

## О влиянии внутренней структуры атома на бозе-эйнштейновскую конденсацию в идеальном газе водородоподобных атомов

Ю.В. Слюсаренко, А.Г. Сотников

*Институт теоретической физики им. А.И. Ахиезера  
Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт»  
ул. Академическая, 1, г. Харьков, 61108, Украина  
E-mail: slusarenko@kipt.kharkov.ua*

Статья поступила в редакцию 6 января 2006 г., после переработки 20 марта 2006 г.

Изучены особенности бозе-конденсации в равновесном идеальном газе, состоящем из заряженных фермионов двух сортов и их связанных состояний — водородоподобных атомов, при наличии равновесия между фотонами и веществом. Показано, что основное влияние в этих условиях на явление бозе-эйнштейновской конденсации (БЭК) оказывает существование уровней, связанных со сверхтонким расщеплением основного состояния водородоподобного атома. На основе учета эффектов, обусловленных дополнительным расщеплением уровней сверхтонкой структуры основного состояния во внешнем однородном постоянном магнитном поле (эффекты Зеемана, Пашена — Бака), найдены зависимости критической температуры и плотности конденсата от напряженности магнитного поля. Обнаружено, что в условиях полного статистического равновесия в системе конденсат образуется только атомами, которые находятся в состоянии с наименьшей энергией. Показано, что в случае отсутствия равновесия между излучением и веществом систему в области сверхнизких температур и малых плотностей можно рассматривать как многокомпонентный идеальный газ водородоподобных атомов. Установлено существование иерархии температур индивидуального перехода каждого из компонентов к состоянию с БЭК. Найдены выражения для критических температур и плотностей числа частиц в конденсате для каждого из компонентов системы.

Вивчено особливості бозе-конденсації в рівноважному ідеальному газі, що складається з ферміонів двох сортів та їх зв'язаних станів — воднеподібних атомів, при наявності рівноваги між фотонами та речовиною. Показано, що основний вплив в цих умовах на явище бозе-ейнштейнівської конденсації (БЕК) вчиняє існування рівнів, пов'язаних із надтонким розщепленням основного стану воднеподібного атома. Базуючись на урахуванні ефектів, обумовлених додатковим розщепленням рівнів надтонкої структури основного стану в зовнішньому однорідному сталому магнітному полі (ефекти Зеемана, Пашена — Бака), знайдено залежності критичної температури та густини конденсату від напруженості магнітного поля. Виявлено, що в умовах повної статистичної рівноваги в системі конденсат утворюється тільки атомами, які знаходяться у стані з найменшою енергією. Показано, що у випадку відсутності рівноваги між випроміненням і речовиною систему в області наднизьких температур і малих густин можна розглядати як багатокомпонентний ідеальний газ воднеподібних атомів. Встановлено існування ієрархії температур індивідуального переходу кожного з компонентів до стану з БЕК. Знайдено вирази для критичних температур і густин числа частинок у конденсаті для кожного з компонентів системи.

PACS: 05.30.Jр, 03.75.Мп, 03.75.Нћ

**Ключевые слова:** бозе-эйнштейновская конденсация, равновесный идеальный газ, сверхтонкое расщепление, водородоподобные атомы.

## 1. Введение

В большинстве экспериментальных исследований, связанных с наблюдением бозе-эйнштейновской конденсации (БЭК), приходится иметь дело с разреженными газами щелочных металлов (см., например, [1,2]). Как известно, энергетический спектр атомов щелочных металлов имеет водородоподобную структуру. Естественным образом возникает вопрос о влиянии этой энергетической структуры атомов на характеристики бозе-эйнштейновской конденсации, в первую очередь, на критическую температуру.

Более того для создания условий, необходимых для наблюдения БЭК, используются магнитные, оптические или магнитооптические ловушки, а также лазерное охлаждение газов. Иными словами, атомы БЭК в условиях эксперимента находятся под воздействием внешнего электрического, магнитного или электромагнитного поля. Но, как хорошо известно, внешние поля могут существенно изменять энергетический спектр атомов (эффекты Штарка, Зеемана, Пашена – Бака). Последнее обстоятельство должно отражаться на характеристиках БЭК, в частности, на температуре перехода к фазе с БЭК. Существенное использование в экспериментах по БЭК лазеров (для достижения бозе-конденсатных температур при изучении взаимодействия света с БЭК [3]) ставит также вопрос об исследовании особенностей БЭК в газе возбужденных атомов.

Изучению некоторых аспектов отмеченных вопросов и посвящена настоящая работа.

## 2. Состояние равновесия в идеальной водородоподобной плазме при низких температурах

Водородоподобный атом принято рассматривать как связанное состояние двух противоположно заряженных фермионов: электрона и «остова». Однако энергия такой же пары фермионов может находиться и в области непрерывного спектра. Иными словами, с точки зрения квантовой механики газ водородоподобных атомов на самом деле является квазинейтральной плазмой, состоящей из свободных электронов, «остовов» и их связанных состояний – атомов. Отметим, что такое рассмотрение имеет смысл в том случае, когда водородоподобные связанные состояния могут считаться устойчивыми (не «рыхлыми») объектами, которые подчиняются статистике Бозе – Эйнштейна. Критерии такой устойчивости связаны с определенными ограничениями на параметры рассматриваемой системы многих частиц, в первую очередь – на ее температуру и плотность. Например в [4], где рассматривалась

возможность бозе-конденсации в газе водородоподобных экситонов (связанного состояния электронов и дырок), критерий «элементарности» экситона сформулирован в виде условия  $\nu a_0^3 \ll 1$ , где  $\nu$  – концентрация электронов и дырок,  $a_0$  – боровский радиус экситона. С точки зрения квантово-механического описания систем многих частиц такая устойчивость водородоподобных связанных состояний означает, что для них могут быть введены бозевские операторы рождения и уничтожения, как для элементарных объектов с сохранением, однако, информации об их внутренней структуре (см. в этой связи [4,5]). Мы будем считать в дальнейшем, что все необходимые условия элементарности связанных состояний для исследуемой нами системы справедливы.

Рассмотрим равновесную идеальную квазинейтральную плазму, состоящую из противоположно заряженных фермионов двух разных сортов и связанных состояний этих фермионов – водородоподобных атомов, подчиняющихся статистике Бозе – Эйнштейна (подразумевается, естественно, что связанные состояния могут быть образованы только двумя фермионами различных сортов). Для определенности под фермионами первого сорта будем подразумевать «остовы» атома (однократные положительные ионы), а под фермионами второго сорта – электроны. Заметим, что в случае водородной плазмы под «остовами» следует понимать протоны. Будем также предполагать, что в этой системе существует равновесие между излучением (фотонами) и веществом.

Условие квазинейтральности подразумевает, что число свободных фермионов первого сорта равно числу фермионов второго сорта:

$$\sum_{\mathbf{p}} f_1(\mathbf{p}) = \sum_{\mathbf{p}} f_2(\mathbf{p}), \quad (1)$$

где

$$f_{1,2}(\mathbf{p}) = \{\exp [(\varepsilon_{1,2}(\mathbf{p}) - \mu_{1,2})/T] + 1\}^{-1}$$

– функции распределения фермионов первого и второго сортов, в которых  $T$  – температура газа в энергетических единицах,  $\varepsilon_1(\mathbf{p}) = \mathbf{p}^2/2m_1$ ,  $\varepsilon_2(\mathbf{p}) = \mathbf{p}^2/2m_2$  – кинетические энергии,  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  – химические потенциалы свободных фермионов первого и второго сорта соответственно. С учетом того обстоятельства, что связанные состояния образуются только двумя фермионами различных сортов, из условия квазинейтральности следует, что и общее в системе число фермионов первого сорта  $N_1$  (с учетом тех фермионов, которые вошли в состав связанных состояний) равно общему числу фермионов второго сорта  $N_2$ :

$$N_1 = N_2 = N ,$$

причем

$$N = \sum_{\mathbf{p}} f_1(\mathbf{p}) + \sum_{\mathbf{p}} \sum_{\alpha} f_{\alpha}(\mathbf{p}) , \quad (2)$$

где  $f_{\alpha}(\mathbf{p})$  — функция распределения связанных состояний (атомов) — бозонов:

$$f_{\alpha}(\mathbf{p}) = \{ \exp [ (\varepsilon_{\alpha}(\mathbf{p}) - \mu_{\alpha}) / T ] - 1 \}^{-1} . \quad (3)$$

Индексом  $\alpha$  в формулах (2), (3) обозначен набор квантовых чисел, характеризующий водородоподобный атом в конкретном состоянии (например, главное квантовое число, суммарный момент, его проекции). Величина  $\varepsilon_{\alpha}(\mathbf{p})$  в (3) представляет собой энергию атома в состоянии  $\alpha$ :

$$\varepsilon_{\alpha}(\mathbf{p}) = \varepsilon_{\alpha} + \frac{\mathbf{p}^2}{2M} , \quad \varepsilon_{\alpha} < 0 , \quad (4)$$

где  $\varepsilon_{\alpha}$  — энергия конкретного уровня атома (связанного состояния) с набором квантовых чисел  $\alpha$ ,  $M = (m_1 + m_2)$  — масса атома.

Относительно химического потенциала  $\mu_{\alpha}$  бозонов с квантовыми числами  $\alpha$  в формуле (3) необходимо отметить следующее. Рассмотрим состояния  $\alpha$  и  $\alpha'$ , отличающиеся однофотонным переходом. Поскольку система подразумевается равновесной (включая ее фотонную компоненту), химические потенциалы  $\mu_{\alpha}$  и  $\mu_{\alpha'}$  должны отличаться на химический потенциал фотона  $\mu_{\text{ph}}$  (правило фаз Гиббса):

$$\mu_{\alpha'} = \mu_{\alpha} + \mu_{\text{ph}} . \quad (5)$$

Но химический потенциал фотонов равен нулю. Таким образом, мы приходим к выводу, что для газа возбужденных атомов, находящегося в состоянии равновесия, химические потенциалы атомов во всех состояниях, характеризующихся различными наборами квантовых чисел  $\alpha$ , равны между собой:

$$\mu_{\alpha} = \mu_0 , \quad \forall \alpha . \quad (6)$$

Следует также отметить, что подобные рассуждения справедливы и для различного рода каскадных переходов. В связи с изложенным выше условие ионизационного равновесия водородоподобной плазмы может быть записано в виде

$$\mu_1 + \mu_2 = \mu_0 . \quad (7)$$

Таким образом, принимая во внимание выражения (1)–(7), приходим к следующей системе уравнений, описывающей состояние статистического равновесия идеальной водородоподобной плазмы:

$$\begin{aligned} \mu_1 + \mu_2 &= \mu_0 , \\ \sum_{\mathbf{p}} \{ \exp ( (\varepsilon_1(\mathbf{p}) - \mu_1) / T ) + 1 \}^{-1} &= \\ &= \sum_{\mathbf{p}} \{ \exp ( (\varepsilon_2(\mathbf{p}) - \mu_2) / T ) + 1 \}^{-1} , \\ N &= \sum_{\mathbf{p}} \{ \exp ( (\varepsilon_1(\mathbf{p}) - \mu_1) / T ) + 1 \}^{-1} + \\ &+ \sum_{\alpha} \sum_{\mathbf{p}} \{ \exp ( (\varepsilon_{\alpha}(\mathbf{p}) - \mu_0) / T ) - 1 \}^{-1} . \end{aligned} \quad (8)$$

Отметим, что сумма по набору квантовых чисел  $\alpha$  в выражениях (2), (8) в случае водородоподобных атомов расходится (см. в этой связи, например, [6]). Это связано с бесконечным числом уровней водородоподобного спектра. В рассматриваемых нами задачах атом не является полностью изолированным, поэтому можно считать, что связанные электроны движутся в экранированном кулоновском поле. Можно показать, что в экранированном кулоновском поле имеется конечное число энергетических уровней [6]. Однако уравнение Шредингера в общем случае для экранированного кулоновского потенциала не допускает аналитического решения. В связи с этим большинство процедур, устраняющих упомянутые расходимости, в той или иной мере основываются на введении в статистическую сумму весовых множителей, обрезающих вклад верхних энергетических уровней. В некоторых задачах процедура обрезания связана с рассмотрением расходящейся статистической суммы как асимптотического ряда. К этому вопросу мы еще вернемся ниже. Пока же будем считать, что при учете даже слабой экранировки статистическая сумма, входящая в выражения (2), (8), остается конечной.

Вернемся теперь к уравнениям (8). В общем случае эта система трансцендентных уравнений может быть решена только численно. Однако в ряде случаев она может допускать и приближенные аналитические решения. Например, в области температур

$$T_c \ll T \ll |\varepsilon_0| \quad (9)$$

компоненты системы можно считать невырожденными (см., например, [7]) и решения уравнений (8), как легко убедиться, имеют вид

$$\mu_0 = \varepsilon_0 + \frac{T \ln v [2\pi\hbar^2 / MT]^{3/2}}{\sum_{\alpha} \exp ( (\varepsilon_0 - \varepsilon_{\alpha}) / T )} , \quad (10)$$

$$\mu_1 = \frac{1}{2} (\mu_0 + T \ln \delta) , \quad \mu_2 = \frac{1}{2} (\mu_0 - T \ln \delta) ,$$

где  $v = N/V$  — плотность общего числа фермионов какого-либо сорта,

$$\delta = \frac{g_2}{g_1} \left( \frac{m_2}{m_1} \right)^{3/2}, \quad g_{1,2} = (2\sigma_{1,2} + 1),$$

$\sigma_{1,2}$  — спин фермиона 1,2 сорта.

Отметим, что температура  $T_c$  в соотношении (9) в случае, когда идеальный газ состоит только из атомов в основном состоянии с плотностью частиц  $\nu$ , представляет собой критическую температуру образования новой фазы — бозе-эйнштейновского конденсата, определяемой следующим выражением (см. в этой связи, например, [8]):

$$T_c = (2M)^{-1} \left( \frac{4\pi^2 \hbar^3 \nu}{g\Gamma(3/2)\zeta(3/2)} \right)^{2/3}. \quad (11)$$

Здесь  $g$  — кратность вырождения уровня основного состояния атомов,  $\Gamma(x)$  — гамма функция,  $\zeta(x)$  — дзета-функция Римана.

Используя уравнения (8), (10), получим следующие выражения для плотностей свободных фермионов  $\nu_1, \nu_2$  и их связанных состояний  $\nu_\alpha$ :

$$\begin{aligned} \nu_1(T, \nu) = \nu_2(T, \nu) &= \sqrt{g_1 g_2} \nu \left( \frac{m_1 m_2 T}{2\pi \hbar^2 M} \right)^{3/4} \times \\ &\times \exp(\varepsilon_0/2T) \left( \sum_{\alpha} \exp((\varepsilon_0 - \varepsilon_{\alpha})/T) \right)^{-1/2}, \\ \nu_{\alpha}(T, \nu) &= \exp((\varepsilon_0 - \varepsilon_{\alpha})/T) \times \\ &\times \left( \sum_{\alpha'} \exp((\varepsilon_0 - \varepsilon_{\alpha'})/T) \right)^{-1} \{ \nu - \nu_1(T, \nu) \}. \end{aligned} \quad (12)$$

Легко видеть, что в интервале температур, определяемом неравенством (9), число свободных фермионов экспоненциально мало по сравнению с числом атомов. Поэтому можно ожидать, что при дальнейшем понижении температуры, т.е. при  $T \gtrsim T_c$  доля свободных фермионов будет понижаться. Однако при таких температурах могут нарушаться условия невырожденности компонентов водородоподобной плазмы, что существенно использовалось при получении решений (10). Более того в области таких температур можно ожидать появления БЭК. Следовательно, необходимо вернуться к исходным уравнениям (8) и учесть в дальнейшем возможность бозе-эйнштейновской конденсации атомов в исследуемой системе.

Рассмотрим сумму по набору квантовых чисел  $\alpha$  в правой части последнего из уравнений (8). Если распределить слагаемые этой суммы в порядке возрастания энергий  $\varepsilon_{\alpha}$ , то первым слагаемым в сумме будет слагаемое с наименьшей энергией  $\varepsilon_0$  (энергия основного состояния атома). В связи с тем, что плотность атомов не может быть отрицательной ве-

личной, химический потенциал  $\mu_0$  должен удовлетворять при любых температурах соотношению

$$\mu_0 \leq \varepsilon_0 < 0.$$

Поскольку химический потенциал  $\mu_0$  с уменьшением температуры возрастает (что можно заметить и из выражения (10)), при определенной температуре  $T_c$  он должен достигнуть значения  $\mu_0 = \varepsilon_0$ . Более того он должен иметь это же значение и при температурах  $T < T_c$ , так как химический потенциал  $\mu_0 > \varepsilon_0$  недопустим (см., например, [8]). Температуру  $T_c$ , при которой справедливо соотношение

$$\mu_0(T_c) = \varepsilon_0, \quad (13)$$

представляет собой температуру появления новой фазы в исследуемой системе бозе-эйнштейновского конденсата. Предположим сначала, что при температурах  $T \leq T_c$  фермионные компоненты исследуемой системы остаются невырожденными. Тогда первые два уравнения из (8) с учетом (13) легко могут быть разрешены, в результате чего третье из уравнений (8) приобретает вид

$$\begin{aligned} \nu &= \sqrt{g_1 g_2} \exp(\varepsilon_0/T) \left( \frac{\sqrt{m_1 m_2} T}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} + \frac{(2MT)^{3/2}}{2\pi^2 \hbar^3} \times \\ &\times \sum_{\alpha} \int_0^{\infty} dx x^2 \{ \exp(x^2 + (\varepsilon_{\alpha} - \varepsilon_0)/T) - 1 \}^{-1}. \end{aligned} \quad (14)$$

Полагая в этом уравнении  $T = T_c$ , получим уравнение для определения температуры перехода системы к состоянию с бозе-эйнштейновским конденсатом:

$$\begin{aligned} \nu &= g \frac{(2MT_c)^{3/2}}{4\pi^2 \hbar^3} \Gamma(3/2)\zeta(3/2) + \frac{(2MT_c)^{3/2}}{2\pi^2 \hbar^3} \times \\ &\times \sum_{\varepsilon_{\alpha} \neq \varepsilon_0} \int_0^{\infty} dx x^2 \{ \exp(x^2 + (\varepsilon_{\alpha} - \varepsilon_0)/T_c) - 1 \}^{-1} + \\ &+ \sqrt{g_1 g_2} \exp(\varepsilon_0/T_c) \left( \frac{\sqrt{m_1 m_2} T_c}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2}. \end{aligned} \quad (15)$$

Заметим, что в силу неравенства  $\varepsilon_0 < \varepsilon_{\alpha} < 0$ , справедливого для любых  $\varepsilon_{\alpha} \neq \varepsilon_0$ , ни одна из функций во втором слагаемом уравнения (15) не имеет особенностей при  $T \leq T_c$ . Следовательно, конденсат могут образовывать только атомы в основном состоянии. Наличие же в системе атомов в возбужденных состояниях и свободных фермионов сказывается лишь на температуре бозе-эйнштейновской конденсации.

Плотность атомов в состоянии бозе-эйнштейновской конденсации  $\nu_0(T)$  при температурах  $T < T_c$

определяется, в соответствии с (15), выражением (см. также [8])

$$\begin{aligned} v_0(T) = & \\ = v - \sqrt{g_1 g_2} \exp(\varepsilon_0/T) & \left( \frac{\sqrt{m_1 m_2 T}}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} - \frac{(2MT)^{3/2}}{2\pi^2 \hbar^3} \times \\ \times \sum_{\alpha} \int_0^{\infty} dx x^2 \{ \exp(x^2 + & (\varepsilon_{\alpha} - \varepsilon_0)/T) - 1 \}^{-1}. \quad (16) \end{aligned}$$

Из выражений (15), (16) видно, что влияние свободных фермионов (ионизационных эффектов) на бозе-эйнштейновскую конденсацию атомов экспоненциально мало. Можно было бы предположить, что в изучаемой системе при температуре  $T \lesssim T_c$  возможно вырождение одного или обоих фермионных компонентов, что могло бы сказаться на их вкладе в изучаемые явления. Однако в таких случаях уравнения равновесия (8) при условии существования в системе бозе-конденсата не имеют решения. Поэтому в дальнейших наших рассмотрениях влияние ионизационных эффектов на явление БЭК в исследуемой системе учитываться не будет.

### 3. БЭК в идеальном газе возбужденных водородоподобных атомов в условиях равновесия между излучением и веществом

Наиболее заметное влияние на температуру БЭК, как легко видеть из (15), (16), должны оказывать возбужденные атомы в состояниях, близких к основному. В связи с этим вернемся к вопросу о расходимости сумм по  $\alpha$  в выражениях (12), (14), вызванной бесконечным числом уровней энергетического спектра водородоподобных атомов. Данные уровни сгущаются с увеличением главного квантового числа  $n$ , в соответствии с формулой (см., например, [9]):

$$\varepsilon_{nl} = - \frac{R\hbar}{(n - \delta_l)^2}, \quad (17)$$

где  $l$  — орбитальное квантовое число,  $R$  — постоянная Ридберга,  $\delta_l$  — поправка Ридберга. Как уже упоминалось в разд. 2, этой расходимости можно избежать введением процедуры обрезания, основанной на кулоновской экранировке.

Однако в области низких температур процедуры обрезания статистической суммы, изложенные в [6], вызывают сомнения относительно их применимости или, по крайней мере, практической ценности. В самом деле, эксперименты по исследованию

бозе-эйнштейновской конденсации в парах Rb, Na проводятся при температурах  $T \sim 10^{-7}$  К и плотностях частиц в системе  $v \sim 10^{14}$  см<sup>-3</sup>. В этом случае процедуры обрезания, упомянутые выше, дают значение главного квантового числа  $n \sim 10^3 - 10^4$  (отметим, что даже в космосе к настоящему времени обнаружены атомы водорода только с главным квантовым числом  $n \sim 800$ ). Видно, что, по крайней мере, практическая ценность таких процедур обрезания в области низких температур сомнительна.

Заметим, однако, что с ростом главного квантового числа  $n$  разность  $(\varepsilon_{\alpha} - \varepsilon_0)$  в соответствии с формулой (17) стремится к  $-\varepsilon_0$ :

$$(\varepsilon_{\alpha} - \varepsilon_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\varepsilon_0.$$

С учетом этого обстоятельства будем рассматривать ряды по  $\alpha$  в выражениях (12), (14) как асимптотические по  $\exp(\varepsilon_0/T)$ ,  $T \ll |\varepsilon_0|$ . В соответствии с этим ограничимся учетом только уровней расщепленного основного состояния атома. С целью разъяснения особой роли этих уровней для решаемой задачи рассмотрим подробнее их структуру.

Так как в основном состоянии водородоподобного атома орбитальное квантовое число равняется нулю, то за счет спин-орбитального взаимодействия основной уровень не расщепляется. Данный уровень расщепляется за счет взаимодействия спинов электрона и «остова». Интервал  $\Delta\varepsilon_{sp}$  между двумя расщепленными уровнями основного состояния определяются выражением (см., например, [10])

$$\Delta\varepsilon_{sp} = aS^+, \quad a \ll |\varepsilon_0|, \quad (18)$$

где  $S^+ = (\sigma_1 + 1/2)$  — полный спин атома в верхнем состоянии сверхтонкой структуры,  $a$  — постоянная сверхтонкого взаимодействия,  $\varepsilon_0$  — энергия нерасщепленного уровня основного состояния. Например, для <sup>23</sup>Na  $a = 5,5 \cdot 10^{-5}$  эВ, для <sup>87</sup>Rb  $a = 2,1 \cdot 10^{-4}$  эВ, для <sup>85</sup>Rb  $a = 7,1 \cdot 10^{-5}$  эВ (газы из атомов этих металлов наиболее часто используются в экспериментах по БЭК).

В однородном магнитном поле у водородоподобных атомов происходит дополнительное расщепление уровней, связанное со снятием вырождения по проекции полного момента атома. В этом случае каждый из двух уровней сверхтонкого расщепления основного состояния расщепляется на дополнительные уровни, число которых определяется количеством проекций  $S_z$  суммарного спина атома на направление магнитного поля. Выражение для уровней энергии в данном случае имеет следующий вид (см., например, [10]):

$$\varepsilon_{S, S_z}(H) = \varepsilon_0 + \begin{cases} \frac{1}{2}a\sigma_1 - \frac{S_z}{S}(\sigma_1\mu_1 + \sigma_2\mu_2)H, & S = S^+, S_z = -S, S; \\ -\frac{1}{4}a - \mu_1HS_z + \frac{1}{2}\sqrt{a^2S^2 + (\mu_1 - \mu_2)^2H^2 + 2aS_z(\mu_1 - \mu_2)H}, \\ S = S^+, S_z = -(S-1), \dots, (S-1); \\ -\frac{1}{4}a - \mu_1HS_z - \frac{1}{2}\sqrt{a^2(S+1)^2 + (\mu_1 - \mu_2)^2H^2 + 2aS_z(\mu_1 - \mu_2)H}, \\ S = S^-, S_z = -S, \dots, S, \end{cases} \quad (19)$$

где  $\varepsilon_0$  — энергия основного состояния водородоподобного атома без учета расщепления (см. (17)),  $\sigma_1, \mu_1$  — спин и магнитный момент «остова»,  $\sigma_2, \mu_2$  — спин и магнитный момент электрона ( $\sigma_1$  считается заданным,  $\sigma_2 = 1/2, \mu_2 = -\mu_B, \mu_B$  — магнетон Бора),  $S_z$  — проекция спина атома на направление магнитного поля  $H$ , индекс «+» соответствует верхним состояниям, «-» — нижним состояниям сверхтонкой структуры ( $S^- = S^+ - 1, S^+ = \sigma_1 + \sigma_2$ ).

Для атомов щелочных металлов, таких как  $^{23}\text{Na}, ^{87}\text{Rb}$ , с которыми наиболее часто имеют дело в экспериментах по бозе-конденсации (см. [1–3]), спин «остова» равен  $3/2$ . В этом случае, согласно (19), имеется восемь уровней расщепленного основного состояния атома. Зависимость энергии от напряженности магнитного поля для каждого уровня расщепления основного состояния таких атомов приведена на рис 1. Напомним, что величина напряженности магнитного поля в (19) ограничена сверху требованием, что интервалы энергий между расщепленными уровнями мультиплетов должны быть зна-

чительно меньше энергетических интервалов между мультиплетами с различными значениями главного квантового числа. Следует отметить, что формула (19) пригодна также для описания уровней основного состояния атомов со спином «остова» не равным  $3/2$ , таких как  $^1\text{H} (\sigma_1 = 1/2), ^{85}\text{Rb}, ^{133}\text{Cs} (\sigma_1 = 5/2)$  и т.д.

Видно (см. формулу (19) и рис. 1), что в области слабых ( $(\mu_1 - \mu_2)H \ll a$ ) и сильных ( $(\mu_1 - \mu_2)H \gg a$ ) магнитных полей энергия основного состояния  $\varepsilon_{S, S_z}(H)$  пропорциональна напряженности магнитного поля  $H$ , т.е. наблюдаются эффекты Зеемана и Пашена–Бака. Отметим также, что в области промежуточных полей ( $(\mu_1 - \mu_2)H \sim a$ ) между определенными уровнями различных мультиплетов, связанных с различными значениями суммарного спина атома, возможно сближение, что также должно отражаться на зависимости температуры БЭК от напряженности магнитного поля.

Вернемся теперь к уравнению (15), определяющему температуру перехода к состоянию с бозе-эйнштейновским конденсатом. В соответствии с (13), (19) в качестве уровня с энергией  $\varepsilon_0$  следует взять уровень расщепления  $\varepsilon_{S, S_z}(H)$  с наименьшей энергией  $\varepsilon_0(H)$  (данным уровнем, как легко убедиться, будет являться уровень с квантовыми числами  $S = S^-, S_z = S$ ). По условию существования мультиплетов, связанных с тонким или сверхтонким расщеплением уровней, расстояние между любыми уровнями мультиплетов с различными главными квантовыми числами  $n$  должны быть намного больше расстояний между уровнями одного мультиплет (см. (19)). С учетом этого обстоятельства и принимая во внимание, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\varepsilon_0 - \varepsilon_\alpha) = \varepsilon_0$$

(см. (17)), в асимптотическом ряде по  $\alpha$  в уравнении (15) ограничимся слагаемыми, связанными со сверхтонким расщеплением основного уровня водородоподобного атома. В результате придем к следующему уравнению:

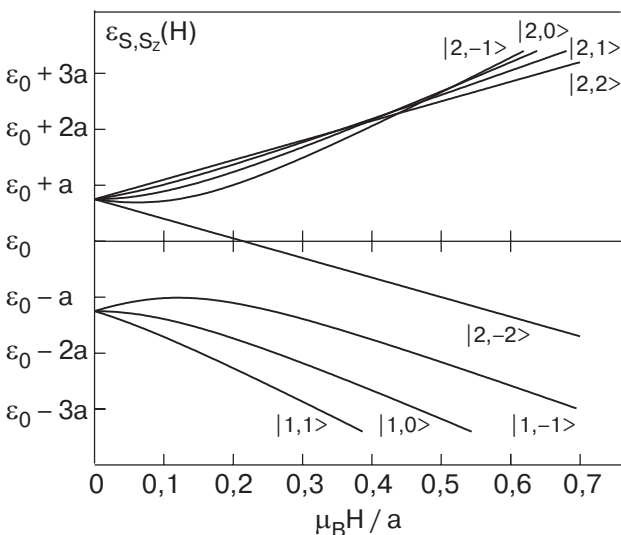


Рис. 1. Зависимость энергии основного состояния атомов щелочных металлов со спином остова  $3/2$  от напряженности магнитного поля. Первое число в обозначении уровней соответствует полному спину атома  $S$ , второе — проекции полного спина  $S_z$  на направление магнитного поля  $H$ .

$$v = \frac{(2MT_c)^{3/2}}{2\pi^2\hbar^3} \times \sum_{\alpha=0}^{\infty} \int dx x^2 \{ \exp(x^2 + \Delta\varepsilon_{\alpha}(H)/T_c) - 1 \}^{-1}, \quad (20)$$

где  $\Delta\varepsilon_{\alpha}(H) \equiv \varepsilon_{S, S_z}(H) - \varepsilon_0(H)$ , а суммирование по  $\alpha$  уже соответствует суммированию по квантовым числам  $S$  и  $S_z$ , характеризующим уровни сверхтонкого расщепления атома.

Если температура перехода к состоянию системы с бозе-конденсатом порядка поправок  $\Delta\varepsilon_{\alpha}(H)$ , связанным со сверхтонким расщеплением,  $T_c \sim \Delta\varepsilon_{\alpha}(H)$ , то получившееся в результате уравнение для определения температуры БЭК по-прежнему представляет собой сложное трансцендентное уравнение. С учетом конечного числа уровней расщепленного основного состояния атома такое уравнение можно решать численными методами.

Однако с точки зрения нынешних экспериментов по изучению БЭК, условие  $T_c \sim \Delta\varepsilon_{sp}$  ( $\Delta\varepsilon_{sp}$  — интервал сверхтонкой структуры, определяемый выражением (18)) недостижимо. Более того в условиях малой плотности числа атомов ( $v \lesssim 10^{15} \text{ см}^{-3}$ ) справедливо неравенство

$$\Delta\varepsilon_{sp} \gg T_c.$$

Учитывая это обстоятельство, найдем аналитическое выражение для температуры БЭК  $T_c(0)$  в случае отсутствия внешних магнитных полей. В первом приближении по  $\exp(-\Delta\varepsilon_{sp}/T_c(0)) \ll 1$  из (20) получим следующее выражение для критической температуры (ср. с (11)):

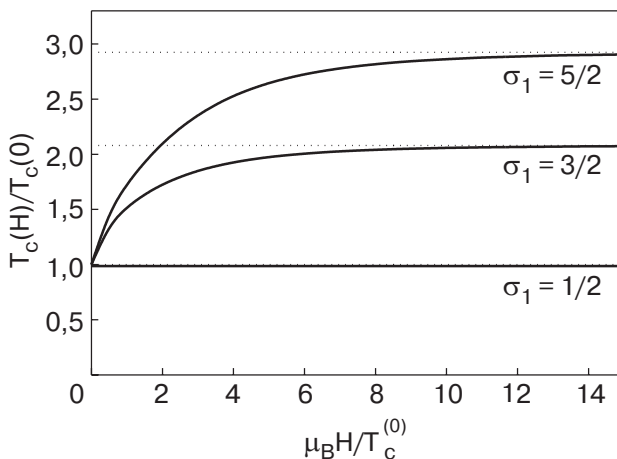


Рис. 2. Зависимость температуры БЭК от напряженности магнитного поля для атомов с различными спинами остова  $\sigma_1$ .  $T_c^{(0)}$  — температура образования БЭК в отсутствие внешних полей (см. (21)).

$$T_c(0) = T_c^{(0)} + \delta T_c(0),$$

$$T_c^{(0)} = (2M)^{-1} \left( \frac{4\pi^2\hbar^3 v}{(2S^- + 1)\Gamma(3/2)\zeta(3/2)} \right)^{2/3},$$

$$\delta T_c(0) = -\frac{2}{3}(2S^+ + 1)T_c^{(0)} \exp(-\Delta\varepsilon_{sp}/T_c^{(0)}). \quad (21)$$

Аналитическое выражение для критической температуры перехода  $T_c(H)$  в состояние БЭК может быть найдено также в случае сильных магнитных полей ( $\mu_B H \gg T_c^{(0)}$ ). В теории возмущений по  $\exp(-\Delta\varepsilon_{\alpha}(H)/T_c(H)) \ll 1$  ( $\alpha \equiv S, S_z$ ) в соответствии с формулой (20) получим в первом приближении следующую зависимость (ср. с (11), (21)):

$$T_c(H) = T_c^{(\infty)} + \delta T_c(H),$$

$$T_c^{(\infty)} = (2M)^{-1} \left( \frac{4\pi^2\hbar^3 v}{\Gamma(3/2)\zeta(3/2)} \right)^{2/3}, \quad (22)$$

$$\delta T_c(H) = -\frac{2}{3}T_c^{(\infty)} \sum_{\varepsilon_{\alpha} \neq \varepsilon_0} \exp(-\Delta\varepsilon_{\alpha}(H)/T_c^{(\infty)}).$$

Как видно из выражений (21), (22), наличие внешнего магнитного поля приводит к повышению критической температуры (см. в этой связи [11])

$$\frac{T_c(H)}{T_c(0)} \lesssim \frac{T_c^{(\infty)}}{T_c^{(0)}} = (2S^- + 1)^{2/3}.$$

Характерные зависимости температуры конденсации от напряженности магнитного поля для идеального газа водородоподобных атомов с различными значениями спина остова  $\sigma_1$  приведены на рис. 2. Эти результаты получены путем численного решения уравнения (20) при значениях плотностей числа частиц газа водородоподобных атомов, близких к экспериментальным ( $v \sim 10^{15} \text{ см}^{-3}$ ). На рисунке также видно, что зависимость температуры перехода от напряженности магнитного поля усиливается с увеличением спина остова водородоподобных атомов.

#### 4. БЭК в идеальном газе водородоподобных атомов в отсутствие равновесия между излучением и веществом

Изложенная выше картина БЭК относится к случаю, когда излучение (фотоны) находятся в равновесии с веществом. Иной сценарий БЭК в газе водородоподобных атомов должен наблюдаться в случае, когда такое равновесие не поддерживается, и фотоны, излученные при дипольных переходах между состояниями с различными наборами квантовых чисел  $\alpha$ , покидают систему. Последняя ситуа-

ция, по-видимому, должна реализовываться в условиях нынешних экспериментов по изучению БЭК. Из-за отсутствия равновесия между средой и излучением заселенность возбужденных уровней атомов в отсутствие внешних полей может обеспечиваться только столкновениями между частицами. Время жизни конкретного возбужденного уровня  $\tau_\alpha$  определяется формулой:

$$\tau_\alpha \sim \frac{\hbar}{\Gamma_\alpha}, \quad (23)$$

где  $\Gamma_\alpha$  — ширина этого уровня. Отметим, что при сверхнизких температурах из-за пренебрежимо малого теплового размытия уровня под величиной  $\Gamma_\alpha$  в выражении (23) следует понимать так называемую естественную ширину уровня (см., например, [12]).

Столкновениями же частиц обусловлены и релаксационные процессы, приводящие к установлению в системе статистического равновесия. Время релаксации  $\tau_r$  в рассматриваемом случае определяется столкновениями между атомами и может быть оценено выражением

$$\tau_r^{-1} \sim v\sigma\sqrt{T/M}, \quad (24)$$

где  $\sigma$  — сечение рассеяния атома на атоме.

Для того, чтобы в исследуемой системе могло установиться равновесие между излучением и веществом, необходимо, по крайней мере, чтобы выполнялось условие\*

$$\tau_r \lesssim \tau_\alpha.$$

Данное соотношение накладывает определенные ограничения на температуру и плотность числа частиц в системе. Например, для паров щелочных металлов, таких как  $^{23}\text{Na}$ ,  $^{87}\text{Rb}$ ,  $^{133}\text{Cs}$  с плотностями числа частиц  $10^{19}$ – $10^{21}$  см $^{-3}$  данное соотношение удовлетворяется в интервале температур 10–0,01 К.

Простые оценки показывают, однако, что в области сверхнизких температур и малых плотностей числа частиц время установления в системе статистического равновесия  $\tau_r$  много больше времени жизни всех уровней водородоподобного атома, кроме уровней сверхтонкого расщепления основного состояния. Данные уровни являются долгоживущими, так как дипольные переходы между ними запрещены. Например, переход между верхним и нижним уровнем сверхтонкой структуры атома водорода должен сопровождаться излучением «знаменитой» линии с длиной волны 21 см. По оценкам,

приведенным в [13], время жизни верхнего возбужденного уровня сверхтонкой структуры атома водорода порядка 11 млн лет, что соответствует естественной ширине этого уровня  $\Gamma$  (см. (18)) порядка  $10^{-29}$  эВ. Для сравнения отметим, что обычная продолжительность жизни возбужденного состояния у атомов, излучающих оптические линии, порядка стомиллионной доли секунды. Таким образом, можно сделать вывод, что в области сверхнизких температур и малых плотностей числа частиц время релаксации системы значительно меньше времени жизни возбужденных уровней сверхтонкой структуры водородоподобного атома.

С учетом отмеченного выше, при сверхнизких температурах и малых плотностях можно пренебречь возможностью спонтанного перехода атомов за время наблюдения в другие возбужденные состояния. В связи с этим можно не учитывать и процессы переизлучения и перепоглощения фотонов. По этой причине такую систему можно рассматривать как многокомпонентный идеальный газ, находящийся в термодинамическом равновесии. Число компонентов данного газа определяется числом заселенных уровней сверхтонкого расщепления основного состояния (включая и расщепление за счет внешнего магнитного поля, если таковое присутствует).

Состояние каждого из компонентов этого газа характеризуется набором квантовых чисел  $\alpha$  ( $\alpha \equiv (S, S_z)$ , см. (19)). Плотности компонент  $v_\alpha$  в соответствии с (2)–(4) определяются следующим выражением:

$$v_\alpha = \frac{(2MT)^{3/2}}{2\pi^2\hbar^3} \int_0^\infty dx x^2 \{ \exp(x^2 + (\varepsilon_\alpha - \mu_\alpha)/T) - 1 \}^{-1}. \quad (25)$$

Значения величин  $v_\alpha$  в рамках данной задачи не могут быть найдены. Они должны определяться при решении уравнений эволюции, связанных с установлением в системе статистического равновесия. Подчеркнем, что в формуле (25) химические потенциалы  $\mu_\alpha$  уже не связаны выражениями (5), (6). Поэтому переход к состоянию с БЭК каждой из подсистем, характеризующейся конкретным набором квантовых чисел  $\alpha$ , происходит независимо. Условия возникновения бозе-конденсата в каждой из подсистем (25) определяются равенством

$$\mu_\alpha(T_{ca}) = \varepsilon_\alpha,$$

\* Заметим, что теоретически равновесие между излучением и веществом может быть достигнуто размещением исследуемой системы в полости абсолютно черного тела или установкой специальных зеркал.



где индексом  $\alpha$  обозначен весь набор квантовых чисел мультиплета, образованного уровнями расщепленного основного состояния атома. Следуя обычной методике (см., например, [8]), легко найти выражения для температур перехода:

$$T_{c\alpha} = (2M)^{-1} \left( \frac{4\pi^2 \hbar^3 v_\alpha}{\Gamma(3/2)\zeta(3/2)} \right)^{2/3}, \quad (26)$$

и для плотностей частиц в конденсате при температурах ниже температуры перехода:

$$v_{c\alpha}(T) = v_\alpha \{1 - (T/T_{c\alpha})^{3/2}\}, \quad T < T_{c\alpha}. \quad (27)$$

Видно, что в зависимости от температуры в системе возможно образование конденсата как атомами одной подсистемы, так и атомами нескольких (или всех) подсистем. Проиллюстрируем это на примере, когда идеальный газ состоит всего из двух компонентов, т.е. в результате установления термодинамического равновесия в такой системе оказались заселенными всего два уровня из мультиплета (19) с квантовыми числами  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . Тогда, если критические температуры  $T_{c\alpha_1}$  и  $T_{c\alpha_2}$  связаны соотношением  $T_{c\alpha_1} > T_{c\alpha_2}$ , то при температуре системы  $T_{c\alpha_2} < T < T_{c\alpha_1}$  конденсат образуется только атомами с квантовыми числами  $\alpha_1$ . Если же справедливо неравенство  $T < T_{c\alpha_2} < T_{c\alpha_1}$ , то конденсат образуется атомами обеих подсистем. Отметим, что сосуществование бозе-конденсатов, образованных атомами в двух квантовых состояниях, относящихся к двум различным уровням сверхтонкого расщепления основного состояния атомов щелочных металлов, наблюдалось экспериментально (см., например, [1]).

Заметим также, что в отсутствие в системе равновесия между излучением (фотонами) и веществом температуры перехода  $T_{c\alpha}$  и плотности частиц в конденсате  $v_{c\alpha}$  не зависят от внешнего магнитного поля явно. Влияние внешнего магнитного поля сказывается на установлении иерархии критических температур.

## 5. Заключение

Таким образом, нами изучен вопрос влияния энергетического спектра атома на бозе-эйнштейновскую конденсацию атомов в идеальной равновесной квазинейтральной водородоподобной плазме как в отсутствие, так и в присутствии внешнего постоянного однородного магнитного поля. Рассмотрен случай, когда излучение (фотоны) находится в равновесии с веществом в такой системе. Показано, что в области бозе-конденсатных температур при малой плотности числа частиц основное влияние на температуру перехода системы к состоянию с бозе-кон-

денсатом оказывает существование уровней, связанных со сверхтонким расщеплением основного состояния водородоподобного атома. На основе учета эффектов, связанных с расщеплением сверхтонкой структуры основного состояния атома во внешнем однородном постоянном магнитном поле (эффекты Зеемана, Пашена–Бака), найдена зависимость критической температуры от напряженности магнитного поля. Показано, что при условии установившегося в системе полного статистического равновесия конденсат образуют только атомы в основном состоянии. Здесь уже в качестве основного уровня следует рассматривать уровень сверхтонкого расщепления основного состояния с наименьшей энергией. Существование же в системе атомов с заселенными остальными уровнями расщепленного основного состояния (в том числе и за счет внешнего магнитного поля) отражается только на  $T_c$  — температуре перехода к состоянию с БЭК.

Показано, что в случае отсутствия равновесия между излучением и веществом систему можно рассматривать как многокомпонентный идеальный газ. Каждый компонент такого газа состоит из водородоподобных атомов с одинаковым набором квантовых чисел, связанных с конкретным уровнем сверхтонкого расщепления основного состояния. Установлено существование иерархии температур индивидуального перехода каждого из компонентов системы к состоянию с БЭК. Найдены выражения для критических температур и плотностей числа частиц в конденсате для каждого компонента системы.

Показана возможность сосуществования бозе-конденсатов, образованных атомами в различных квантовых состояниях, которые относятся к разным уровням сверхтонкого расщепления основного состояния атомов щелочных металлов.

1. C.J. Myatt, E.A. Burt, R.W. Ghrist, E.A. Cornell, and C.E. Wieman, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 586 (1997).
2. D. Durfree and W. Ketterle, *Opt. Express* **2**, 299 (1998).
3. L.V. Hau, S.E. Harris, Z. Dutton and C.H. Behroozi, *Nature* **397**, 594 (1999).
4. Л.В. Келдыш, А.Н. Козлов, *ЖЭТФ* **54**, 978 (1968).
5. S.V. Peletminskii and Yu.V. Slyusarenko, *J. Math. Phys.* **46**, 022301 (2005)
6. W. Ebeling, W.D. Kraeft, and D. Kremp, *Theory of Bound States and Ionisation Equilibrium in Plasmas and Solids*, Akademie-Verlag, Berlin (1976).
7. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Статистическая физика*, Наука, Москва (1976).
8. А.И. Ахиезер, С.В. Пелетминский, *Методы статистической физики*, Наука, Москва (1977).
9. А.А. Соколов, Ю.М. Лоскутов, И.М. Тернов, *Квантовая механика*, Наука, Москва (1962).

10. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Квантовая механика*, Наука, Москва (1974).
11. А.И. Ахиезер, С.В. Пелетминский, Ю.В. Слюсаренко, *ЖЭТФ* **113**, 918 (1998).
12. А.С. Давыдов, *Квантовая механика*, ГИФМЛ, Москва (1963).
13. С.А. Каплан, С.Б. Пикельнер, *Физика межзвездной среды*, Наука, Москва (1979).

On the influence of internal atomic structure on Bose–Einstein condensation in an ideal gas of hydrogen-like atoms

Yu.V. Slyusarenko and A.G. Sotnikov

The Bose condensation features of an equilibrium ideal gas consisting of two kinds of charged fermions and their bound states – hydrogen-like atoms with equilibrium between photons and a matter – are studied. It is shown that in these conditions the existence of levels, associated with the ultrafine splitting of the ground state of hydrogen-like atoms, influences the Bose–Ein-

stein condensation (BEC) phenomenon most of all. Taking into account the effects, caused by an additional splitting of the ultrafine splitted ground state levels in external uniform fixed magnetic field (Zeeman, Paschen–Bac effects), the magnetic field dependences of critical temperature and condensate density are found. It is also found that in the conditions of statistical equilibrium set in the system the condensate is formed only by atoms in the state with the lowest energy. It is shown that with no equilibrium between radiation and matter the system at ultralow temperatures and low densities can be described as a multicomponent ideal gas of hydrogen-like atoms. It is found that there exists a hierarchy of temperatures for an individual transition of each of the components to the BEC state. Equations for critical temperatures and particle number densities in the condensate for each of the system components are derived.

**Keywords:** Bose–Einstein condensation, equilibrium ideal gas, ultrafine splitting, hydrogen-like atoms.