ТЕОРІЯ ОПТИМАЛЬНИХ РІШЕНЬ

Исследованы различные условия оптимальности векторных задач дискретной оптимизации на комбинаторном допустимом множестве, которое описывается псевдовыпуклыми функциями ограничений. На основе использования информации о структуре выпуклой оболочки допустимых решений задачи сформулированы необходимые и достаточные условия оптимальности различных видов эффективных решений.

УДК 519.8

Н.В. СЕМЕНОВА

УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ВЕКТОРНЫХ ЗАДАЧАХ КОМБИНАТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ*

Введение. В настоящее время векторные задачи оптимизации широко используются как математические модели формирования и поиска вариантов решений в таких областях человеческой деятельности как экономика, промышленность, банковское дело, сельское хозяйство, медицина, техника, военное дело, социальная сфера и др. Среди теоретических и прикладных задач важное место занимают задачи дискретной оптимизации. Поэтому получение необходимых и достаточных условий оптимальности решений векторных дискретных задач является актуальной проблемой, так как знание таких условий дает основу для разработки способов проверки оптимальности выбранного решения и построения эффективных методов отыскания этих решений. На данный момент указанные условия наиболее изучены для векторных задач непрерывной оптимизации с различными принципами оптимальности [1–3].

Использование информации о структуре выпуклой оболочки допустимых решений, которая является основанием для многих многогранных методов, – один из самых успешных на сегодняшний день подходов к решению задач комбинаторной оптимизации. Полученную задачу с допустимой областью, являющейся выпуклой оболочкой допустимого множества решений, легко можно решить, поскольку задачи линейного программирования, как известно, – полиномиально разрешимы.

*Работа выполнена при поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований Украины (Проект Ф25.1/094).

В течение последних двух десятилетий наблюдался замечательный прогресс в разработке математических методов, основанных на многогранном описании комбинаторных задач [4, 5]. Основная идея многогранных методов – получение хороших линейных формулировок допустимого множества решений путем представления его системой линейных неравенств, которые используются при описании выпуклой оболочки допустимых решений. В общем случае эта цель труднодостижима, что, например, не позволяет перенести свойство полиномиальной разрешимости с задач линейного программирования на задачи целочисленного линейного программирования. Однако важнейшей особенностью многогранников, возникающих в комбинаторной оптимизации при описании выпуклых оболочек допустимого множества решений, является то, что для них часто оказывается выполненным свойство равенства либо включения допустимого множества решений во множество вершин многогранника, описывающего выпуклую оболочку. Таким образом, появляется возможность сведения решения исходной векторной задачи комбинаторной оптимизации к векторной задаче линейного программирования, что может быть достаточно эффективно.

Постановка задачи. Основные определения. Рассматривается векторная задача дискретной оптимизации следующего вида: $Z(F,X):\max\left\{F(x)\,|\,x\in X\right\}$, где $F(x)=(f_1(x),...,f_l(x))$ – векторный критерий; $f_i:R^n\to R^1$, $i\in N_l=\left\{1,...,l\right\}$, X – непустое множество в R^n, $X=D\bigcap \operatorname{vert}\varPi$, $D=\left\{x\in R^n\,|\,g_i(x)\le 0, i\in N_m\right\}$, $g_i:R^n\to R^1, i\in N_m$, $\varPi$ – выпуклый многогранник в R^n, вершинами которого являются элементы некоторых комбинаторных множеств, например множества перестановок $P_{nk}(A)$, G – множество в R^n вида $G=D\bigcap \varPi$.

Для описания допустимой области задачи $Z(F,X)$ используются понятия мультимножества, n-выборки и евклидова комбинаторного множества [5, 6].

Мультимножество $A=\left\{a_1,...,a_q\right\}$ задается основанием $S(A)=\left\{e_1,...,e_k\right\}$ и кратностью $r_j, j\in N_k$, его элементов. Здесь $e_j\in R\ \forall j\in N_k$, $r_1+...+r_k=q$. Элементы мультимножества A упорядочим по неубыванию: $a_j\le a_{j+1}\ \forall j\in N_{q-1}$, а элементы его основания – по возрастанию: $e_j<e_{j+1}\ \forall j\in N_{k-1}$.

n-выборкой из мультимножества A называется подмножество $A'=\left\{a_{i_1},\dots,a_{i_n}\right\}$ мультимножества A, содержащее n элементов, где $a_{i_j}\in A'$ $\forall i_j\in N_n$, $\forall j\in N_n$, $i_s\ne i_t$, если $s\ne t\ \forall s\in N_n$, $\forall t\in N_n$.

Рассмотрим элементы некоторого комбинаторного множества, например перестановок с повторениями как точки арифметического евклидова пространства R^n. Пусть $a=\left(a_{i_1},\ \ldots,a_{i_n}\right)\in P(A)$ – элемент евклидова комбинаторного множества $P(A)$. Отображение $\varphi: P(A)\to P_\varphi(A)\subset R^n$ называется погружением $P(A)$ в арифметическое евклидово пространство, если φ задает взаимно однозначное соответствие $P_\varphi(A)\subset R^n: \forall\ x=(x_1\ldots,x_n)\in P_\varphi(A)\ \ x_j=a_{i_j}\ \ \forall j\in N_n$.

В монографиях [4, 5] показано, что выпуклой оболочкой множества перестановок является перестановочный многогранник $\Pi_{nk}(A)=\operatorname{conv}P_{nk}(A)=$
$=\left\{x\in R^n \mid \sum\limits_{j=1}^{n} x_j\le\sum\limits_{j=1}^{n} a_j, \sum\limits_{j=1}^{i} x_{\alpha_j}\ge\sum\limits_{j=1}^{i} a_j\right\}$, $\alpha_j\in N_n, \alpha_j\ne\alpha_t, \forall j\ne t, \forall j,t\in N_i, \forall i\in N_n$,

обозначаемый в дальнейшем $\Pi=\left\{\pi_i y\le\gamma_i \mid i\in N_q\right\}$, множество вершин которого равно множеству $P_{nk}(A)$ перестановок: $\operatorname{vert}\Pi=P_{nk}(A)$.

Под решением задачи $Z(F, X)$ обычно понимают нахождение элементов следующих множеств: $P(F, X)$ – Парето-оптимальных либо эффективных решений, $Sl(F, X)$ – оптимальных по Слейтеру (слабо эффективных) решений, $Sm(F, X)$ – оптимальных по Смейлу (строго эффективных) решений. Согласно [1 – 3] для любого $x\in X$ истинны утверждения

$$x\in Sl\left(F,X\right)\Leftrightarrow\left\{y\in X \mid F\left(y\right)>F\left(x\right)\right\}=\varnothing, \tag{1}$$

$$x\in P\left(F,X\right)\Leftrightarrow\left\{y\in X \mid F\left(y\right)\ge F\left(x\right), F\left(y\right)\ne F\left(x\right)\right\}=\varnothing, \tag{2}$$

$$x\in Sm\left(F,X\right)\Leftrightarrow\left\{y\in X \mid y\ne x, F\left(y\right)\ge F\left(x\right)\right\}=\varnothing. \tag{3}$$

$$Sm\left(F,X\right)\subset P\left(F,X\right)\subset Sl\left(F,X\right). \tag{4}$$

Так как допустимая область X – конечна, то множество $P\left(F,X\right)$ – не пусто и внешне устойчиво [1]: $\forall y\in X\ \ \exists\, x\in P(F,X): F\left(x\right)\ge F\left(y\right)$. В случае бесконечного мультимножества A этот вопрос требует отдельного исследования.

Структура и свойства множеств эффективных решений. Знание структуры и свойств множеств эффективных решений различных классов векторных задач комбинаторной оптимизации позволяет лучше понять специфику этих задач, их существенные отличия от задач с одним критерием и многокритериальных задач на непрерывном допустимом множестве.

Учитывая соотношения (4) между введенными множествами эффективных решений, а также в соответствии с [4, 5], тот факт, что множество допустимых решений X является подмножеством множества вершин перестановочного многогранника Π, приходим к справедливости цепочки включений:

$$Sm\left(F,X\right)\subset P\left(F,X\right)\subset Sl\left(F,X\right)\subset \operatorname{vert}\Pi_{nk}(A). \tag{5}$$

Вместе с задачей $Z(F,X)$ будем рассматривать ее непрерывный аналог–задачу $Z(F,G)$, заданную на допустимом множестве $G=D\cap\Pi$.

Теорема 1. $P(F,G)\bigcap \operatorname{vert}\Pi \subset P(F,X)$, $Sl(F,G)\bigcap \operatorname{vert}\Pi \subset Sl(F,X)$, $Sm(F,G)\bigcap \operatorname{vert}\Pi \subset Sm(F,X)$.

Доказательство. Поскольку справедливо включение $\operatorname{vert}\Pi \bigcap D \subset G$, то $P(F,G)\bigcap \operatorname{vert}\Pi \bigcap D \subset P(F,G\bigcap \operatorname{vert}\Pi \bigcap D) = P(F,X)$. Соотношения $Sl(F,X) = Sl(F, \operatorname{vert}\Pi\bigcap D) \supset Sl(F,G)\bigcap \operatorname{vert}\Pi \bigcap D$ и $Sm(F,X) = Sm(F, D\bigcap \operatorname{vert}\Pi) \supset Sm(F,G)\bigcap \operatorname{vert}\Pi$ доказываются аналогично.

Пусть функции $f_i(x), i\in N_l$, векторного критерия $F(x)$ – линейны, т. е. $f_i(x) = \langle c_i, x\rangle, i\in N_l$, матрица $C\in R^{n\times l}$, c_i – ее вектор строка, $i\in N_l$, конус $K = \left\{x\in R^n \,\middle|\, Cx \ge 0\right\}$. $\forall\, y\in \operatorname{vert}\Pi$ определим множества $N(y) = \left\{i\in N_q \mid \pi_i y = \gamma_i\right\}$, $\Pi(y) = \left\{\pi_i x \le \gamma_i \mid i\in N(y)\right\}$.

Важные свойства (5) допустимой области X и множеств различных видов эффективных решений, а также линейность функций векторного критерия позволяют свести решение задачи $Z(F,X)$ к решению задачи $Z(F,G)$ на непрерывном допустимом множестве G.

Теорема 2. Если допустимое множество X задачи $Z(F,X)$ не содержит дополнительных ограничений либо $\Pi \subset D$, т. е. $X = \operatorname{vert}\Pi$, то $\forall\, x\in R^n$ справедливы следующие утверждения: $x\in Sl(F,X) \Leftrightarrow x\in Sl(F,\Pi)\bigcap \operatorname{vert}\Pi$, $x\in P(F,X) \Leftrightarrow x\in P(F,\Pi)\bigcap \operatorname{vert}\Pi$, $x\in Sm(F,X) \Leftrightarrow x\in Sm(F,\Pi)\bigcap \operatorname{vert}\Pi$.

Доказательство. Из теоремы 1 и условия данной теоремы следует, что для любого $x\in R^n$ истинны высказывания: $x\in Sl(F,\Pi)\bigcap \operatorname{vert}\Pi \Rightarrow x\in Sl(F,X)$, $x\in P(F,\Pi)\bigcap \operatorname{vert}\Pi \Rightarrow x\in P(F,X)$, $x\in Sm(F,\Pi)\bigcap \operatorname{vert}\Pi \Rightarrow x\in Sm(F,X)$. Докажем обратные импликации. Пусть $x\in Sl(F,X)$, откуда, следуя (5), заключаем, что $x\in \operatorname{vert}\Pi$. Предположим, от противного, что $x\notin Sl(F,\Pi)$. Учитывая линейность функций $f_i(x), i\in N_l$, векторного критерия $F(x)$ по теореме 1 [2], выполняется условие $\operatorname{int}K \bigcap (\Pi(x) - x) \ne \varnothing$, т. е. в конусе $(x + \operatorname{int}K)$ лежат некоторые точки границы многогранника Π, следовательно существует хотя бы одна точка $x^1 \in \operatorname{vert}\Pi$, принадлежащая этому конусу. Последнее, в силу формулы (1), означает, что $x\notin Sl(F,X)$ и приводит к противоречию с условием теоремы. Остальные утверждения данной теоремы доказываются аналогично.

Если $X = \operatorname{vert}\Pi$, то для любой точки $x\in \operatorname{vert}\Pi$ задачи $Z(F,X)$ справедливы необходимые и достаточные условия оптимальности всех указанных видов эффективных решений, полученные в [2, 3]. Если допустимая область X задачи $Z(F,X)$ содержит дополнительные ограничения, описывающие выпуклое многогранное множество D, и $\Pi \not\subset D$, т. е. $X = \mathrm{vert}\,\Pi \bigcap D$, то справедливы лишь достаточные условия оптимальности.

Теорема 3. $\forall\, x \in \mathrm{vert}\,\Pi$ справедливы высказывания: $x \in P(F,\Pi) \bigcap D \Rightarrow \Rightarrow x \in P(F,X)$, $x \in Sl(F,\Pi) \bigcap D \Rightarrow x \in Sl(F,X)$, $x \in Sm(F,\Pi) \bigcap D \Rightarrow x \in Sm(F,X)$.

Доказательство. Поскольку $G = \Pi \bigcap D$, то для любого $x \in \mathrm{vert}\,\Pi$ справедливы импликации: $x \in P(F,\Pi) \bigcap D \Rightarrow x \in P(F,\Pi \bigcap D) = P(F,G) \Rightarrow x \in P(F,X)$, $x \in Sl(F,\Pi) \bigcap D \Rightarrow x \in Sl(F,X)$, $x \in Sm(F,\Pi) \bigcap D \Rightarrow x \in Sm(F,X)$.

Таким образом, соотношения (5) и теоремы 1 – 3 устанавливают взаимосвязь между задачей $Z(F,X)$ и векторной задачей $Z(F,G)$, определенной на непрерывном допустимом множестве. Это позволяет применять классические методы непрерывной оптимизации к решению векторных комбинаторных задач и на этой основе развивать новые оригинальные методы решения, используя свойства различных комбинаторных множеств и их выпуклых оболочек.

Анализируя теоремы 1 и 3, приходим к соотношениям, существующим между задачами $Z(F,X)$ и $Z(F,G)$: если $x \in R(F,G) \bigcap \mathrm{vert}\,\Pi$, то $x \in R(F,X)$, если $x \notin R(F,G) \bigcap \mathrm{vert}\,\Pi$, то из этого не следует, что $x \notin R(F,X)$, где $R(F,X)$ обозначает множество $P(F,X)$, $Sm(F,X)$ либо $Sl(F,X)$.

Если задача $Z(F,X)$ содержит дополнительные ограничения и $\Pi \not\subset D$, то предлагается следующий подход к ее решению: находим эффективные решения задачи $Z(F,\Pi)$; проверяем их на принадлежность множеству D. Если точка $x \in P(F,\Pi) \bigcap D$, то также $x \in P(F,X)$. Рассматриваем допустимые решения $x \in X$ задачи $Z(F,X)$, являющиеся неэффективными в задаче $Z(F,\Pi)$, т. е. $x \in X \setminus P(F,\Pi) \bigcap D$. Проверяем их на эффективность в задаче $Z(F,X)$.

Условия оптимальности различных видов решений.

Определение [1]. Дифференцируемая на R^n функция $f(x)$ называется псевдовыпуклой на множестве $D(f)$, если $f(y) \ge f(x)$ для любых точек x, y, удовлетворяющих условию $\langle \nabla f(x), y - x \rangle \ge 0$.

Как видно из соотношения (5), в связи со структурой допустимого множества X эффективные, слабо и строго эффективные решения могут находиться лишь в вершинах многогранника Π. Поэтому при определении необходимых и достаточных условий оптимальности разных видов решений задачи $Z(F,X)$ будем рассматривать лишь вершины выпуклого многогранника Π, принадлежащие множеству D. Анализ задачи $Z(F,X)$ будем проводить с учетом свойств конуса $K(y) = \left\{ x \in R^n \mid \langle \nabla f_i(x), x - y \rangle \ge 0, i \in N_l \right\}$, где $\nabla f_i(y)$ – градиент функции $f_i(x)$ в точке y, который назовем конусом перспективных направлений критерия $F(x)$ в точке y, замыкания конуса $Q(y)$-y возможных направлений в точке y [7], которые могут быть построены для $\forall y \in \mathrm{vert}\,\Pi$. Обозначим

$F(y)$ = { $x\in R^n$ $|F(x)\geq F(y)\}\backslash\{y\}$, int$K(y)$ = $\left\{x\in R^n \mid \left\langle \nabla f_i(x), x-y\right\rangle > 0, i\in N_l\right\}$ – внутренность конуса $K(y)$, $K_0(y)=\left\{x\in R^n \mid \left\langle \nabla f_i(x), x-y\right\rangle = 0, i\in N_l\right\}$. Очевидно, что $F(y)\subseteq y+K(y)$ $\forall y\in X$. Из последнего соотношения и формул (1) – (3), следует, что $\forall$ $y\in X$: $(y+\text{int}K(y))\cap X=\varnothing \Rightarrow y\in Sl(F,X)$, $(y+K(y)\backslash K_0(y))\cap X=\varnothing \Rightarrow x\in P(F,X)$ $(y+K(y))\cap X\backslash\{y\}=\varnothing \Rightarrow x\in Sm(F,X)$.

Пусть $y\in \text{vert}\,\Pi\bigcap D$. Определим множества: $N(y)=\{i\in N_m \mid g_i(y)=0\}$, $X(y)=\{x\in R^n \mid g_i(x)\leq 0, i\in N(y)\}$, $Q(y)=\{x\in R^n \mid \langle \nabla g_i(y), x-y\rangle \leq 0,\ i\in N(y)\}$, $Q_0^i(y)=\{x\in R^n \mid \langle \nabla g_i(y), x-y\rangle = 0\}$, $i\in N(y)$, $K_0^j(y)$ = { $x\in R^n$ $|\langle(\nabla f_j(y)$, $x-$ $-$ $y)\rangle$ $=0\}$. Очевидно, что $\forall y\in \text{vert}\,\Pi$ $N(y)\neq\varnothing$, $X\subseteq X(y)\subseteq Q(y)$, $FrK(y)\subseteq$ $\subseteq \bigcup\limits_{j\in N_\ell} K_0^j(y)$, $FrQ(y)\subseteq \bigcup\limits_{i\in N(y)} Q_0^i(y)$.

Утверждение 1. Если $\Pi\subset D$, то $\forall y\in \text{vert}\,\Pi$ справедливы высказывания: $y\in Sl(F,X) \Leftrightarrow y\in Sl(F,\Pi(y))$, $y\in P(F,X) \Leftrightarrow y\in P(F,\Pi(y))$, $y\in Sm(F,X) \Leftrightarrow y\in Sm(F,\Pi(y))$.

Теорема 4. Пусть $y\in \text{vert}\,\Pi$. Если $f_i(x)$, $i\in N(y)$ – псевдовыпуклые функции, то условия

$$\text{int}\,K(y)\cap Q(y)=\varnothing\,, \tag{6}$$

$$(K(y)\setminus K_0(y))\cap(Q(y)=\varnothing\,, \tag{7}$$

$$K(y)\cap Q(y)=\{0\} \tag{8}$$

являются достаточными для включений $y\in Sl(F,X)$, $y\in P(F,X)$, $y\in Sm(F,X)$ соответственно. Кроме того, если $\{\nabla f_i(y) \mid i\in N_\ell\}$ и $\{\nabla g_i(y) \mid i\in N(y)\}$ – системы линейно независимых векторов, то соотношение (6) является также и необходимым условием для включения $y\in Sl(F,G)$.

Доказательство. Достаточность условий теоремы становится очевидной, учитывая включения $X\subseteq Q(y)$, $F(y)\subseteq K(y)$, а также формулы (1) – (3).

Необходимость. Пусть $y\in Sl(F,G)$, в соответствии с соотношением (1)

$$F(y)\bigcap G=\varnothing\,. \tag{9}$$

Предположим от противного к соотношению (6), что $\text{int}\,K(y)\bigcap Q(y)\neq\varnothing$, откуда по следствию 6.3.2 из [6] $\text{int}\,K(y)\bigcap \text{int}(Q(y)\neq\varnothing$. Учитывая также, что при условиях данной теоремы линейные оболочки конусов $K(y)-y$ и $Q(y)-y$ совпадают с R^n, и в соответствии с теоремой 3.4 [7, с. 31] придем к выводу о неотделимости конусов $\text{int}(K(y)-y)\bigcup\{0\}$ и $\text{int}(Q(y)-y)$, которые являются локальными шатрами [7] в точке y множеств $\text{int}\,K(y)\bigcup\{y\}$ и G соответственно. Поскольку $0\in R^n$ не принадлежит их внутренностям, а также учитывая теоремы 1.1 и 6.1 из [6], каждый из этих локальных шатров не является линейным подпространством в R^n. Тогда по теореме 1.3 из [7, с. 204] справедливо $(\operatorname{int} F(y) \bigcup \{y\}) \bigcap G \setminus \{y\} \neq \varnothing$, что противоречит (9) и доказывает необходимость выполнения условия (6) $\forall\ y \in Sl(F,G)$.

Замечание 1. Требование линейной независимости $\{\nabla f_i(y) \,|\, i \in N_\ell\}$ и $\{\nabla g_i(y) \,|\, i \in N(y)\}$ приводит к выполнению соотношений: $\operatorname{int}K(y)\neq\varnothing$, $\operatorname{int}Q(y)\neq\varnothing$, $\operatorname{int}K(y)=\operatorname{ri}K(y)$, $\operatorname{int}Q(y)=\operatorname{ri}Q(y)$. Учитывая следствие 6.3.2 из [6], заключаем, что $\operatorname{int} K(y) \bigcap Q(y) = \varnothing \Leftrightarrow \operatorname{int} K(y) \bigcap \operatorname{int} Q(y) = \varnothing \Leftrightarrow K(y) \bigcap \operatorname{int} Q(y) = \varnothing$.

Замечание 2. Для необходимых условий слабой эффективности требования псевдовыпуклости функций $g_i(x)$, $i \in N_m$, и $-f_i(x)$, $i \in N_\ell$, можно опустить.

Следствие 1. $\forall y \in Sl(F,X)$: $(FrK(y) \setminus K_0(y)) \bigcap Q(y) = \varnothing \Rightarrow y \in P(F,X)$, $FrK(y) \bigcap Q(y) = \{y\} \Rightarrow y \in Sm(F,X)$.

Следствие 2. $\forall y \in P(F,X)$: $K_0(y) \bigcap Q(y) = \{y\} \Rightarrow y \in Sm(F,X)$.

Теорема 5. Если $\operatorname{int} K(y) \neq \varnothing$ и для некоторой точки $y \in \operatorname{vert} \Pi$ функции $g_i(x)$, $i \in N(y)$, строго псевдовыпуклые, то справедливо следующее высказывание: $y \in Sl(F,G) \Leftrightarrow y \in Sm(F,G)$.

Доказательство. Пусть $y \in Sl(F,G)$. Предположим от противного, что $y \notin Sm(F,G)$ и в соответствии с утверждением 1 и формулами (2) справедливо соотношение $F(y) \bigcap G(y) \setminus \{y\} \neq \varnothing$. Учитывая строгую выпуклость множества $X(y)$, а также следствие 6.3.2 из [6], истинны следующие высказывания: $F(y) \bigcap G(y) \setminus \{y\} \neq \varnothing \Rightarrow F(y) \bigcap \operatorname{int} G(y) \neq \varnothing \Rightarrow \operatorname{int} F(y) \bigcap G(y) \neq \varnothing$, откуда по утверждению 1 и формулам (2) делаем вывод, что $y \notin Sl(F, G)$, и получаем противоречие. Таким образом справедливо высказывание $y \in Sl(F,G) \Rightarrow y \in Sm(F,G)$. Обратное утверждение очевидно, так как $Sm(F,G) \subseteq Sl(F,G)$.

Следствие 3. При условиях теоремы 5 и псевдовогнутости функций $f_i(x)$, $i \in N_\ell$, $-g_i(y)$, $i \in N(y)$, условие (6) является достаточным для эффективности и строгой эффективности точки $y \in \operatorname{vert} \Pi$. Если учесть все условия теоремы 4, то (6) будет необходимым условием того, чтобы $y \in P(F,G)$ и $y \in Sm(F,G)$.

Отметим, что $\forall y \in Sl(F,X)$ справедливо включение $K(y) \bigcap Q(y) \subseteq \bigcup\limits_{i \in N(y)} Q_0^i(y)$.

Исходя из следствий 1, 2 делаем вывод, что $\forall y \in Sl(F,X)$:

$$(FrK(y) \setminus K_0(y)) \bigcap (\bigcup_{i \in N(y)} Q_0^i(y)) = \varnothing \Rightarrow y \in P(F,X),$$

$$(\bigcup_{i \in N_\ell} K_0^i(y)) \bigcap Q(y) = \{y\} \vee FrK(y) \bigcap (\bigcup_{i \in N(y)} Q_0^i(y)) = \{y\} \vee$$

$$\vee(\bigcup_{j\in N_\ell} K_0^j(y))\bigcap(\bigcup_{i\in N(y)} Q_0^i(y))=\{y\}\Rightarrow y\in Sm(F,X)$$

и $\forall y\in P(F,X):\quad K_0(y)\bigcap(\bigcup_{i\in N(y)} Q_0^i(y))=\{y\}\Rightarrow y\in Sm(F,X).$

Заключение. Получены необходимые и достаточные условия оптимальности разных видов решений векторных задач комбинаторной оптимизации. Важной особенностью многогранников, возникающих в комбинаторной оптимизации при описании выпуклых оболочек допустимого множества решений, является то, что для них часто оказывается выполненным свойство равенства либо включения допустимого множества решений во множество вершин многогранника, описывающего выпуклую оболочку. Таким образом, появляется возможность сведения решения исходной задачи к многокритериальной задаче линейного программирования, что может быть достаточно эффективно.

Н.В. Семенова

УМОВИ ОПТИМАЛЬНОСТІ У ВЕКТОРНИХ ЗАДАЧАХ КОМБІНАТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

Досліджені різні умови оптимальності векторних задач дискретної оптимізації на комбінаторній допустимій множині, яка описується псевдоопуклими функціями обмежень. На основі використання інформації про структуру опуклої оболонки допустимої множини задачі сформульовані необхідні й достатні умови оптимальності різних видів ефективних розв'язків.

N.V. Semenova

CONDITIONS OF OPTIMALITY FOR VECTOR COMBINATORIAL OPTIMIZATION PROBLEMS

The paper studies different types of optimality conditions for vector combinatorial optimization problems with psewdoconvex constraints. The necessary and sufficient conditions of optimality for different-type effective solutions are obtained|received|. On basis the use|utillizing| of information about the structure of convex hull of feasible solutions.

1. *Подиновский В.В., Ногин В.Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. – М.: Наука, 1982. – 256 с.
2. *Лебєдєва Т.Т., Семенова Н.В., Сергієнко Т.І.* Умови оптимальності та розв'язуваності в задачах лінійної векторної оптимізації з опуклою допустимою множиною // Доп. НАН України. – 2003. – № 10. – С. 80 – 85.
3. *Лебєдєва Т.Т., Семенова Н.В., Сергієнко Т.І.* Деякі умови оптимальності та розв'язуваності в задачах векторної оптимізації з опуклою допустимою множиною // Теорія оптимальних рішень. – 2002. – № 1. – С. 142 – 148.
4. *Стоян Ю.Г., Ємець О.О.* Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. – К.: ІСДО, 1993. – 188 с.
5. *Ємець О.О., Колєчкіна Л.М.* Задачі комбінаторної оптимізації з дробово-лінійними цільовими функціями. – К.: Наук. думка, 2005. – 118 с.
6. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. – М.: Мир, 1973. – 470 с.
7. *Пшеничный Б.Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. – М.: Наука, 1980. – 320 с.

Получено 07.04.2008