}) = 2 \sum_j \sin^2 \frac{q_j}{2}. \quad (2.3)$$

При этом вдали от границ зоны Бриллюэна, или в длинноволновой области ($q_j \ll \pi$), из (2.3) следует, что

$$\epsilon(\mathbf{q}) = \frac{\mathbf{q}^2}{2}. \quad (2.4)$$

Размерные величины легко восстанавливаются через размеры кристалла L_j , параметры решетки a_j и эффективную массу m_m , которая для магновов обратно пропорциональна обменному интегралу. Тогда компоненты квазиимпульса для случая свободных границ

$$p_j = \hbar \frac{q_j}{a_j} \approx \hbar \pi \frac{k_j}{L_j}, \quad k_j = 1, 2, \dots, N_j,$$

а закон дисперсии

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m_m} = \sum_j \varepsilon_j k_j^2 \equiv \varepsilon_{\mathbf{k}}, \quad \varepsilon_j = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m_m L_j^2}, \quad (2.5)$$

отвечает простейшему для магновов в ФМ. Учитывая также, что длинноволновые магноны слабо, $\sim (\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2)^2$, взаимодействуют как между собой, так (с практически такой же амплитудой) и с фононами [20], приходим к задаче о БЭК идеального* бозе-газа, для которого статсумма Z_m в большом каноническом ансамбле при температуре T и химпотенциале μ_m имеет вид

$$\ln Z_m = - \sum_{\mathbf{k}} \ln \{1 - \exp [-(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu_m)/T]\}, \quad (2.6)$$

где $\varepsilon_{\mathbf{k}}$ — энергия состояния с квантовыми числами $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$, определенная в (2.5). В (2.6) и далее мы используем систему единиц $k_B = \hbar = 1$, восстанавливая зависимость от фундаментальных констант по мере необходимости; кроме того, индекс m , подразумевающий, что рассматриваемые частицы суть магноны, для краткости также будем опускать. Тогда для среднего числа частиц в квантовом состоянии \mathbf{k} (числа заполнения) имеем

$$n_{\mathbf{k}} = \{\exp [(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu)/T] - 1\}^{-1}, \quad (2.7)$$

а для полного (среднего) числа частиц в системе

$$N = T \frac{\partial \ln Z}{\partial \mu} = \sum_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}}. \quad (2.8)$$

Из области определения термодинамических величин (2.6)–(2.8) следует, что область изменения химического потенциала для бозе-систем ограничена минимальным значением энергии в рассматриваемом законе дисперсии. В случае закона дисперсии (2.5) энергия достигает минимального значения ε_0 в квантовом состоянии с $\mathbf{k} = (1, 1, 1)$:

$$\varepsilon_0 = \frac{\pi^2}{2m} \sum_j L_j^{-2}, \quad \mu < \varepsilon_0.$$

Отметим, кстати, что распространенное утверждение о равенстве нулю химпотенциала как следствии свободного рождения и уничтожения (квази)частиц не вполне корректно. Истоки этого заблуждения, по-видимому, связаны с тем, что свободная энергия $F(N, T)$ в каноническом ансамбле как функция числа частиц достигает минимума (при фиксированном объеме и температуре) при $\mu = 0$. По существу, это банальное следствие одного из определений химического потенциала $\mu = \partial F / \partial N$ как термодинамической функции. Но почему условие минимума свободной энергии эквивалентно условию свободного рождения и уничтожения частиц? Казалось бы, логично исходить из требования максимума энтропии как функции N . Между тем путем элементарных вычислений (по крайней мере, в случае идеального газа) нетрудно убедиться, что энтропия является монотонно растущей функцией числа частиц и достигает максимального значения при $N \rightarrow \infty$. Аналогично в большом каноническом ансамбле энтропия является монотонно растущей функцией химпотенциала и достигает максимума при максимально допустимом его значении, т.е. когда $\mu \rightarrow \varepsilon_0$. При этом и среднее число частиц N , и сама энтропия стремятся к бесконечности в *конечном объеме*. Химический потенциал μ как независимая термодинамическая переменная — удобный параметр для теоретиков, но является абсолютно формальной величиной с точки зрения экспериментаторов, так как нет рецептов для его прямых измерений. О химпотенциале экспериментаторы могут судить лишь косвенно — по измерению, например, среднего числа частиц или других наблюдаемых. Затем величина μ восстанавливается исходя из неких теоретических предписаний: как правило, из формул статистической механики идеального газа. Но в случае идеального газа можно и вовсе исключить химпотенциал из термодинамических формул, заменив эту независимую термодинамическую переменную на какую-либо другую, имеющую более непосредственное физическое содержание. Если вести речь о БЭК, то вполне подходящий кандидат на эту роль — число частиц n_0 на нижайшем уровне [21]. В самом деле, из равенства (2.7) прямо следует

$$e^{(\varepsilon_0 - \mu)/T} = 1 + 1/n_0. \quad (2.9)$$

Тогда, подставляя (2.9) в (2.6)–(2.8), получим

* Идеальность определяется концентрацией бозе-возбуждений, которая даже для числа квазичастиц $\sim 10^{20} \text{ см}^{-3}$ оказывается чрезвычайно малой: $\sim 10^{-3}$ на атом.

$$\ln Z = \ln(n_0 + 1) - \sum'_{\mathbf{k}} \ln \left[1 - e^{-(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_0)/T} \frac{n_0}{n_0 + 1} \right], \quad (2.10)$$

$$n_{\mathbf{k}} = [(1 + n_0^{-1})e^{(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_0)/T} - 1]^{-1}, \quad (2.11)$$

$$N = n_0 + \sum'_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}}, \quad (2.12)$$

где штрих у знака суммы означает, что исключено слагаемое, соответствующее нижайшему магнотному состоянию с квантовыми числами $\mathbf{k} = (1, 1, 1)$.

Такая параметризация удобна по двум причинам. Прежде всего, она дает формальное определение конденсату в конечной системе просто как совокупности частиц на квантовом уровне с наименьшей энергией: их количество $N_{BEC} = n_0$. Кроме того, позволяет корректно осуществить переход к термодинамическому пределу в выражениях, полученных для систем конечных размеров. И коль скоро мы имеем дело с микропленками, рассмотрим этот вопрос немного подробнее.

Понятно, что в суммах по квантовым состояниям в (2.6), (2.8) и (2.11), (2.13) зависимость от размеров системы входит неявно — через спектр оператора Шредингера, обусловленный граничными условиями. Чтобы выделить эту зависимость, прибегают к стандартному приему — переходу от суммирования по квантовым состояниям к интегрированию по фазовому объему:

$$\sum_{\mathbf{k}} f(p_{\mathbf{k}}) \rightarrow \int d\Phi f(p), \quad (2.13)$$

причем в качестве элемента фазового объема обычно используется

$$d\Phi = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} d^3p = \frac{V}{2\pi^2\hbar^3} p^2 dp \equiv d\Phi_V. \quad (2.14)$$

Не стоит забывать, однако, что выражение (2.15) — только первый член в асимптотическом разложении при $p \rightarrow \infty$. Согласно знаменитой задаче Вейля [22] о количестве собственных значений оператора, не превышающих заданное, коэффициенты соответствующего асимптотического ряда выражаются через геометрические инварианты. В частном случае оператора Шредингера учет следующего члена приводит к такому выражению для фазового объема:

$$d\Phi = d\Phi_V - d\Phi_{S_V}, \quad d\Phi_{S_V} = \frac{S_V}{8\pi\hbar^2} p dp, \quad (2.15)$$

где S_V — площадь поверхности образца, имеющего объем V . При этом выше упоминалось, что вклад $d\Phi_{S_V}$ как раз и обусловлен отсутствием нулевой

моды в ограниченных системах. Нетрудно видеть, что интегрирование по элементам фазового объема (2.14) и (2.15) порождает квазиклассическое разложение для соответствующих термодинамических величин. Преобразование (2.13) подразумевает также, что функция $f(p)$ под знаком суммы достаточно гладкая. В противном случае, некоторые слагаемые (скажем, первое) могут резко отличаться по величине от других. Тогда их нужно отделить, а преобразование (2.13) применять для оставшейся суммы. В Приложении А приведен простой пример, иллюстрирующий различие между суммой и интегралом в подобной ситуации. Статистическая сумма в режиме БЭК, т.е. при $\mu \rightarrow \varepsilon_0$, как раз такой случай, на что указано, например, в [3]. Замена (2.9) химического потенциала в качестве независимой термодинамической переменной на n_0 , как видим, решает заодно и проблему выделения сингулярных вкладов (ср. (2.6), (2.8) и (2.10), (2.12)).

Поправки к термодинамическим величинам, обусловленные $d\Phi_{S_V}$, далее будем называть *поверхностными* вкладами, а вклады, обусловленные $d\Phi_V$, — *объемными*. Отметим, что их отношение не универсально в том смысле, что для разных термодинамических функций оно, при прочих равных условиях, может быть больше или меньше. Иными словами, при увеличении объема системы для одних физических величин термодинамический предел наступает раньше, для других — позже. Изучение достаточно тонких пленок — это, очевидно, шаг в направлении физики мезоскопических систем или, как стало принято говорить, нанофизики. Количественной оценкой границы между «макроскопикой» и «мезоскопикой» может служить сопоставление между собой соответствующих той или иной величине объемных и поверхностных вкладов. Когда они сравнимы, формулы обычной макроскопической термодинамики перестают работать. В частности, энергия, свободная энергия, энтропия и даже среднее число частиц утрачивают свойства экстенсивности, а, например, такая интенсивная величина, как давление, теряет свойство изотропности.

Приступая к конкретным расчетам, заметим, что в результате усреднения по фазовому объему (2.15) возникают интегралы вида

$$\int_0^{\infty} \frac{dy y^{\alpha-1}}{e^{y+x} - 1} = \Gamma(\alpha) P_{\alpha}(e^{-x}), \quad (2.16)$$

где $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция, а $P_{\alpha}(z)$ — полилогарифм, специальная функция с достаточно простыми свойствами. В области $\text{Re } x > 0$ она разлагается в ряд

$$P_\alpha(e^{-x}) = \sum_{l=1}^{\infty} l^{-\alpha} e^{-lx}, \quad (2.17)$$

откуда следует

$$\frac{d}{dx} P_\alpha(e^{-x}) = -P_\alpha(e^{-x}). \quad (2.18)$$

При $x = 0$ имеется точка ветвления $P_\alpha(e^{-x}) \sim x^{\alpha-1}$ для нецелых α и $P_\alpha(e^{-x}) \sim x^{\alpha-1} \ln x$ для целых, которая явно выделяется. Например, функция $P_{5/2}(e^{-x})$ имеет представление

$$P_{5/2}(e^{-x}) = \frac{4}{3} \sqrt{\pi} x^{3/2} + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\zeta(5/2-l)}{l!} (-x)^l, \quad (2.19)$$

причем радиус сходимости ряда в правой части (2.19) — $|x| < 2\pi$; как упоминалось выше, $\zeta(l)$ — ζ -функция Римана.

Вычислим, например, среднее число частиц (2.13):

$$\begin{aligned} N &= n_0 + N_{\text{ex}}, \\ N_{\text{ex}} &= \sum_{\mathbf{k}}' n_{\mathbf{k}} = N_V - N_{S_V}, \\ N_V &= \frac{V}{\lambda_T^3} P_{3/2}\left(\frac{n_0}{n_0+1}\right), \\ N_{S_V} &= \frac{S_V}{4\lambda_T^2} P_1\left(\frac{n_0}{n_0+1}\right) = \frac{S_V}{4\lambda_T^2} \ln(n_0+1), \end{aligned} \quad (2.20)$$

где

$$\lambda_T = \hbar \sqrt{\frac{2\pi}{mk_B T}} \quad (2.21)$$

— так называемая длина тепловой волны де Бройля. Из (2.20) следует, например, что при температуре 1 К, массе квазичастицы m_e и количестве частиц в конденсате $n_0 \sim 10^{16}$ вклады N_V и N_{S_V} становятся равными, когда толщина пленки уменьшается до $L_x \sim 1$ мкм, что в соответствии со сказанным выше прямо указывает на мезоскопичность такой системы.

Задача о БЭК идеального газа — одна из немногих, имеющих точное решение при большом (но конечном) числе частиц. Решение позволяет проследить формирование неаналитичности той или иной физической величины как функции температуры при переходе к термодинамическому пределу и найти количественную оценку этого предельного перехода. Поэтому, чтобы закончить с общей картиной, рассмотрим вопрос о БЭК как о явлении фазового превращения. Параметром порядка здесь является плотность конденсата $\mathbf{n}_{BEC} = n_0/V$: $\mathbf{n}_{BEC} = 0$ при $T > T_{BEC}$, $\mathbf{n}_{BEC} \sim 1 - T/T_{BEC}$ при $T \lesssim T_{BEC}$. Род фазового перехода определяется в соответствующей

классификации тем, что производная от теплоемкости меняется скачком при переходе температуры через T_{BEC} .

Запишем выражения для числа частиц и энергии в пренебрежении поверхностными вкладами:

$$N = n_0 + \sum_{\mathbf{k}}' n_{\mathbf{k}} = n_0 + \frac{V}{\lambda_T^3} P_{3/2}\left(\frac{n_0}{n_0+1}\right), \quad (2.22)$$

$$E = n_0 \varepsilon_0 + \sum_{\mathbf{k}}' n_{\mathbf{k}} \varepsilon_{\mathbf{k}} = n_0 \varepsilon_0 + \frac{3TV}{2\lambda_T^3} P_{5/2}\left(\frac{n_0}{n_0+1}\right). \quad (2.23)$$

Из определения (1.1) температуры T_{BEC} следует

$$\frac{V}{\lambda_T^3} = \frac{N}{\zeta(3/2)}. \quad (2.24)$$

Вводя нормированную температуру $t = T/T_{BEC}$ и учитывая (2.24), перепишем (2.22) и (2.23) в следующем виде:

$$N = n_0 + \frac{Nt^{3/2}}{\zeta(3/2)} P_{3/2}\left(\frac{n_0}{n_0+1}\right), \quad (2.25)$$

$$\frac{E}{T_{BEC}} = \frac{n_0 \varepsilon_0}{T_{BEC}} + \frac{3}{2} \frac{Nt^{5/2}}{\zeta(3/2)} P_{5/2}\left(\frac{n_0}{n_0+1}\right). \quad (2.26)$$

Из (2.25) видно, что при температурах в окрестности T_{BEC} ($t \approx 1$) и условии $N \gg 1$ число частиц в БЭК тоже велико: $n_0 \sim N^{2/3}$ как выше, так и ниже T_{BEC} ; в частности, при $t = 1$

$$n_0^{3/2} = \frac{2\sqrt{\pi}N}{\zeta(3/2)} [1 - O(N^{-3/2})]. \quad (2.27)$$

Для удельной теплоемкости c и ее производной при фиксированном объеме V из (2.25), (2.26) находим

$$c = \frac{1}{NT_{BEC}} \left(\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{1}{u} \frac{\partial E}{\partial n_0} \right), \quad \frac{dc}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{u} \frac{\partial c}{\partial n_0}, \quad (2.28)$$

где

$$u \equiv \frac{dt}{dn_0} = \frac{1}{N - n_0} + \frac{1}{n_0(n_0+1)} \frac{P_{1/2}[n_0/(n_0+1)]}{P_{3/2}[n_0/(n_0+1)]}. \quad (2.29)$$

При $N \gg n_0 \gg 1$

$$u = \frac{1}{N} + \frac{\sqrt{\pi}}{\zeta(3/2)} n_0^{-3/2} + O(N^{-4/3}). \quad (2.30)$$

Последнее выражение показывает, что скейлинговыми* в данной задаче являются переменные

$$\tau = N(t - 1), \quad y = \frac{\zeta(3/2) n_0^{3/2}}{\sqrt{\pi} N}. \quad (2.31)$$

Асимптотические разложения для (2.25), (2.28) и (2.29) приобретают следующий вид:

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{2}{3} \frac{1-y}{y^{1/3}} + O(N^{-1/3}), \\ c &= c_{\max} \left[\frac{\alpha}{(yN)^{1/3}} \left(y + \frac{2\gamma}{1+y} - 1 \right) \right] + O(N^{-2/3}), \\ c' &\equiv \frac{dc}{dt} = \frac{3}{2} c_{\max} \left[\gamma \frac{1+4y}{(1+y)^3} \right] + O(N^{-1/3}), \end{aligned} \quad (2.32)$$

где

$$c_{\max} \equiv \frac{15}{4} \frac{\zeta(5/2)}{\zeta(3/2)}, \quad \alpha = \frac{\sqrt{\pi}}{\zeta(3/2)}, \quad \gamma = \frac{3}{10\pi} \frac{\zeta^3(3/2)}{\zeta(5/2)}.$$

Из (2.32) видно, что малым параметром в этих выражениях является величина $N^{-1/3}$. Следовательно, средние от физических величин стремятся к термодинамическому пределу довольно медленно — по закону $O(V^{-1/3})$, а не $O(V^{-1})$, как обычно считается. Еще медленнее с ростом N наступает скейлинговый режим, что иллюстрирует рис. 2.

При сколь угодно малых, но фиксированных отклонениях температуры от T_{BEC} ($t = 1 + \delta t$) зависимость переменной y (2.31) от N существенно различна при разных знаках отклонения δt :

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{N} \frac{1}{\delta t^3} \ll 1, \quad \delta t > 0, \\ y &= -N^{1/3} \delta t \gg 1, \quad \delta t < 0. \end{aligned}$$

Соответственно для скачка производной теплоемкости $\Delta c' = c'(1 - \delta t) - c'(1 + \delta t)$ при $N \rightarrow \infty$, $\delta t \rightarrow 0$ из (2.32) получаем

$$\Delta c' = \frac{3}{2} c_{\max} \gamma = \frac{9}{16\pi} \zeta^2(3/2),$$

что совпадает с известным выражением, приведенным в [3]. Возвращаясь к обычной, не нормированной температуре, можно убедиться, что функция c'

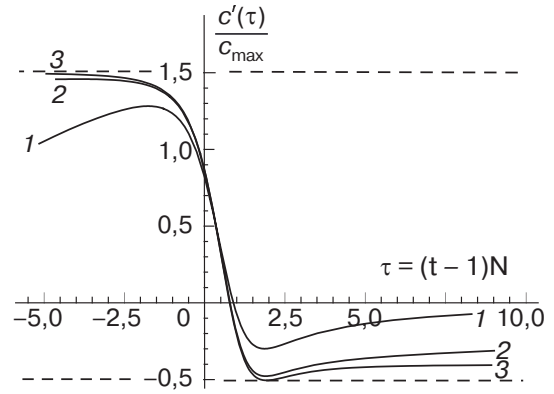


Fig. 2. Производная от теплоемкости как функция (масштабированной) температуры при различных количествах частиц в системе: $N = 10^3$ (1), $N = 10^6$ (2), $N \rightarrow \infty$ (3).

при $N \rightarrow \infty$ превращается в θ -функцию с «зубчиком», обусловленным минимумом на кривой (рис. 2).

Основываясь на приведенных вычислениях, подчеркнем, что для БЭК как явления фазового превращения необходимы не только и не столько низкие температуры при заданной плотности бозе-газа, сколько большое полное количество (квази)частиц в системе**. Поэтому для экспериментального изучения БЭК предпочтительнее увеличивать плотность возбуждений при заданном значении T , как это и делалось в работе [18].

3. Бозе-конденсация в тонких пленках с изотропным спектром спиновых волн

В работе [18] изучались магноны в ФМ микропленках размерами

$$L_x \simeq 10 \text{ мкм}, \quad L_y = L_z \simeq 1 \text{ см} \quad (3.1)$$

в магнитном поле, направленном вдоль поверхности образца $\mathbf{H} \parallel \mathbf{z}$ (см. рис. 1). Спектр длинноволновых спиновых возбуждений в реальных ФМ довольно сложный. Соответствующий закон дисперсии $\epsilon(\mathbf{p})$ заметно отличается от (2.5), которым описываются свободные массивные частицы. Дополнительные вклады в $\epsilon(\mathbf{p})$ генерируются внешним магнитным полем и магнитодипольной составляющей во взаи-

* Под скейлинговым поведением подразумевается, что некоторая функция (например, от двух переменных) $f(x, s)$ начиная с некоторых масштабов $s > s_0$ вырождается в функцию только одной — «скейлинговой» — переменной y : $f(x_1, s_1) = f(x_2, s_2) = f(y)$, где $y = y(x, s)$. В рассматриваемой задаче масштаб — это размеры системы $s \sim L \sim N^{1/3}$.

** В этой связи заметим, что атомарный бозе-конденсат с общим числом частиц $\sim 10^3$ [4,5], качественно соответствующая явлению БЭК, все же имеет мало общего с исходными и общепринятыми представлениями об этом феномене.

модействии между спинами. В следующем разделе мы проанализируем более детально влияние этих вкладов на процесс БЭК. Однако в простейшем приближении можно ограничиться только тем, что в законе дисперсии появляется магнитополевая щель, так что

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \varepsilon_{\mathbf{H}}, \quad (3.2)$$

где $\varepsilon_{\mathbf{H}} = 2\pi\hbar\nu_{\mathbf{H}}$ — ее энергия, причем частота практически совпадает с частотой ферромагнитного резонанса (ФМР). Наличие щели в законе дисперсии не повлияет на термодинамику системы, поскольку это всего лишь сдвиг энергетической (частотной) шкалы. Как нетрудно видеть из определения n_0 (2.9), замена $\varepsilon \rightarrow \varepsilon + \varepsilon_{\mathbf{H}}$ и $\mu \rightarrow \mu + \varepsilon_{\mathbf{H}}$ оставляет неизменным количество частиц n_0 на нижайшем уровне, фактически отвечающем ФМР. А так как именно n_0 , а не химпотенциал, мы используем в качестве независимой переменной, то остаются в силе все термодинамические выражения предыдущего раздела. При этом величину $\varepsilon_{\mathbf{H}}$ удобно использовать в качестве шкалы для параметров с размерностью энергии, хотя бы потому, что диагностика спектральной плотности магнонов в ЖИГ проводилась в [18] на частотах $\nu_{\mathbf{H}} \simeq 2$ ГГц в окрестности ФМР. Тогда, например, для температуры имеем: $T = t\varepsilon_{\mathbf{H}}$, откуда следует, что в шкале величин, отвечающих характерным для работы [18], температуре 1 К соответствует значение $t \simeq 10$. Закон дисперсии (3.2) в безразмерных величинах приобретает вид

$$\varepsilon(\mathbf{p}) \equiv \varepsilon_{\mathbf{k}} = \varepsilon_{\mathbf{H}}(1 + \omega_{\mathbf{k}}), \quad \omega_{\mathbf{k}} = \sum_j \omega_j k_j^2, \quad (3.3)$$

где $\omega_j = \varepsilon_j / \varepsilon_{\mathbf{H}}$, ε_j определены в (2.5). В случае размеров пленки (3.1) и массы магнонов $m_m \simeq 5m_e$, которая соответствует ЖИГ [10], численные значения параметров ω_j таковы:

$$\omega_x \simeq 10^{-4}, \quad \omega_y = \omega_z \simeq 10^{-10}. \quad (3.4)$$

В экспериментах [18] проводились прямые измерения спектральной плотности магнонов

$$n(\omega) = \sum_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}} \delta(\omega - \omega_{\mathbf{k}}) = \frac{g(\omega)}{e^{(\omega - \omega_0)/t} (1 + n_0^{-1}) - 1} \quad (3.5)$$

с высоким разрешением в длинноволновой части спектра, наиболее важной и информативной в контексте БЭК. Энергия магнонов определялась по частоте $\nu = \nu_{\mathbf{H}}(1 + \omega)$, а их количество — по интенсивности излучения в процессах неупругого комби-

национного рассеяния световой волны на установившемся в пленке распределении магнонов.

В правой части (3.5) введена спектральная плотность состояний

$$g(\omega) = \sum_{\mathbf{k}} \delta(\omega - \omega_{\mathbf{k}}). \quad (3.6)$$

Из-за большого различия в продольных и поперечных размерах пленки отношение соответствующих параметров ω_j тоже велико: $\omega_x / \omega_y = \omega_x / \omega_z \sim 10^6$. Это приводит к тому, что спектр состояний расщепляется на слои вокруг гармоник, соответствующих первой компоненте квазиимпульса. Такая специфическая структура спектра позволяет разбить $g(\omega)$, а следовательно, и $n(\omega)$ на три характерных слагаемых с различным сингулярным поведением в низкочастотной (вблизи $\nu_{\mathbf{H}}$) области:

$$g(\omega) = g_C(\omega) + g_1(\omega) + g_{\infty}(\omega), \quad (3.7)$$

где

$$g_C(\omega) = \delta(\omega - \omega_0) \quad (3.8)$$

— слагаемое, отвечающее вкладу в (3.6) нижайшего магнонного состояния;

$$g_1(\omega) = \sum_{\mathbf{k}_{\perp}}' \delta(\omega - \omega_x - \omega_y \mathbf{k}_{\perp}^2), \quad \mathbf{k}_{\perp}^2 = k_y^2 + k_z^2 \quad (3.9)$$

— вклад первого возбужденного слоя (основная гармоника первой компоненты квазиимпульса) и, наконец,

$$g_{\infty}(\omega) = \sum_{k_x=2}^{\infty} \sum_{\mathbf{k}_{\perp}} \delta(\omega - \omega_x k_x^2 - \omega_y \mathbf{k}_{\perp}^2) \quad (3.10)$$

— вклад всех прочих состояний. Штрих у знака суммы (3.9) означает, что исключен член с $\mathbf{k}_{\perp}^2 = 2$, явно учтенный в (3.8). Переходя в (3.9) и (3.10) от сумм к интегралам, получим

$$\begin{aligned} g_1(\omega) &\simeq \frac{\pi}{2} \int_{\sqrt{\kappa+2}}^{\infty} dk k \delta(\omega - \omega_x - \omega_y k^2) = \\ &= \frac{\pi}{4\omega_y} \theta(\omega - \omega_x - \kappa\omega_y), \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} g_{\infty}(\omega) &\simeq \frac{\pi}{2} \sum_{k_x=2}^{\infty} \int_0^{\infty} dk k \delta(\omega - \omega_x k_x^2 - \omega_y k^2) = \\ &= \frac{\pi}{4\omega_y} \sum_{k_x=2}^{\infty} \theta(\omega - \omega_x k_x^2) = \\ &= \frac{\pi}{4\omega_y} \left(\sqrt{\frac{\omega}{\omega_x}} - \left\{ \sqrt{\frac{\omega}{\omega_x}} \right\} - 1 \right) \theta(\omega - 4\omega_x), \end{aligned} \quad (3.12)$$

где $0 < \kappa < 3$, а фигурные скобки в правой части (3.12) обозначают дробную часть заключенной в них величины ($\{s\}$ – дробная часть вещественной переменной s). Поскольку $0 < \{s\} < 1$, можно положить среднее значение $\{s\} \simeq 1/2$, что для (3.12) дает

$$g_\infty(\omega) = \frac{\pi}{4\omega_y \sqrt{\omega_x}} \left(\sqrt{\omega} - \frac{3}{2} \sqrt{\omega_x} \right) \theta(\omega - 4\omega_x). \quad (3.13)$$

Парциальный вклад $g_1(\omega)$ (3.11) пропорционален площади поверхности образца, а в $g_\infty(\omega)$ (3.13) первое слагаемое пропорционально объему, второе – площади. Собирая вместе соответствующие члены, представим $g(\omega)$ следующим образом:

$$g(\omega) = g_C(\omega) + g_{S_V}(\omega) + g_V(\omega), \quad (3.14)$$

где

$$g_C(\omega) = \delta(\omega - \omega_0), \quad (3.15)$$

$$g_{S_V}(\omega) = \frac{\pi}{4\omega_y} [\theta(\omega - \omega_0 - \kappa\omega_y) - \frac{3}{2} \theta(\omega - 4\omega_x)], \quad (3.16)$$

$$g_V(\omega) = \frac{\pi \sqrt{\omega}}{4\omega_y \sqrt{\omega_x}} \theta(\omega - 4\omega_x). \quad (3.17)$$

Нетрудно проверить, что при больших ω элемент фазового объема

$$d\Phi = [g_V(\omega) + g_{S_V}(\omega)] d\omega$$

совпадает с асимптотической оценкой (2.14). Однако в интересующей нас области малых (пороговых) энергий принципиальным становится вопрос о нижних пределах интегрирования по фазовому объему, ответ на который содержится в выражениях (3.15)–(3.17).

В итоге, подставляя полученные формулы для $g(\omega)$ в (3.5), имеем

$$n(\omega) = n_C(\omega) + n_{S_V}(\omega) + n_V(\omega), \quad (3.18)$$

где в соответствии с разбиением (3.14) функции

$$n_C(\omega) = n_0 \delta(\omega - \omega_0), \quad (3.19)$$

$$n_{S_V}(\omega) = \frac{\pi}{4\omega_y} \frac{\theta(\omega - \omega_0 - \kappa\omega_y) - (3/2)\theta(\omega - 4\omega_x)}{(1 + n_0^{-1}) \exp(\frac{\omega - \omega_0}{t}) - 1}, \quad (3.20)$$

$$n_V(\omega) = \frac{\pi}{4\omega_y \sqrt{\omega_x}} \frac{\sqrt{\omega} \theta(\omega - 4\omega_x)}{(1 + n_0^{-1}) \exp(\frac{\omega - \omega_0}{t}) - 1} \quad (3.21)$$

задают парциальные частотные распределения, соответствующие конденсатному, поверхностному и объемному вкладам. В ограниченном диапазоне частот ω , не превышающих некоторого значения ω_{\max} , выражения (3.20) и (3.21) упрощаются, если $n_0 \gg 1$ и $t \gg \omega_{\max}$:

$$n_{S_V}(\omega) = \frac{\pi t}{4\omega_y} \frac{\theta(\omega - \omega_0 - \kappa\omega_y) - (3/2)\theta(\omega - 4\omega_x)}{\omega - \omega_0 + t/n_0}, \quad (3.22)$$

$$n_V(\omega) = \frac{\pi t}{4\omega_y \sqrt{\omega_x}} \frac{\sqrt{\omega} \theta(\omega - 4\omega_x)}{\omega - \omega_0 + t/n_0}. \quad (3.23)$$

Из этих выражений видно, что за счет малого параметра $\sqrt{\omega_x}$ в знаменателе (3.23) вклад (3.22) поверхностного слагаемого в общем случае пренебрежимо мал: $n_V(\omega) \gg n_{S_V}(\omega)$. Но на порогах ($\omega = \omega_0 + \kappa\omega_y$ и $\omega = 4\omega_x$ для (3.22) и (3.23) соответственно) ситуация противоположная – $n_{S_V} \gg n_V$.

В реальных опытах результаты измерений зависят от разрешающей способности прибора и обычно наблюдают не $n(\omega)$, а усредненную по некоторому интервалу частот $\delta\omega \simeq Q^{-1}$ спектральную плотность:

$$n^{\text{obs}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' n(\omega') F(\omega - \omega'), \quad \int_{-\infty}^{\infty} d\omega F(\omega) = 1, \quad (3.24)$$

где $F(\omega)$ – амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) приемника. Вследствие того, что величина $n_C(\omega)$ (3.19) пропорциональна δ -функции, наблюдаемый конденсатный вклад

$$n_C^{\text{obs}}(\omega) = n_0 F(\omega - \omega_0) \quad (3.25)$$

фактически воспроизводит АЧХ. Выражения (3.24) и (3.25) показывают, что в формировании резонансного пика как сигнала о БЭК принимает участие не одно состояние, но и другие, энергия которых близка к щели $\epsilon_{\mathbf{H}}$. Поэтому и на некотором удалении от «конденсатной» частоты ω_0 , а не только на порогах, парциальные вклады $n_{S_V}^{\text{obs}}(\omega)$ и $n_V^{\text{obs}}(\omega)$ могут иметь сопоставимые с $n_C^{\text{obs}}(\omega)$ значения, несмотря на количественное различие в коэффициентах в выражениях (3.22) и (3.23). Кроме того, благодаря конечной ширине АЧХ наблюдаемая спектральная плотность $n^{\text{obs}}(\omega)$ магновов оказывается отличной от нуля и в области ниже порога ($\omega < 0$, или $v < v_{\mathbf{H}}$).

Рассмотрим в качестве АЧХ часто встречающуюся функцию *

$$F(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{Q}{1 + Q^2 \omega^2}, \quad (3.26)$$

где Q — добротность. Интегралы (3.24) от функций (3.22), (3.23) и лоренциана (3.26) берутся явно. Учитывая малость параметров ω_x , ω_y и t/n_0 , а также предполагая, что $Q\omega_0 \ll 1$, приходим к следующим выражениям:

$$n^{\text{obs}}(\omega) = n_C^{\text{obs}}(\omega) + n_V^{\text{obs}}(\omega) + n_{S_V}^{\text{obs}}(\omega), \quad (3.27)$$

$$n_C^{\text{obs}}(\omega) = \frac{n_0}{\pi} \frac{Q}{1 + Q^2 \omega^2}, \quad (3.28)$$

$$n_V^{\text{obs}}(\omega) = \frac{\pi t}{4\sqrt{2}\omega_y \sqrt{\omega_x}} \left(\frac{Q^2 \omega}{1 + Q^2 \omega^2} + \frac{Q}{\sqrt{1 + Q^2 \omega^2}} \right)^{1/2}, \quad (3.29)$$

$$n_{S_V}^{\text{obs}}(\omega) = \frac{t}{8\omega_y} \frac{Q}{1 + Q^2 \omega^2} \times \left[A - Q\omega \left(\frac{\pi}{2} + \arctg Q\omega \right) - \frac{1}{2} \ln(1 + Q^2 \omega^2) \right], \quad (3.30)$$

где через A обозначена не зависящая от ω (но зависящая от T , n_0 и размеров системы) величина

$$A = 3 \ln \left(\frac{t}{n_0} + 3\omega_x \right) - 2 \ln \left(\frac{t}{n_0} + \kappa\omega_y \right) + \ln Q. \quad (3.31)$$

Из выражений (3.28)–(3.31) можно видеть, что различные составляющие спектральной плотности по-разному ведут себя при варьировании температуры, толщины пленки и накачки, обеспечивающей необходимое для БЭК число магнонов в системе. Это создает принципиальные предпосылки для надежного выделения из наблюдаемой полной и, по сути, единственной спектральной кривой как конденсатной (когерентной), так и поверхностной и объемной (некогерентных) составляющих.

Весьма показательно, что в своих главных деталях форма спектра зависит не порознь от температуры и накачки, а только от их отношения t/n_0 . Выражения (3.28)–(3.31) показывают, что форма кривой $n^{\text{obs}}(\omega)$ инвариантна относительно одновременного изменения температуры и числа частиц в конденса-

те, если их отношение $\eta = t/n_0$ постоянно: при фиксированном значении η с изменением температуры или накачки магнонов меняется только общий для всех вкладов коэффициент.

Критическая концентрация магнонов n_{BEC} (производная от теплоемкости как функция n изменяется скачком при переходе через n_{BEC}) имеет вид

$$n_{BEC} = \frac{\zeta(3/2)}{\lambda_T^3}. \quad (3.32)$$

При комнатной температуре $T = 300$ К и $m_m = 5m_e$ тепловая длина (см. (2.21)) мала: $\lambda_T \simeq 1,92 \cdot 10^{-7}$ см. Поэтому число частиц в конденсате уже довольно велико: $N_{BEC} = (n_{BEC} V)^{2/3} \simeq 6,28 \cdot 10^{11}$ (плотность конденсата $N_{BEC}/V \simeq 6,28 \cdot 10^{14}$), а параметр $\eta_{BEC} = t/N_{BEC} \simeq 2,9 \cdot 10^{-8}$ достаточно мал, чтобы обеспечить справедливость приближений, использованных при выводе (3.28)–(3.31). Несмотря на столь большое количество частиц в конденсате, его вклад в $n^{\text{obs}}(\omega)$ практически незаметен (примерно на три–четыре порядка меньше, чем тепловых возбуждений). Обратим внимание: на кривой $n^{\text{obs}}(\omega)$, тем не менее, уже виден (см. рис. 3,а и 4,а) вполне сформировавшийся пик, как следствие сингулярного (при $\eta\omega \rightarrow 0$) поведения объемного и поверхностного вкладов в $n^{\text{obs}}(\omega)$ (3.22), (3.23). Для прямого наблюдения $n_C^{\text{obs}}(\omega)$ в спектральной плотности нужно, чтобы $n_0 \gg N_{BEC}$. Из (3.28)–(3.31) можно определить, при каких значениях параметра $\eta = \eta_{\text{cros}}$ количество частиц в конденсате становится макроскопическим — например, становится равным объемному вкладу термализованных возбуждений. Это дает хотя и грубую, но простую оценку:

$$\eta_{\text{cros}} = \frac{4\omega_y}{\pi^2} \sqrt{2Q\omega_x}. \quad (3.33)$$

Если толщина пленки $L_x = 10$ мкм, то $\eta_{\text{cros}} \simeq 2,56 \cdot 10^{-12}$. Когда параметр η достигает значения η_{cros} (по мере увеличения накачки магнонов), происходит своего рода кроссовер, т.е. как бы резко вырастает пик на кривой $n^{\text{obs}}(\omega)$. Более аккуратную оценку для η_{cros} можно получить из уравнения $n_C^{\text{obs}}(0) = n_{\text{ex}}^{\text{obs}}(\omega_{\text{max}})$, где $n_{\text{ex}}^{\text{obs}}(\omega) = n_V^{\text{obs}}(\omega) + n_{S_V}^{\text{obs}}(\omega)$, а ω_{max} — частота, при которой функция $n_{\text{ex}}^{\text{obs}}(\omega)$ достигает максимума. Отсюда получаем: если $L_x = 10$ мкм, то $\eta_{\text{cros}} \simeq 1,92 \cdot 10^{-12}$, а если $L_x = 1$ мкм, то $\eta_{\text{cros}} \simeq 5,26 \cdot 10^{-12}$.

* Ей, например, в радиофизике отвечает цепь из одного колебательного контура.

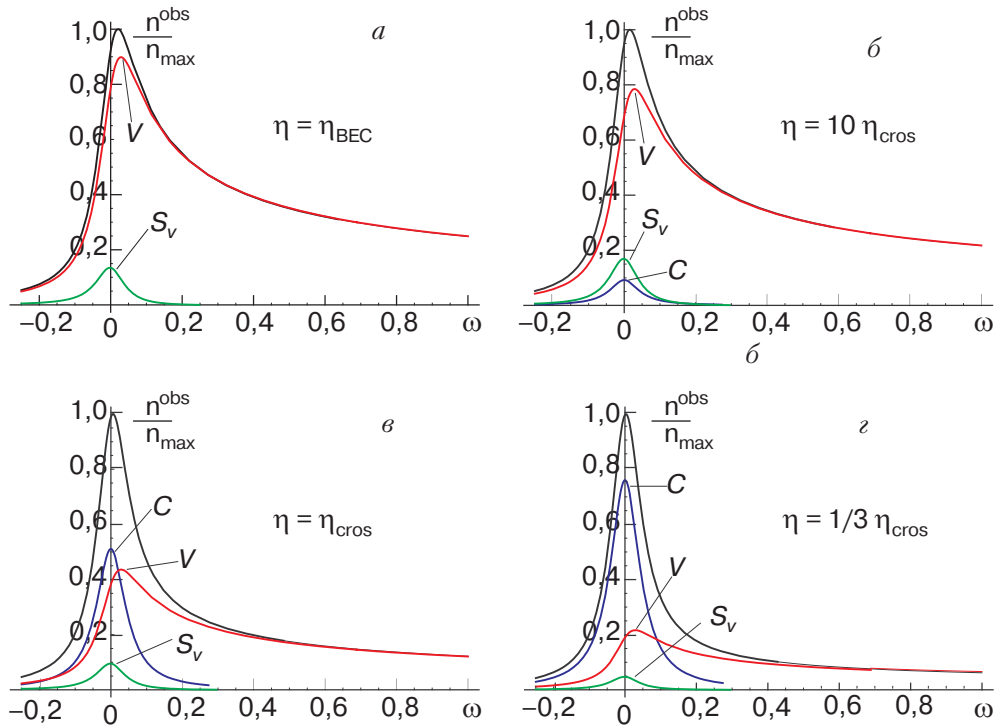


Рис. 3. Спектральная плотность магновов и ее парциальные вклады при разных значениях параметра η ; n_{\max} – нормировочный коэффициент, соответствующий максимуму полной спектральной плотности при данном η ; $L_x = 10$ мкм; $\eta_{BEC} \simeq 4,8 \cdot 10^{-9}$, $\eta_{cros} \simeq 1,92 \cdot 10^{-12}$; символами C , S_v , V отмечены соответствующие парциальные вклады.

Из этих оценок можно убедиться, что при комнатной температуре $t = 3 \cdot 10^3$ такой кроссовер имеет место при $n_0 \simeq 1,56 \cdot 10^{15}$, или при плотности $n_0/V \simeq 1,56 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$, которая и достигалась в пленках ЖИГ [18].

Обсуждаемые детали поведения спектральной плотности магновов в зависимости от величины n_0 , что соответствует зависимости от уровня накачки, иллюстрируют рис. 3–5. При этом на рис. 3 показан спектр, отвечающий микропленке (исследуемой в работе [18]) толщиной ≈ 10 мкм, а на рис. 4 – на порядок меньшей, ≈ 1 мкм. Как видно, в более толстой пленке при всех накачках поверхностный вклад по величине уступает объемному и, по сути, можно говорить лишь о конкуренции конденсатного и объемного вкладов. Последний из них, будучи асимметричным относительно максимума и достаточно мощным в области коротковолнового крыла спектра, ослабевает, уступая место конденсатному вкладу, определяющему в итоге форму полосы при самой высокой накачке (рис. 3,г).

Возможно, интереснее представляется картина формирования спектра в очень тонкой пленке (рис. 4), когда присутствуют и конкурируют все три вклада. Более того, поверхностный вклад, как видно, даже при относительно слабых накачках (рис. 4,а и б) не только не меньше, а, по существу, доминирует и вместе с нарастающим конденсатным вкладом в зна-

чительной мере обеспечивает наблюдаемую форму кривой. В отличие от случая, показанного на рис. 3, здесь объемный вклад, оказываясь также асимметричным, сравнительно мал (особенно при больших n_0), и конденсатный вклад «борется» в основном с поверхностным вкладом, становясь преобладающим лишь при самых высоких уровнях накачки (рис. 4,г). Рисунки 3 и 4 отчетливо свидетельствуют о возможностях, открывающихся при исследовании БЭК не только в тонких магнитных пленках, но и в других системах конечного размера и с малым числом частиц.

Наконец, на рис. 5 показана эволюция полного распределения по мере изменения температуры, приводящего при прочих равных условиях к существенному росту числа магновов в конденсате при уменьшении температуры.

Необходимо иметь в виду, что точку кроссовера η_{cros} при этом нельзя интерпретировать как сигнал о фазовом переходе. В используемых безразмерных переменных его температура (1.1) определяется выражением

$$t_{BEC} = \frac{k_B T_{BEC}}{\varepsilon_H} = \frac{4}{\pi} (\omega_x \omega_y \omega_z)^{1/3} \left[\frac{N}{\zeta(3/2)} \right]^{2/3}. \quad (3.34)$$

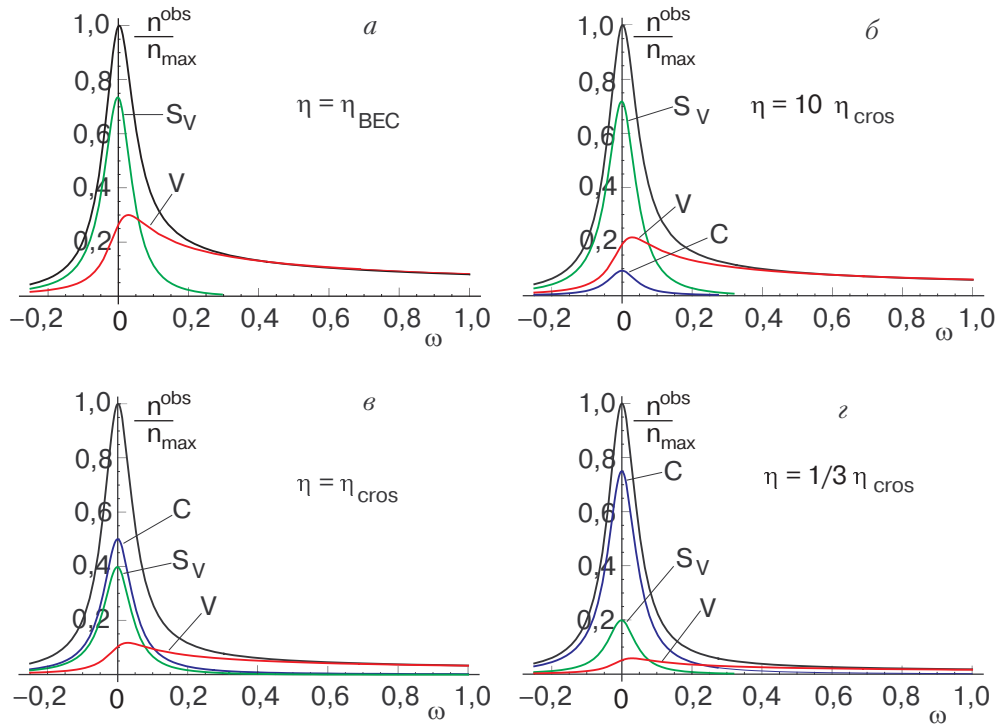


Рис. 4. То же, что на рис. 3, при $L_x = 1$ мкм; $\eta_{BEC} \simeq 2,2 \cdot 10^{-8}$, $\eta_{cros} \simeq 5,26 \cdot 10^{-12}$.

Как было показано выше (см. (3.32)), количество частиц конденсата в точке фазового перехода $N_{BEC} \sim N^{2/3}$, так что

$$\eta_{BEC} = \frac{t_{BEC}}{N_{BEC}} = \frac{4}{\pi} \frac{(\omega_x \omega_y \omega_z)^{1/3}}{\zeta^{2/3} (3/2)},$$

$$\frac{\eta_{cros}}{\eta_{BEC}} = \frac{\zeta^{2/3} (3/2)}{\pi} \sqrt{2Q} (\omega_x \omega_y \omega_z)^{1/6} \ll 1. \quad (3.35)$$

Это, в свою очередь, свидетельствует, что появление заметного пика в спектральной плотности происходит, по существу, уже в фазе БЭК. Для рассматриваемого здесь случая пленки с $L_x \simeq 10$ мкм,

$L_y = L_z \simeq 1$ см и при $Q \simeq 20$ отношение $\eta_{cros}/\eta_{BEC} = N_{BEC}/n_{cros} \simeq 4 \cdot 10^{-4}$. Другими словами, при заданной температуре для фазового перехода в состояние с конденсатом нужны значительно меньшие плотности, чем для наблюдения кроссовера, т.е. перехода в состояние с преобладающим количеством частиц в конденсате (см. рис. 3 и 4).

Следует подчеркнуть, что вклад $n_{S_V}^{obs}(\omega)$ (3.30) в спектральную плотность — это выделенный в аналитическом виде мезоскопический эффект, или эффект конечных размеров системы. Обращает на себя внимание тот факт, что зависимость этого вклада от частоты практически не отличается от $n_C^{obs}(\omega)$. Между тем физическая природа этих вкладов раз-

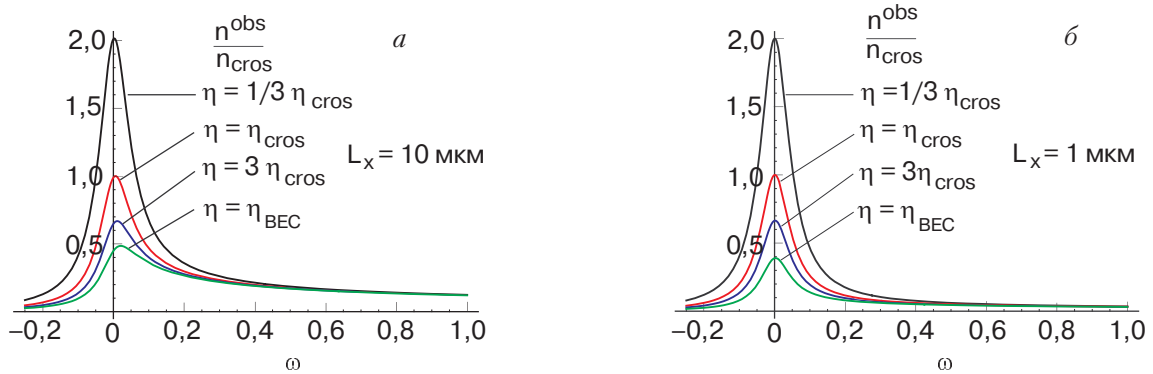


Рис. 5. Полная спектральная плотность магновов при разных значениях параметра η ; n_{cros} — нормировочный коэффициент, соответствующий максимуму полной спектральной плотности при $\eta = \eta_{cros}$.

лична: $n_C^{\text{obs}}(\omega)$ — не что иное, как вклад большого количества магнонов с одинаковыми квантовыми числами. Эта совокупность квазичастиц представляет собой *квантовый объект*, состоящий из макроскопического числа частиц, или когерентный бозе-конденсат. Напротив, $n_{SV}^{\text{obs}}(\omega)$ формируется совокупностью магнонов с различными квантовыми числами и отвечает состоянию, очевидно не когерентному. Вряд ли имеется возможность различить эти вклады по признаку когерентности с помощью соответствующих интерференционных измерений. Тем не менее благодаря тому, что величина вклада $n_{SV}^{\text{obs}}(\omega)$ пропорциональна температуре и площади поверхности образца (в отличие от $n_C^{\text{obs}}(\omega)$), эти составляющие спектральной плотности можно выделить с помощью серии измерений при различных температурах на образцах различных размеров и формы.

Для количественного описания данных нужно, кроме прочего, располагать информацией об эффективной АЧХ измерительной установки. Используемый нами в качестве модели лоренциан (3.26) вряд ли соответствует реальности. Тем не менее даже в этой простой модели видна существенная зависимость результатов наблюдения от параметров АЧХ, в данном случае — от добротности Q . Рассматривая парциальные вклады как функции приведенной частоты $Q\omega$, нетрудно заметить, что вклад конденсата $\sim Q$, в то время как объемный вклад (3.29) $\sim Q^{1/2}$. Поэтому с увеличением разрешающей способности вклад конденсата становится все более заметным на фоне объемного. Этим можно воспользоваться для идентификации объемной составляющей. Однако поверхностный вклад тоже практически пропорционален добротности, поэтому, чтобы отделить эту составляющую от конденсатной, варьирования добротности уже недостаточно и нужна специальная обработка данных (например, упомянутая выше).

4. Учет анизотропии закона дисперсии магнонов

Как говорилось, в реальных ФМ пленках спектр длинноволновых магнонов ввиду вклада магнитодипольного взаимодействия не изотропен. При этом анизотропия определяется внешним магнитным полем, задающим направление намагниченности [10,18]. Учет этого взаимодействия приводит к такому искажению изотропного квадратичного закона дисперсии (3.3), когда в его зависимости от третьей компоненты квазиимпульса появляется характерный провал (см. рис. 6) при значении $p_z = p_0 \simeq 3 \cdot 10^{-4} \text{ см}^{-1}$ (напомним, что $\mathbf{H} \parallel \mathbf{z}$). Соот-

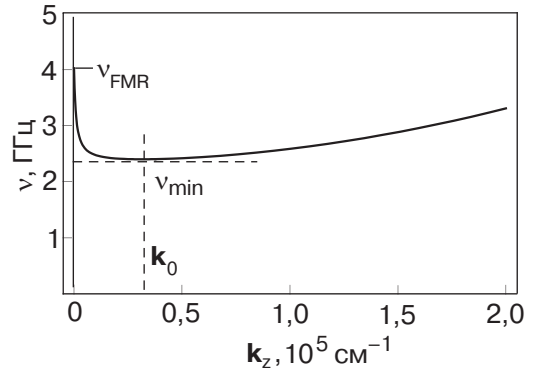


Рис. 6. Вид дисперсии длинноволновых магнонов с волновыми векторами $\mathbf{k} \parallel \mathbf{H}$ в ФМ микропленке.

ветствующая зависимость $\varepsilon(\mathbf{p})$ хорошо аппроксимируется выражением

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{\varepsilon(0)}{p_z/p_a + 1}, \quad (4.1)$$

которое при $p_a \rightarrow \infty$ и $\varepsilon(0) \rightarrow \varepsilon_{\mathbf{H}}$ переходит в (3.2).

Если известны энергия в нуле $\varepsilon(0)$ и параметры экстремума p_0 и $\varepsilon_0 \equiv \varepsilon(p_0)$, то импульс p_a в правой части (4.1) можно записать следующим образом:

$$\frac{p_0}{p_a} = \frac{\varepsilon(0)}{\varepsilon_0 - p_0^2/2m} - 1. \quad (4.2)$$

В соответствии с феноменологической кривой на рис. 6 имеем: $\varepsilon(0)/2\pi\hbar \simeq 4$ ГГц, $\varepsilon_0/2\pi\hbar \simeq 2,3$ ГГц. Однако ради унификации с рассмотренным выше случаем положим, что энергия в минимуме ε_0 совпадает с энергией щели $\varepsilon_{\mathbf{H}}$ из предыдущего раздела ($\varepsilon_0/2\pi\hbar \simeq 2$ ГГц). Тогда в безразмерных переменных (4.1) перепишем в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon(\mathbf{p}) &\equiv \varepsilon_{\mathbf{k}} = \varepsilon_0(1 + \omega_{\mathbf{k}}), \\ \omega_{\mathbf{k}} &= \omega_x k_x^2 + \omega_y k_y^2 + \omega_z f(k_z), \\ f(k_z) &= (k_z - k_0)^2 \left(1 + \frac{2k_0}{k_z + k_a} \right) = \\ &= k_z^2 + \frac{2k_0(k_0 + k_a)^2}{k_z + k_a} - k_0(3k_0 + 2k_a), \end{aligned} \quad (4.3)$$

где

$$k_0 \simeq 10^4, \quad k_a \simeq 270.$$

Заметим, что минимуму энергии в (4.3) отвечает состояние с квантовыми числами $\mathbf{k} = (1, 1, k_0)$.

Вычисление спектральной плотности числа состояний

$$g(\omega) = \sum_{\mathbf{k}} \delta(\omega - \omega_{\mathbf{k}})$$

с анизотропным законом дисперсии (4.3) заметно усложняется по сравнению с простыми расчетами в разд. 3. Тем не менее окончательные выражения в количественном отношении очень близки к полученным для изотропного случая. Повторяя схему вычислений предыдущего раздела, выделим в $g(\omega)$ нижайшее состояние $g_C(\omega)$, вклад первой гармоники ($k_x = 1$) $g_1(\omega)$ и оставшуюся часть $g_\infty(\omega)$:

$$g(\omega) = g_C(\omega) + g_1(\omega) + g_\infty(\omega),$$

$$g_C(\omega) = \delta(\omega - \omega_x - \omega_y),$$

$$g_1(\omega) = \sum_{\mathbf{k}_\perp} \delta[\omega - \omega_x - \omega_y k_y^2 - \omega_z f(k_z)] \simeq \frac{J(\omega)}{2\sqrt{\omega_y \omega_z}} \theta(\omega - \omega_x - \omega_y). \quad (4.4)$$

Через $J(\omega)$ в правой части (4.4) обозначен интеграл (он вычисляется в Приложении В)

$$J(\omega) = \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{\sqrt{\omega - \omega_x - \omega(z)}}, \quad (4.5)$$

где z_1, z_2 — корни уравнения $\omega(z) = \omega - \omega_x$:

$$\omega(z) = \omega_z f(z/\sqrt{\omega_z}) = (z - z_0)^2 \left(1 + \frac{2z_0}{z + z_a} \right), \quad (4.6)$$

где $z_a = k_a \sqrt{\omega_z} \simeq 2,7 \cdot 10^{-10}$, $z_0 = k_0 \sqrt{\omega_z} \simeq 10^{-1}$.

Аналогичным образом вычисляя вклад $g_\infty(\omega)$ с точностью до $O(\sqrt{\omega_x})$, находим

$$g_\infty(\omega) = \sum_{k_x=2}^{\infty} \sum_{\mathbf{k}_\perp} \delta[\omega - \omega_x k_x^2 - \omega_y k_y^2 - \omega_z f(k_z)] \simeq \frac{\theta(\omega - 4\omega_x - \omega_y)}{2\sqrt{\omega_x \omega_y \omega_z}} \left[\frac{\pi}{2} (z_2 - z_1) - \frac{3}{2} \sqrt{\omega_x} J(\omega) \right]. \quad (4.7)$$

Собирая члены в (4.4) и (4.5), пропорциональные поверхности и объему, получим (ср. (3.16) и (3.17))

$$g_{S_V}(\omega) = \frac{J(\omega)}{2\sqrt{\omega_y \omega_z}} [\theta(\omega - \omega_x - \omega_y) - \frac{3}{2} \theta(\omega - 4\omega_x - \omega_y)] \quad (4.8)$$

$$g_V(\omega) = \frac{\pi(z_2 - z_1)}{4\sqrt{\omega_x \omega_y \omega_z}} \theta(\omega - 4\omega_x - \omega_y). \quad (4.9)$$

Нетрудно убедиться, что интеграл $J(\omega)$, вообще говоря, слабо зависит от ω ; так, при $\omega \gg \omega_x$ функция $J(\omega) \simeq \pi/2$, что совпадает с ранее рассмотрен-

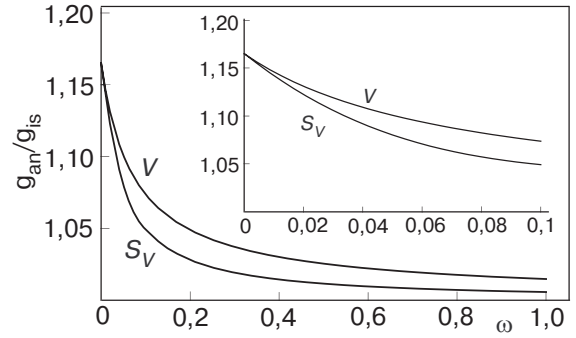


Рис. 7. Отношение спектральных плотностей состояний: $g_{an}(\omega)$ соответствует анизотропному закону дисперсии (4.1), $g_{is}(\omega)$ — изотропному (3.2); как и выше, символом V отмечены объемные вклады, S_V — поверхностные.

ным изотропным случаем. Количественное отличие, и то незначительное, проявляется только в области очень малых частот (вблизи порога), что иллюстрирует рис. 7.

Поэтому и поверхностный, и объемный вклады в спектральную плотность тепловых спиновых возбуждений (4.7) количественно не сильно отличаются от случая изотропного закона дисперсии (3.2). В целом же наблюдаемое спектральное распределение в этом случае качественно совпадает с кривыми, показанными на рис. 3 и 4.

Из выполненных вычислений следует вполне оптимистический для экспериментаторов вывод: казалось бы, довольно серьезное различие в законах дисперсии (3.2) и (4.1) почти не сказывается на результатах измерения спектральной плотности магнов, что иллюстрирует рис. 8. Таким образом, модель идеального вырожденного бозе-газа с изотропным квадратичным спектром вполне адекватна для интерпретации опытов по БЭК магнов в реальных ФМ системах.

5. Заключение

Проведенные расчеты убедительно демонстрируют, что в тонкой ФМ пленке размерами $1 \text{ см} \times 1 \text{ см} \times 10 \text{ мкм}$ БЭК спиновых возбуждений может быть достигнута уже при такой накачке, которая обеспечивает их появление и существование в пленке в количестве $\sim 10^{14}$. Принципиален тот факт, что при этом практически отсутствуют ограничения на температуру, и все признаки БЭК проявляются при достаточно высоких температурах вплоть до комнатных. Разумеется, понижение температуры, включая водородную либо гелиевую ее область, должно существенно снизить уровень «критической» накачки ввиду того, что, как показано в работе, имеет место скейлинг, или, другими словами, зависимость

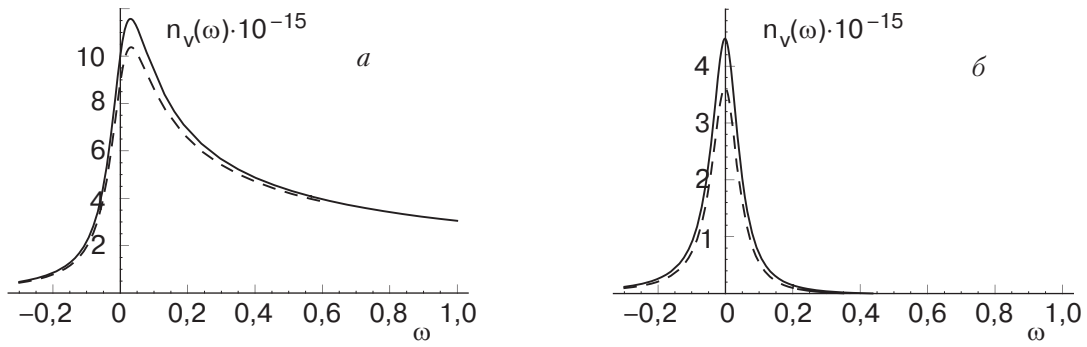


Рис. 8. Объемный (а) и поверхностный (б) вклады в спектральную плотность магнонов для пленки толщиной 10 мкм; сплошная линия соответствует анизотропному закону дисперсии (4.1), штриховая — изотропному (3.2).

спектральной плотности магнонов не от полного количества частиц и температуры, а только от их отношения N/T . Тем самым форма наблюдаемого спектра длинноволновых магнонов остается неизменной при сохранении приведенного отношения. Напомним, что число этих квазичастиц полностью задается внешней накачкой.

С другой стороны, форма измеряемого спектра в значительной степени связана с АЧХ фильтра и также может варьироваться путем улучшения добротности последнего. Ее увеличение (или выделение более узкой частотной области вблизи нижайших конденсирующихся магнонных состояний) тоже приводит к сужению полосы, а следовательно — к более определенному исследованию именно бозе-конденсата, на входящих в него квазичастицах которого происходит бриллюэновское рассеяние световой волны.

При интерпретации экспериментальных данных следует помнить, что нельзя говорить о непосредственном наблюдении конденсата только на том основании, что в спектральной плотности появляется пик. Подобную структуру имеют все вклады и необходимо надежно выделять из экспериментальных данных каждый из них. Из теории следует, что главной отличительной чертой конденсатного вклада является его независимость от температуры и размеров образца. Так что точное и убедительное выделение $n_C^{obs}(\omega)$ требует дополнительных измерений при разных температурах.

Изучая явление БЭК в магнитных пленках, мы рассматривали их как системы конечного размера. В них, как известно и отмечалось выше, БЭК осуществляется не в виде фазового перехода, а в виде кроссовера. Однако конденсация, имеющая место вблизи некоторой температуры T_{cross} , происходит столь быстро, что эта температура может рассматриваться как критическая, не будучи таковой. По-видимому, переход удалось бы сделать более плавным (или размытым по температуре), если использовать

еще более тонкие пленки при сохранении достаточно высокой температуры измерений. При этом отсутствие точки фазового перехода несколько не препятствует явлению БЭК, или макроскопическому накоплению магнонов в их нижайшем энергетическом состоянии. Более того, тонкие пленки интересны еще в одном отношении: в них можно было бы проследить за ролью и вкладом поправочных членов (см. (2.14)), возникающих при переходе от суммирования к интегрированию по элементам фазового объема, на что до настоящего времени, насколько нам известно, внимания не обращалось.

Сделанные выше расчеты спектральной плотности магнонов в ФМ пленке предполагали наличие их равновесного газа, что, строго говоря, не соответствует действительности. Мощная электромагнитная накачка создает относительно коротковолновые спиновые возбуждения, которые в результате четырехмагнонного взаимодействия, как показано в работе [23], быстро релаксируют к квазиравновесному распределению с температурой (вследствие спин-решеточной связи), равной или близкой температуре кристалла. Рассмотрение процессов магнон-магнонной и магнон-фононной релаксации одновременно с процессом магнонной бозе-конденсации требует, несомненно, специального анализа и будет выполнено отдельно.

Отметим, наконец, что в экспериментальной работе [18] сделано предположение, что накопление магнонов в двух (симметричных) точках спин-волнового спектра создает предпосылки для неоднородного бозе-конденсата. Однако, с точки зрения термодинамики процесса, никакое конечное число вырожденных точек \mathbf{k} -пространства не изменит наблюдаемой картины рассеяния и отвечающей ему спектральной плотности, которая будет полностью описываться в рамках подхода, сформулированного выше. Такой вывод остается в силе, несмотря на то что возникающий в подобном случае конденсат можно было бы определить как *некогерентный*.

Отличие возникло бы лишь в том случае, если бы нижайшее состояние магنونного спектра в силу каких-либо причин оказалось вырожденным бесконечнократно (например, этому мог бы соответствовать модельный спектр в виде желоба). Отвечающий этому случаю конденсат также некогерентный, и переход в него имел бы некоторые отличия. Однако изучение особенностей подобной модели выходит за рамки настоящей работы.

Мы искренне признательны Г.А. Мелкову, который ознакомил нас с результатами своей с соавторами экспериментальной работы, чем стимулировал нашу, за многократное обсуждение и полезную критику.

Работа выполнена при частичной поддержке гранта SCOPES N IB7320-110840 SMSF, гранта ДФФД Украины 02.07/00152, а также целевой программы Отделения физики и астрономии НАН Украины.

Приложение А

Чтобы продемонстрировать проблему невыделения сингулярного члена, рассмотрим ряд, сумма которого выражается через элементарные функции:

$$S = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l^2 + x} = \frac{1}{2x} + \frac{\pi \operatorname{ch}(\pi\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}. \quad (\text{A.1})$$

«Наивный» переход в (А.1) от суммы к интегралу дает для S следующее приближение:

$$S \approx S_0 = \int_0^{\infty} \frac{dl}{l^2 + x} = \frac{\pi}{2\sqrt{x}}. \quad (\text{A.2})$$

Если же выделить первое слагаемое в (А.1), соответствующее $l = 0$, а для оставшейся суммы использовать аппроксимацию интегралом, то получим

$$S \approx S_1 = \frac{1}{x} + \int_{1/2}^{\infty} \frac{dl}{l^2 + x} = \frac{1}{x} + \frac{\operatorname{arctg}(2\sqrt{x})}{\sqrt{x}}. \quad (\text{A.3})$$

Легко убедиться, что аппроксимация (А.3) практически не отличается от точного выражения (А.1) во всей области изменения параметра $x > 0$. Напротив, аппроксимация (А.2) — очень грубое приближение по сравнению с (А.3), особенно при $x \rightarrow 0$. Можно, например, сравнить их асимптотики при больших и малых x :

$$x \rightarrow 0: \quad S = \frac{1}{x} + \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^4 x}{90} + O(x^2),$$

$$S_1 = \frac{1}{x} + 2 - \frac{8x}{3} + O(x^2),$$

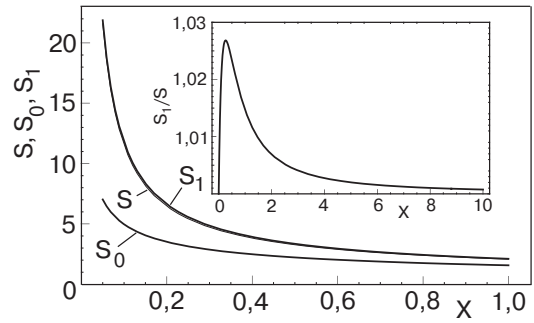


Рис. 9. Поведение ряда S и его аппроксимаций S_0, S_1 как функций параметра x ; на вставке показан график отношения S/S_1 .

$$x \rightarrow \infty: \quad S = \frac{\pi}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2x} + O(e^{-2x}),$$

$$S_1 = \frac{\pi}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{24x^2} + O(x^3).$$

На рис. 9 показаны графики зависимости S от параметра x для точного и приближенных выражений.

Приложение В

Рассмотрим интеграл (см. (4.5))

$$J(\omega) = \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{\sqrt{\omega - w(z)}}, \quad (\text{B.1})$$

где

$$w(z) = (z - z_0)^2 \left(1 + \frac{2z_0}{z + z_a} \right).$$

Пределы интегрирования в (В.1) — это положительные корни (см. рис. 10) уравнения $w(z_{1,2}) = \omega$.

Для вычисления интеграла выражение под знаком корня в (В.1) удобно представить в виде

$$\omega - w(z) = \frac{(z_2 - z)(z - z_1)(z + z_a + z_1 + z_2)}{z + z_a}.$$

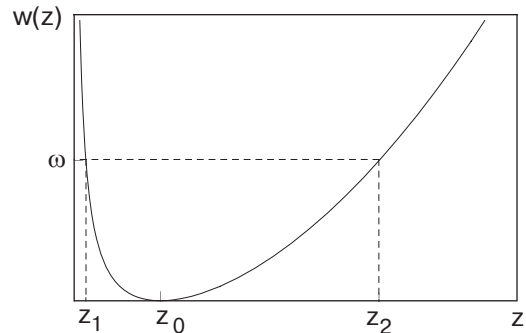


Рис. 10. Графическое решение уравнения $w(z_{1,2}) = \omega$

Тогда с помощью стандартной замены переменной интегрирования

$$z = \frac{z_1(z_2 + z_a) + z_a(z_2 - z_1)\sin^2 \varphi}{(z_2 + z_a) - (z_2 - z_1)\sin^2 \varphi}$$

интеграл (В.1) преобразуется к виду

$$J(\omega) = \frac{2(z_a + z_1)}{\sqrt{(z_a + z_2)(z_a + 2z_1 + z_2)}} \times \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{(1 - a\sin^2 \varphi)\sqrt{1 - ab\sin^2 \varphi}}, \quad (\text{В.2})$$

где

$$a = \frac{z_2 - z_1}{z_a + z_2}, \quad b = \frac{z_2 + z_1}{z_a + 2z_1 + z_2}.$$

Интеграл в правой части (В.2) — это полный нормальный эллиптический интеграл Лежандра 3-го рода $P(a, ab)$.

Дополнение к корректуре

После того, как настоящая статья была отправлена в журнал «Физика низких температур», вышла экспериментальная работа J. Kasprzak, M. Richard, S. Kundermann, A. Baas, J.M.J. Keeling, F.M. Marchetti, M.H. Szymanska, R. Andre, J.L. Staehli, V. Savona, P.B. Littlewood, B. Deveaud, and Le Si Dang, *Nature* **443**, 409 (2006), в которой также сообщается о бозе-эйнштейновской конденсации квазичастиц. В этой работе речь идет о другом типе относительно легких квазичастиц бозе-типа, а именно экситонных поляритонах (светоэкситонах), высокую плотность которых удается создавать лазерной накачкой в оптических микрополостях кристалла CdTe. В нем аналогично ЖИГ происходит термализация накачанных квазичастиц, а выше некоторой их концентрации — макроскопическое заселение основного квазичастичного (в данном случае поляритонного) состояния при достаточно высокой критической температуре $T_{\text{БЕС}} \approx 19$ К. В пользу бозе-конденсации свидетельствуют наблюдающиеся слабые когерентные корреляционные эффекты в выходящем из кристалла излучении. При этом, однако, не исключено, что дополнительная информация об образовании именно бозе-конденсата могла бы быть получена, если бы удалось разделить (исходя из их температурного либо концентрационного поведения) объемные и поверхностные вклады в наблюдаемую интенсивность и форму линии излучения. Для магнонов такие вклады рассчитаны в

нашей работе, но, несомненно, они должны присутствовать и для поляритонов в малых объемах оптических микрополостей.

1. S.N. Bose, *Z. Phys.* **26**, 171 (1924).
2. A. Einstein, *Preuss. Akad. Wiss. Math. Kl. Bericht.* **1**, 2 (1925).
3. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Статистическая физика*, Ч. 1, Наука, Москва (1976).
4. M.H. Anderson, J.R. Ensher, M.R. Matthews, C.E. Wieman, and E.A. Cornell, *Science* **269**, 198 (1995).
5. K.B. Davis, M.-O. Mewes, M.R. Andrews, N.J. van Druten, D.S. Durfee, D.M. Kurn, and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3969 (1995).
6. S.A. Moskalenko and D.W. Snoke, *Bose-Einstein Condensation Excitons and Biexcitons*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (2000).
7. C.D. Jefferies and L.V. Keldysh, *Electron-Hole Droplets in Semi-conductors*, Elsevier Sci. Ltd. (1983); L.V. Keldysh, *Contem. Phys.* **27**, 395 (1986).
8. J.P. Einstein and A.H. McDonald, *Nature* **432**, 691 (2004).
9. М.И. Каганов, Н.Б. Пустыльник, Т.И. Шалаева, *УФН* **167**, 197 (1997).
10. А.Г. Гуревич, *Магнитный резонанс в ферритах и антиферромагнетиках*, Наука, Москва (1973); A.G. Gurevich and G.A. Melkov, *Magnetization, Oscillations and Waves*, CRC Press, N.Y. (1996).
11. T. Nikuni, M. Oshikawa, A. Oosawa, and H. Tanaka, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 5868 (2000).
12. M. Matsumoto, B. Normand, T.M. Rice, and M. Sigrist, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 077203 (2003).
13. E.Ya. Sherman, P. Lemmens, B. Busse, A. Oosawa, and H. Tanaka, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 057201 (2003).
14. C. Rüegg, N. Cavadini, A. Furer, H.-U. Güdel, K. Krämer, H. Mutka, A. Wildes, K. Habicht, and P. Vorderwisch, *Nature* **423**, 62 (2003).
15. T. Radu, H. Wilhelm, V. Yushmani, D. Kovrizhin, R. Coldea, Z. Tylczynski, T. Luhmann, and F. Steglich, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 1272002 (2005).
16. M. Crisan, D. Bodea, I. Tifrea, and I. Grosu, *J. Phys.* **50**, 427 (2005).
17. В.М. Калита, В.М. Локтев, *ЖЭТФ* **125**, 1149 (2004).
18. S. Demokritov, V. Demidov, O. Dzyapko, G.A. Melkov, A.A. Serga, B. Hillebrands, and A.N. Slavin, *Nature* **443**, 430 (2006).
19. А.С. Давыдов, *Теория твердого тела*, Наука, Москва (1973).
20. А.И. Ахиезер, В.Г. Барьяхтар, С.В. Пелетминский, *Спиновые волны*, Наука, Москва (1967).
21. Р. Фейнман, *Статистическая механика*, Мир, Москва (1978).
22. H. Weyl, *Ramifications Old and New, of the Eigenvalue Problem*, Bull. Amer. Math. Soc., **56**, 115 (1950) (перевод в кн. Герман Вейль, *Избранные труды*, под ред. В.И. Арнольда, Наука, Москва (1984), с. 361).
23. Ю.Д. Калафати, В.Л. Сафонов, *Письма ЖЭТФ* **50**, 149 (1989).

On the theory of Bose–Einstein condensation of quasi-particles: the possibility of condensation of ferromagnons at high temperatures

A.I. Bugrij and V.M. Loktev

The Bose–Einstein condensation of magnons in thin ferromagnetic films as the physical systems of a finite size is considered. It is shown that in accordance with the contemporary experimental potentialities which allow us to achieve spin-wave excitation concentrations $\sim 10^{-18}$ – 10^{-19} cm⁻³ in such films, the coherent condensate formation of these quasi-particles begins at temperatures $T \sim 10^2$ K (including room ones). It is

established that the Bose-condensation is accompanied by scaling by which the main thermodynamic variable proves to be not the particle number N , but the ratio N/T . The latter demonstrates that the Bose-condensation of magnons can be observed at their rather low concentration (and also pumping). The roles of spin-excitation spectrum shape and film thickness for the phase transition into the state with the Bose-condensate, and the partial contributions from different quasi-particle groups into the total (observed) magnon energy distribution curve are analyzed.

Keywords: Bose condensation, magnons, spectral density, phase transition.