УДК 519.8

Э.И. НЕНАХОВ

РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ С КВАДРАТИЧНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Рассматриваются две оптимизационные задачи на пересечении конечного числа шаров в пространстве R^n. Получены достаточные условия сведения первой задачи к специальной задаче выпуклого программирования. Приводится случай, когда достаточные условия не выполняются. Вторая задача сводится к минимизации квадратичной выпуклой функции на единичном симплексе.

Общая задача вогнутого программирования может иметь локальные экстремумы на границе допустимого множества и весьма сложно найти ее глобальный экстремум [1]. Это обстоятельство не дает возможности применять эффективные алгоритмы, созданные для решения задач выпуклого программирования. Исследуемая первая оптимизационная задача дает возможность ее применения к так называемой задаче максимальной локализации [2].

Рассмотрим следующую задачу в пространстве R^n:

$$\max\{(x,x) \mid (x,x)+(a_i,x)\le b_i,\ i=1,\dots,m\}= \\ =\max\{(x,x) \mid x\in D(b)\}, \quad (1)$$

где вектор $b=(b_1,\dots,b_m)$, а допустимая область $D(b)\ne\varnothing$.

Определим вогнутую функцию $\varphi(x)=\min\limits_{1\le i\le m}(b_i-(a_i,x))$ и рассмотрим задачу выпуклого программирования:

$$x(b)=\arg\max\{\varphi(x) \mid x\in D(b)\}. \quad (2)$$

Покажем, что задача (1) тесно связана со следующей задачей вогнутого программирования:

$$v=\arg\max\{(x,x) \mid (a_i,x)\le b_i, i=1,\dots,m\}. \quad (3)$$

Рассмотрим задачу (1) в более общей форме (относительно параметра p):

$$u(p)=\arg\max\{(x,x) \mid (x,x)+ \\ +(a_i,x)\le b_i+p,\ i=1,\dots,m\}. \quad (4)$$

Пусть $p = \left\| v^2 \right\|$, поскольку v – допустимый вектор для задачи (4), то

$$\left(u\left(\| v \|^2\right), u\left(\| v \|^2\right)\right) \geq \| v \|^2 . \tag{5}$$

Из определения $u(p)$ следует, что

$$\left(u\left(\| v \|^2\right), u\left(\| v \|^2\right)\right) + \left(a_i , u\left(\| v \|^2\right)\right) \leq b_i + \| v \|^2 ,\ i = 1,\dots,m,$$

или ввиду (5)

$$\left(a_i ,\ u\left(\| v \|^2\right)\right) \leq b_i + \| v \|^2 - \left(u\left(\| v \|^2\right), u\left(\| v \|^2\right)\right) \leq b_i ,\ i = 1,\dots,m .$$

Итак, $u\left(\| v \|^2\right)$ – допустимый вектор задачи (3), а значит выполняется

$$\left(u\left(\| v \|^2\right), u\left(\| v \|^2\right)\right) \leq \| v \|^2 . \tag{6}$$

Объединяя неравенства (5) и (6), получаем равенство $\left(u\left(\| v \|^2\right), u\left(\| v \|^2\right)\right) = \| v \|^2$, т. е. оптимальные значения целевых функций задач (3) и (4) совпадают. Таким образом, относительно параметра p существует решение $\overline{p}$ уравнения $(u(p), u(p)) = p$, причем вектор $u(\overline{p})$ – решение задачи вогнутого квадратичного программирования.

Лемма. Для того, чтобы вектор $x(b)$ был решением задачи (1), необходимо и достаточно, чтобы $x(b)$ принадлежал границе множества $D(b)$.

Теорема 1. Для того, чтобы вектор $x(b)$ был решением задачи (1), необходимо и достаточно, чтобы $0 \overline{\in} C = co\{a_i ,\ i = 1,\dots,m\}$.

Доказательство. Пусть множество индексов $I(x) = \{i : b_i - (a_i , x) = \varphi(x)\}$, множество векторов $M(x) = \left\{ g : g = -\sum_{i \in I(x)} \lambda_i a_i ,\ \sum_{i \in I(x)} \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geq 0,\ i \in I(x) \right\}$. Если при некотором b $x(b)$ – внутренняя точка $D(b)$, то из определения $x(b)$ следует, что $0 \in M(x(b))$ [3]. Отсюда $0 \in C$.

Далее, пусть $0 \in C$. В качестве b возьмем вектор с положительными компонентами $b = (1,\dots,1)$. Так как $0 \in \operatorname{int} D(b)$, то сопряженный конус к конусу возможных направлений в точке $x = 0$ к множеству $D(b)$ содержит единственный нулевой вектор. Однако $0 \in C$, тогда $0 \in M(0)$ и, следовательно, $0 = x(b)$. Для данного b $x(b) \in \operatorname{int} D(b)$ и согласно лемме $x(b)$ не является решением исходной задачи. Таким образом, $x(b) \in \operatorname{int} D(b)$, если и только если $0 \in C$, что доказывает теорему.

Следствие. Если $0 \overline{\in} C$, то задача (1) имеет единственное решение.

Теорема 2. Если существует вектор $a \neq 0$, такой, что $(a, a_i) \geq 0$, $i = 1,\dots,m$, то найдется решение задачи (2), являющееся решением задачи (1).

Доказательство. Если $x(b)$ принадлежит границе $D(b)$, то утверждение теоремы очевидно. Пусть $x(b) \in \operatorname{int} D(b)$. Определим значение параметра λ_0:

$$\lambda_0 = \max\{\lambda \mid (x(b) - \lambda a) \in D(b)\}.$$

Покажем, что $(x(b) - \lambda_0 a)$ – искомое решение задачи (2). Действительно, данный вектор принадлежит границе строго выпуклого множества $D(b)$ и $\varphi(x(b) - \lambda_0 a) = \min\limits_{1 \leq i \leq m}(b_i - (a_i, x(b)) + \lambda_0 (a_i, a)) \geq \varphi(x(b))$. Тогда, согласно лемме $(x(b) - \lambda_0 a)$ – искомый вектор.

Далее, рассмотрим преобразование T из R^n в $R^n : y = Tx = x/(x,x)$, $y = 0$ при $x = 0$. Обозначим $G_- = \{i : b_i \leq 0\}$, $G_+ = \{i : b_i > 0\}$. Поскольку $(x,x) \cdot (y,y) = 1$, то применение преобразования T к задаче (1) приводит к следующей задаче:

$$\min\{(y,y) \mid 1 + (a_i, y) \leq b_i (y,y),\ i = 1,\dots,m\}. \tag{7}$$

Если решение задачи (7) ненулевое, то оно определяет и решение исходной задачи. Если $G_+ = \varnothing$, то задача (7) выпуклого программирования. В этом случае нет необходимости исследовать задачу (7), так как она сводится к предыдущим результатам. Действительно, можно предположить, что существует $\bar{x} \in D(b)$, $\bar{x} \neq 0$. Ибо, если $D(b) = \{0\}$, то можно формально утверждать, что решение задачи (2) дает решение задачи (1). Ввиду $b \leq 0$ для ненулевого $\bar{x}$ выполняются неравенства $(\bar{x}, \bar{x}) + (a_i, \bar{x}) \leq 0$, $i = 1,\dots,m$. Докажем, что $0 \overline{\in} C$. Если это не так, то найдутся $\lambda_i \geq 0$, $i = 1,\dots,m$, $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$, такие, что $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i a_i = 0$. Умножая каждое предыдущее неравенство на λ_i и складывая результаты, получаем $(\bar{x}, \bar{x}) \leq 0$. Но $\bar{x} \neq 0$, тогда $0 \overline{\in} C$. По теореме 1 любое решение задачи (2) есть решение задачи (1).

Предположим теперь, что $G_+ \neq \varnothing$. Определим выпуклую функцию $\Psi(y) = \max\limits_{i \in G_+} (1 + (a_i, y))/b_i$ и выпуклое множество

$$y = \{ y : 1 + (a_i, y) \leq b_i (y,y),\ i \in G_- \}.$$

Рассмотрим следующую задачу выпуклого программирования:

$$y(b) = \arg\min\{\Psi(y) \mid y \in Y\}.$$

Будем считать, что эта задача имеет единственное решение.

Теорема 3. Если $(y(b), y(b)) \geq \Psi(y(b))$, то ненулевой вектор

$$y^* = \arg\min\left\{\max\{(y,y),\Psi(y)\} \mid y\in Y\right\} \tag{8}$$

и вектор $x^* = y^*/(y^*, y^*)$ являются решением задачи (7) и (1) соответственно.

Доказательство. Из единственности $y(b)$ и условия теоремы вытекает, что $(y^*, y^*) \ge \Psi(y^*)$. Тогда $(y^*, y^*) \ge (1 + (a_i, y^*))/b_i$, $i\in G_+$, и учитывая $y^* \in Y$, то y^* – допустимое решение задачи (7). Покажем, что y^* – оптимальное решение. Предположим, что это не так, т. е. для некоторого допустимого решения $\bar{y}$ выполняется $(\bar{y},\bar{y}) < (y^*, y^*)$. Тогда для $i\in G_+$ имеем $(1+(a_i,\bar{y}))/b_i \le (\bar{y},\bar{y}) < (y^*, y^*)$ и, следовательно,

$$\max\{(\bar{y},\bar{y}),\Psi(\bar{y})\} < (y^*, y^*) = \max\{(y^*, y^*),\Psi(y^*)\}.$$

Данное строгое неравенство противоречит определению y^*. Итак, y^* – решение задачи (7). Очевидно, что $x^* = y^*/(y^*, y^*)$ – решение задачи (1).

Ясно, что для достаточно больших b_i, $i\in G_+$, условие теоремы 3 выполняется. Поэтому для таких b_i решение задачи (1) может быть получено в результате решения задачи выпуклого программирования (8).

Итак, множество векторов b, при которых выполняется условие теоремы 3, не пусто. Случай, когда вектор b таков, что не выполняется условие теоремы 3 и $0\in C$ (т. е. не выполняется условие теоремы 1), требует дальнейшего исследования.

Рассмотрим случай, когда $m = n+1$ и векторы $a_1 - a_{n+1}, \dots, a_n - a_{n+1}$ – линейно независимы. Предположим, что нарушено условие теоремы 1 $0\in C$, так что существуют $\bar{\lambda}_i \ge 0$, $i = 1, \dots, n+1$, $\sum_{i=1}^{n+1}\bar{\lambda}_i = 1$, такие, что $\sum_{i=1}^{n+1}\bar{\lambda}_i a_i = 0$.

Введем дополнительные компоненты $\zeta_i \ge 0$, $i = 1, \dots, n+1$. Тогда исходную задачу запишем так:

$$\max\left\{(x,x) \mid (x,x) + (a_i,x) + \zeta_i = b_i,\ i = 1,\dots,n+1,\ \zeta_i \ge 0\right\}. \tag{9}$$

Умножив каждое полученное равенство в (9) на $\bar{\lambda}_i$ и сложив результаты, получим

$$(x,x) = -\sum_{i=1}^{n+1}\bar{\lambda}_i\zeta_i + \sum_{i=1}^{n+1}\bar{\lambda}_i b_i .$$

Теперь в качестве целевой функции задачи (9) можно взять $-\sum_{i=1}^{n+1}\bar{\lambda}_i\zeta_i$. Из каждых n первых ограничений в (9) вычтем последнее ограничение и получим эквивалентную систему ограничений. Тогда задача (9) преобразуется в следующую эквивалентную форму:

$$\min\left\{\sum_{i=1}^{n+1}\bar{\lambda}_i\zeta_i \,\middle|\, (a_i-a_{n+1},x)+\zeta_i-\zeta_{n+1}=b_i-b_{n+1},\ i=1,\dots,n,\right.$$
$$\left.(x,x)+(a_{n+1},x)+\zeta_{n+1}=b_{n+1},\ \zeta_i\ge 0,\ i=1,\dots,n+1\right\}.$$

Так как система векторов $\{a_i-a_{n+1},\ i=1,\dots,n\}$ – линейно независима, то вектор x разрешим относительно $z=(\zeta_1,\dots,\zeta_{n+1})$, т. е. $x=g+Gz$, где g – вектор, G – невырожденная матрица. Последнюю экстремальную задачу запишем так:

$$\min\left\{\sum_{i=1}^{n+1}\bar{\lambda}_i\zeta_i \,\middle|\, (g+Gz,\ g+Gz)+(a_{n+1},g+Gz)+\zeta_{n+1}=b_{n+1},\ z\ge 0\right\}. \quad (10)$$

Если $(g,g)+(a_{n+1},g)=b_{n+1}$, то $z=0$ – решение задачи (10). Если $(g,g)+(a_{n+1},g)>b_{n+1}$, то $z=0$ – не допустимый вектор этой задачи.

Решение задачи выпуклого программирования

$$\min\left\{\sum_{i=1}^{n+1}\bar{\lambda}\zeta_i \,\middle|\, (g+Gz,\ g+Gz)+(a_{n+1},g+Gz)+\zeta_{n+1}\le b_{n+1},\ z\ge 0\right\}$$

также будет решением задачи (10).

Наконец, если $(g,g)+(a_{n+1},g)<b_{n+1}$, то необходимо найти конечное множество неотрицательных векторов M, полученных как пересечение координатных осей в пространстве R^{n+1} векторов z с эллипсоидом

$$E=\{z:(g+Gz,g+Gz)+(a_{n+1},g+Gz)+\zeta_{n+1}\le b_{n+1}\}.$$

Вектор $\bar{z}$, для которого выполняется $\bar{z}=\arg\min\left\{\sum_{i=1}^{n+1}\bar{\lambda}_i\zeta_i \,\middle|\, z\in M\right\}$, будет решением задачи (10), а вектор $\bar{x}=g+G\bar{z}$ – решением исходной задачи.

Известен способ сведения задачи линейного программирования к задаче строго вогнутого программирования, для решения которой разработаны различные эффективные методы [4]. Укажем возможность сведения задачи вогнутого программирования к задаче строго вогнутого программирования.

В качестве целевой функции задачи вогнутого программирования в R^n всегда можно брать линейную функцию:

$$\max\{(c,x)|\varphi(x)\ge 0,\ (a_i,x)\le b_i,\ i=1,\dots,m\}=\max\{(c,x)|\ x\in D\}, \quad (11)$$

где $\varphi(x)$ – вогнутая функция, множество $M=\{x\in R^n:(a_i,x)\le b_i, i=1,\dots,m\}$ – ограниченное.

Обозначим D^* множество решений задачи (11) и пусть выполняется условие Слейтера.

Определение. Задача вогнутого программирования удовлетворяет условию U, если существует $\varepsilon^* > 0$, такое, что для всех $\varepsilon,\ 0 < \varepsilon \le \varepsilon^*$, справедливо равенство

$$x^* = \arg\max\{(c,x) - \varepsilon(x,x) \mid x \in D\} = \arg\max\{-(x,x) \mid x \in D^*\}. \quad (12)$$

Теорема 4. Для того, чтобы задача вогнутого программирования удовлетворяла условию U, необходимо и достаточно, чтобы функция Лагранжа задачи строго вогнутого программирования

$$\max\{-(x,x) \mid (c,x) \ge (c,x^*),\ \varphi(x) \ge 0,\ x \in M\} = \max\{-(x,x) \mid x \in D^*\} \quad (13)$$

обладала седловой точкой на множестве $M \times R_+^2$.

Доказательство. Необходимость. Пусть справедливо условие U. Для задачи $\max\{(c,x) - \varepsilon(x,x) \mid x \in D\},\ 0 < \varepsilon \le \varepsilon^*$, выполнены условия теоремы Куна–Таккера [4]. Тогда существует число $\lambda > 0$, такое, что

$$(c,x^*) - \varepsilon(x^*,x^*) \ge (c,x) - \varepsilon(x,x) + \lambda\varphi(x),\ \forall x \in M,$$

или

$$-(x^*,x^*) \ge -(x,x) + \frac{1}{\varepsilon}((c,x) - (c,x^*)) + \frac{\lambda}{\varepsilon}\varphi(x),\ \forall x \in M.$$

Это означает, что существует седловая точка функции Лагранжа задачи (13) [4].

Достаточность. Пусть (x^*,λ) – седловая точка функции Лагранжа задачи (11), $x^* \in D^*$ (в силу условия Слейтера):

$$(c,x^*) \ge (c,x) + \lambda\varphi(x),\ \forall x \in M,\ \lambda > 0. \quad (14)$$

Однако по условию теоремы существует седловая точка функции Лагранжа задачи (13) $(x^*,\lambda_0,\lambda_1),\ \lambda_0 \ge 0,\ \lambda_1 \ge 0$:

$$-(x^*,x^*) \ge -(x,x) + \lambda_0((c,x) - (c,x^*)) + \lambda_1\varphi(x),\ \forall x \in M. \quad (15)$$

В случае $\lambda_0 = 0$ из (15) следует $x^* = \arg\max\{-(x,x) \mid x \in D\}$ и для любого $\varepsilon > 0$ выполняется условие $-\varepsilon(x^*,x^*) \ge -\varepsilon(x,x),\ \forall x \in D$. Складывая это неравенство с неравенством (14) и учитывая (13), получаем выполнение (12) для всех $\varepsilon > 0$.

В случае $\lambda_0 > 0$, из (15) следует

$$(c,x^*) - \varepsilon^*(x^*,x^*) \ge (c,x) - \varepsilon^*(x,x) + \lambda_2\varphi(x),\ \forall x \in M, \quad (16)$$

где $0 < \varepsilon^* = 1/\lambda_0,\ \lambda_2 = \lambda_1/\lambda_0 \ge 0$. Пусть $0 < p \le 1$, умножим (14) на $(1-p)$, а (16) – на p, сложим полученные неравенства. Тогда для $\varepsilon = p\varepsilon^*$

$$(c,x^*) - \varepsilon(x^*,x^*) \ge (c,x) - \varepsilon(x,x) + (p\lambda_2 + (1-p)\lambda)\,\varphi(x),\ \forall x \in M,$$

из которого вновь следует (12).

Заметим, что общая задача линейного программирования удовлетворяет условию U [4].

В заключение, рассмотрим задачу поиска центра шара наименьшим радиусом, описанным вокруг пересечения конечного числа шаров в R^n. Существование решения этой задачи обеспечивает

Теорема 5 [3]. Для того, чтобы точка x_0 была центром шара наименьшего радиуса, описанного вокруг компакта A, необходимо и достаточно найти такие точки $y_i \in A, i = 0,1, \dots ,n$, лежащие на поверхности шара, что x_0 принадлежит симплексу, натянутому на эти точки.

Пусть $\operatorname{int}\left(\bigcap_{i=1}^{m} B(a_i, r_i)\right) \neq \varnothing$, где шар $B(a_i, r_i)$ задается так:

$$\| x - a_i \|^2 \le r_i^2,\ i = 1, \dots ,m. \tag{17}$$

Требуется решить оптимизационную задачу относительно переменных y, r:

$$\min r$$

$$\bigcap_{i=1}^{m} B(a_i, r_i) \subseteq B(y, r),$$

$$y \in R^n,\ r \in R^1. \tag{18}$$

Умножив каждое неравенство в (17) на $\lambda_i \ge 0,\ i = 1, \dots ,m,\ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$, и сложив их получим после некоторых преобразований, что любая точка x, удовлетворяющая системе (17), также удовлетворяет неравенству

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i \right\|^2 \le \left\| \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i \right\|^2 - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(\| a_i \|^2 - r_i^2 \right) = r^2(\lambda).$$

Итак, $\bigcap_{i=1}^{m} B(a_i, r_i) \subseteq B(e(\lambda), r(\lambda))$, где центр описанного шара $e(\lambda) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i$, радиус шара – $r(\lambda)$, а вектор $\lambda = (\lambda_1, \dots ,\lambda_m)$ принадлежит единичному симплексу S. Матрица квадратичной функции $r^2(\lambda)$ задает определитель Грама, построенный на векторах $a_i,\ i = 1, \dots ,m$. Из линейной независимости этих векторов следует строгая положительность данного определителя.

Естественно, в общем случае решение задачи выпуклого квадратичного программирования $\min_{\lambda \in S} r^2(\lambda) = r^2(\lambda^*)$ может не давать точного решения задачи

(18), а будет некоторым его приближением. Если множество $\bigcap_{i=1}^{m} B(a_i, r_i)$ окажется строго внутри построенного шара $B(e(\lambda^*), r(\lambda^*))$, то необходимо уменьшить радиус шара $r(\lambda^*)$, не меняя положение его центра. Для решения задачи (18) в [5] предложен другой подход, основанный на свойствах квадратичных выпуклых отображений. Для случая $m \le n-1$ доказано, что шар $B(e(\lambda^*), r(\lambda^*))$ дает точное решение исходной задачи, т. е. фактически он удовлетворяет требованиям теоремы 5.

Е.І. Ненахов

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДЕЯКИХ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧ З КВАДРАТИЧНИМИ ОБМЕЖЕННЯМИ

Розглянуто дві оптимізаційні задачі на перетині кінцевого числа куль в R^n. Отримані достатні умови зведення першої задачі до спеціальної задачі опуклого програмування. Описано випадок, коли достатні умови не виконуються. Друга задача зводиться до мінімізації квадратичної опуклої функції на одиничному симплексі.

E.I. Nenakhov

SOLUTION OF SOME OPTIMIZATION PROBLEMS WITH QUADRATIC CONSTRAINTS

The two optimization problems on a set, determined by the intersection of a finite collection of balls in R^n is considered. Sufficient conditions of reducing a first problem to special convex programming problem are formulated. A case with violation of the sufficient conditions is proposed. A second problem can be reduced to minimizing a convex quadratic function over the unit simplex.

1. *Horst R., Tuy H.* Global optimization (Deterministic approaches). – Berlin: Springer – Verlag, 1990. – 696 p.
2. *Dasarthy B., White L.* A maximin location problem // Oper. Res. – 1980. – **28**, N 6. – P. 1385 – 1401.
3. *Пшеничный Б.Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. – М.: Наука, 1980. – 319 с.
4. *Эрроу К., Гурвиц Л., Удзава Х.* Исследования по линейному и нелинейному программированию. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 333 с.
5. *Beck A.* On the convexity of a class of quadratic mappings and its application to the problemof finding the smallest ball enclosing a given intersection of balls // J. Glob. Optim. – 2007. – **39**, N 1. – P. 113 – 126.

Получено 02. 04. 2008