УДК 519.21

В.С. КИРИЛЮК, А.С. БАБАНИН

ПОЛИЭДРАЛЬНЫЕ МЕРЫ РИСКА И РОБАСТНЫЕ РЕШЕНИЯ

По кусочно-линейным функциям полезности в работе введены полиэдральные меры риска. Задачи минимизации таких мер риска для портфеля сведены к проблемам линейного программирования. Получаемые решения являются робастными в соответствующем смысле.

Введение. Неопределенность, возникающая в многочисленных проблемах принятия решения и имеющая разнообразную природу (неполнота информации о процессах, их стохастический характер, прочее) требует применения математического аппарата, позволяющего находить решения, являющиеся приемлемыми даже в случае реализации "неблагоприятных" значений параметров изучаемых процессов или сценариев развития событий. Важным вариантом такого аппарата может служить аппарат мер риска.

Заметим, что классический вариант риска отклонения в виде дисперсии является естественным для измерения риска в теории ошибок, но непригоден для оценивания финансового риска потерь (отклонения вниз). Широко используемый в финансовых приложениях как функция риска VaR (Value at Risk) не является субаддитивным, следовательно, он может увеличиваться при полезной диверсификации финансовой позиции.

В широко цитируемой ныне в финансовой математике работе [1] была введена монетарная мера, названная когерентной мерой риска (КМР), которая представляется в виде

$$\rho(X) = \sup\{E_P[-X] \;/\; P \in Q\}, \qquad (1)$$

где Q – некоторое выпуклое замкнутое множество вероятностных мер, и обладает всеми с теоретической точки зрения разумными свойствами, постулируемыми в виде 4-х аксиом. Такая мера, по сути, означает с точностью до знака среднее значение случайной величины (сл.в.) X с учетом случая ее наихудшего распределения на множестве вероятностных мер Q.

Решение, принимаемое с учетом значения КМР из (1) при минимизации этой величины, или ее участии в некоторых ограничениях является ***робастным*** относительно множества Q. Так, если значение КМР является допустимым как среднее значение сл.в. $(-X)$, то получаемое решение пригодно, независимо от реализации распределения сл. в. X по множеству мер из Q.

Заметим, что некоторым подклассом таких мер являются введенные в [2] и развиваемые в [3, 4] полиэдральные когерентные меры риска (ПКМР), постулирующие для конечных дискретно распределенных сл.в. полиэдральность Q.

КМР может быть обобщена до выпуклой меры риска следующего вида:

$$\rho(X) = \sup\{E_P[-X] - \alpha(P) \ / \ P\in Q\}, \qquad (2)$$

где $\alpha(.)$ -- некоторый выпуклый функционал. Например, такой является энтропийная мера риска [5].

Меры риска и функционал полезности. Обратимся теперь к классической форме функции полезности [6], когда предпочтения лица, принимающего решения (ЛПР), определяются значениями функции вида

$$U(X) = E_P[u(X)], \qquad (3)$$

где P – известная вероятностная мера, $u(.)$ – вогнутая возрастающая функция полезности, которая существует при выполнении соответствующих аксиом [7].

Однако представление (3) не всегда согласуется с поведением ЛПР в условиях неопределенности, о чем свидетельствуют ряд известных парадоксов Д. Элсберга, М. Але [8], Д. Канемана, А.Тверского [9] (дополнительные аргументы см. в [10]). В последующем развитии теории, направленном на преодоление противоречий, рассматривался следующий функционал полезности [11]:

$$U(X) = \inf\{E_P[u(X)]/ \ P\in Q\} \qquad (4)$$

для некоторого класса вероятностных мер Q на множестве сценариев.

Такое предпочтение не определяется единственной вероятностной мерой P, а подразумевает целый класс вероятностных моделей, порождаемых Q. Нетрудно видеть, что с точностью до знака этот функционал подобен КМР.

Отметим, что такая аналогия была использована в [12] для введения функционала полезности, подобного выпуклой мере риска вида (2):

$$U(X) = \inf\{E_P[u(X)] + \alpha(P) \ / \ P\in Q\}. \qquad (5)$$

Множества вероятностных мер Q, участвующие в формулировке критериев (1), (2), (4), (5), могут строиться различным образом, исходя из содержательной постановки задач. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Самым простым примером может быть неопределенность (незнание) реального распределения, когда о изучаемых процессах известно лишь то, что вероятностная мера P принадлежит некоторому классу Q.

Пример 2 [5]**.** Более сложным вариантом может служить описание финансовой позиции при ослабленной гипотезе об эффективности финансового рынка, когда существует вероятностная мера P, которая не допускает никакой стратегии получения прибыли без риска. Тогда существует мартингальная мера P^*, эквивалентная мере P. А множество $\mathfrak{R}^*$ – класс всех таких мер можно использовать в качестве множества Q.

Пример 3. В случае потенциально больших финансовых потерь в качестве множеств Q можно использовать хвосты распределений. Так строятся CVaR [13], которые при использовании в ограничениях, позволяют учитывать риски больших потерь, сосредоточенные на хвостах распределений.

Замечание 1. Выбираемое в зависимости от содержательной постановки задачи Q – это множество вероятностных мер для распределений, на наихудший случай из которых перестраховывается ЛПР. Поэтому решения, принимаемые по таким критериям, оказываются робастными по множеству Q в смысле [14].

Отметим, что, как правило, $\alpha(P)$ – это штрафная функция, которая может принимать значения $+\infty$, скажем, вне множества Q. Так в примере 2 [5], $\alpha(P) = 0$, если P – эквивалентная маргинальная мера и $\alpha(P) = +\infty$ – в противном случае.

Определение полиэдральной меры риска. Рассмотрим теперь функционал полезности (5) в виде, аналогичной мере риска:

$$U(X) = -\sup\{E_P[-u(X)] - \alpha(P) \mid P\in Q\} = -\rho(X), \tag{6}$$

где

$$\rho(X) = \sup\{E_P[\mathrm{v}(X)] - \alpha(P) \mid P\in Q\} \tag{7}$$

при обозначениях $\mathrm{v}(X) = -u(X)$, т. е. $\mathrm{v}(.)$ – некоторая монотонно убывающая выпуклая функция.

Теперь вместо максимизации функционала полезности $U(X)$ (6) будем рассматривать минимизацию меры риска $\rho(X)$, описанную посредством (7).

Для простоты изложения будем считать, что сл.в. X – конечная и дискретно распределенная на некотором n числе сценариев. Тогда множество Q является неким выпуклым замкнутым множеством на симплексе $S^n \subset R^n$, распределение сл.в. X представляется в виде вектора $x=(x_1,...,x_n)\in R^n$ и вектора вероятностей сценариев $p=(p_1,...,p_n)\in S^n$. Вектор $\mathrm{v}(x)$ будет описывать распределение сл.в. $\mathrm{v}(X)$ эквивалентным вектором $\mathrm{v}(x)=(\mathrm{v}(x_1),...,\mathrm{v}(x_n))$.

Предположим, что $\alpha(.)$ либо отсутствует, либо описывается линейно по $p=(p_1,...,p_n)$, т. е. функционал $\alpha(P)$ из (6) имеет вид $\langle\alpha, p\rangle$ для некоторого $\alpha=(\alpha_1, ..., \alpha_n)$. Кроме того, исходная неубывающая вогнутая функция полезности $u(.)$: $R\to R$ из (6) – кусочно-линейная, т. е.

$$U(y) = \min\{a_j y + b_j, j=1,\ldots m\},\ a_j \ge 0,\ j=1,\ldots,m;\ \exists j_0 : a_{j_0} > 0. \tag{8}$$

Тогда функция $\mathrm{v}(y) = -u(y)$, участвующая в выражении (7), описывается в виде

$$\mathrm{v}(y) = \max\{-a_j y - b_j, j=1,\ldots m\},\ a_j \ge 0,\ j=1,\ldots,m;\ \exists j_0 : a_{j_0} > 0. \tag{9}$$

Как известно, исходную функцию $u(.)$ можно как угодно точно аппроксимировать кусочно-линейно. Кроме того, они, как правило, именно так и строятся [15].

Тогда, с учетом вышеописанных предположений и обозначений, мера риска $\rho(X)$ из (7) имеет вид

$$\rho(x) = \sup_{p\in Q}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\max_{1\le j\le m}(-a_j x_i - b_j) - \alpha_i\right)p_i\right]. \qquad (10)$$

Или, в более компактной форме,

$$\rho(x) = \sup_{p\in Q} < w(x), p > , \qquad (11)$$

где

$$w(x) = (w(x_1),...,w(x_n)) \text{ , а } w(x_i) = \max_{1\le j\le m}\{-a_j x_i - b_j\} - \alpha_i \text{ , } i = 1,\ldots,n. \qquad (12)$$

Определение. Будем говорить, что мера риска $\rho(.)$ из (7) – *полиэдральная*, если множество Q – некоторый многогранник, т. е. представляется в виде

$$Q = \mathrm{co}\{\ p_i^0 : i = 1,\ldots, k_0\}$$

или эквивалентно,

$$Q = \{p : Bp \le c, p \ge 0\}. \qquad (13)$$

Таким образом, если $\rho(.)$, описанная в виде (11) – (12), является полиэдральной мерой риска (ПМР), то выражение (11), учитывая (13), имеет вид:

$$\rho(x) = \sup_{Bp\le c,\, p\ge 0} < w(x), p > , \qquad (14)$$

где $w(x)$ представлено выражением (12).

Замечание 2. Нетрудно видеть, что мера риска $\rho(.)$, представленная соотношениями (12), (14), строится по исходной функции полезности $u(x)$ из (8) и достаточно естественно обобщает ПКМР [2, 3]. Она является ПКМР при выборе параметров: $a_1 = 1$, $a_j = 0$, $j = 2,\ldots,m$; $b_j = 0$, $j = 1,\ldots,m$; $(\alpha_1,\ldots, \alpha_n) = (0,\ldots,0)$.

Рассмотрим теперь при фиксированном x ПМР (12), (14). Поскольку $\rho(.)$ представляется в правой части (14) как задача линейного программирования (ЛП), перейдем к ее двойственной (см., например [16]). При этом, очевидно, решение исходной задачи ЛП на многограннике из симплекса существует и ограничено, следовательно, решения обеих задач совпадают. Поэтому

$$\rho(x) = \sup_{Bp\le c,\, p\ge 0} < w(x), p > = \inf_{B^T z\ge w(x),\, z\ge 0} < c, z > . \qquad (15)$$

Обратимся теперь к допустимому множеству, описанному в виде $B^T z \ge w(x)$, где $w(x)$ описывается соотношением (12). Нетрудно видеть, что покомпонентные неравенства "≥" для максимумов эквивалентны неравенствам "≥" для всех компонент функций под знаком максимума. Следовательно, условие $B^T z \ge w(x)$ эквивалентно таким m условиям

$$B^T z + a_j x + b_j \eta - \alpha \ge 0,\ j = 1,...,m , \qquad (16)$$

где числа a_j умножаются на вектор x, а числа b_j – на вектор $\eta = (1,\ldots,1)$.

Таким образом, имеет место следующее представление ПМР (12), (14):

$$\rho(x) = \inf_{\substack{B^T z - a_1 x - b_1 \eta - \alpha \ge 0, z \ge 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ B^T z - a_m x - b_m \eta - \alpha \ge 0, z \ge 0}} < c, z > . \tag{17}$$

Это можем сформулировать в виде утверждения.

Утверждение 1. ПМР (12), (14) допускает двойственное представление в виде задачи ЛП (17).

Замечание 3. Хотя количество ограничений в соотношении (17) существенно увеличилось, оно является задачей ЛП, следовательно, решается стандартными средствами и позволяет перейти к проблеме оптимизации портфеля.

Минимизация ПМР для портфеля. Пусть имеется некоторый набор финансовых инструментов (акции, облигации, прочее), из которых, как компонент, необходимо составить портфель. Пусть распределение доходностей r_i, $i = 1,\ldots, k$ всех возможных таких компонент портфеля представлено в виде матрицы H размерностью $n\times k$, чей j-й столбец описывает распределение доходности j-й компоненты. Вектор $q = (q_1,\ldots, q_k)$, который описывает структуру портфеля, рассматривается как переменная, причем $\sum_1^k q_i = 1, q_i \ge 0, i = 1,\ldots,k$. Пусть задана ПМР $\rho(.)$ в виде (12), (14). Необходимо найти оптимальную структуру портфеля, которая обеспечивает минимальную ПМР $\rho(.)$.

Более точно, такая проблема имеет вид

$$\min_{\sum_1^k q_i = 1, q_i \ge 0} \rho(Hq) , \tag{18}$$

или, учитывая (14),

$$\min_{\sum_1^k q_i = 1, q_i \ge 0} \sup_{Bp \le c, p \ge 0} < w(Hq), p > , \tag{19}$$

где $w(.)$ представлено соотношением (12).

Воспользуемся теперь двойственным представлением внутренней подзадачи в виде (17). Нетрудно видеть, что проблема (18) приобретает вид следующей задачи ЛП:

$$\min_{\substack{\sum_1^k q_i = 1, q_i \ge 0, z \ge 0 \\ B^T z - a_1 Hq - b_1 \eta - \alpha \ge 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ B^T z - a_m Hq - b_m \eta - \alpha \ge 0}} < c, z > . \tag{20}$$

Сформулируем это в виде утверждения.

Утверждение 2. Решением задачи минимизации ПМР портфеля, описанной соотношениями (12), (14), (18), есть компонента q решения (q, z) задачи ЛП (20).

Замечание 4. Значение в решении задачи ЛП (20) дает полученное минимальное значение ПМР $\rho(.)$, или же (взятое со знаком "–") – максимальное значение соответствующего функционала полезности $U(.)$ из (6). Соответствующая структура портфеля как решение является робастной в смысле отношения предпочтения, задаваемого этим функционалом.

Иногда в портфельных постановках возникают дополнительные детали. Например, в структуре портфеля нужно учитывать не только доходность компоненты, но и ее относительную текущую цену. В частности, такие модификации на основе CVaR были названы мерами риска CDaR и изучались в [17].

Нетрудно отразить подобные модификации и в нашей постановке. Пусть задан вектор $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_k)$ текущих (относительных) цен компонент портфеля. Тогда вместо соотношения (18), получаем

$$\min_{\sum_1^k q_i = 1, q_i \geq 0} \rho(Hq - < \beta, q > \eta),$$

где $\rho(.)$, как и ранее, описывается соотношениями (12), (14), следовательно,

$$\min_{\sum_1^k q_i = 1, q_i \geq 0} \sup_{Bp \leq c, p \geq 0} < w(Hq - < \beta, q > \eta), p >, \text{ или}$$

$$\min_{\sum_1^k q_i = 1, q_i \geq 0} \sup_{Bp \leq c, p \geq 0} < w((H - D)q), p >, \text{ где } D = \begin{pmatrix} \beta_1, \ldots, \beta_k \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \beta_1, \ldots, \beta_k \end{pmatrix}, \tag{21}$$

а $w(.)$ представлено соотношением (12). Тогда, аналогично предыдущему, получим следующую задачу ЛП:

$$\min_{\substack{\sum_1^k q_i = 1, q_i \geq 0, z \geq 0 \\ B^T z - a_1 (H - D) q - b_1 \eta - \alpha \geq 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ B^T z - a_m (H - D) q - b_m \eta - \alpha \geq 0}} < c, z >. \tag{22}$$

Это можно сформулировать как следствие утверждения 2 при формальной замене матрицы H на $(H - D)$.

Следствие 1. Решение задачи минимизации ПМР портфеля, описанной соотношениями (12), (14), (21), есть компонента q решения (q, z) задачи ЛП (22).

Замечание 5. Иногда в портфельных постановках меры риска необходимо учитывать в ограничениях. Для ограничений на ПМР в виде $\rho(Hq) \leq \rho_0$ $(\rho((H-D)q) \leq \rho_0)$ это не сложно, если воспользоваться соотношением (20) ((22)).

Заключение. В работе изучены ПМР, построенные по кусочно-линейным функциям полезности, которые расширяют класс ПКМР. Их использование в задачах оптимизации портфеля позволяет свести последние к задачам ЛП. Получаемые при этом оптимальные решения – робастные в том смысле, что не являются чувствительными к конкретной вероятностной мере из Q.

В.С. Кирилюк, О.С. Бабанін

ПОЛІЕДРАЛЬНІ МІРИ РИЗИКУ ТА РОБАСТНІ РІШЕННЯ

За кусочно-лінійними функціями корисності введено поліедральні міри ризику. Задачі мінімізації таких мір ризику для портфеля зведено до проблем лінійного програмування. Рішення, які отримуються, є робастними у відповідному сенсі.

V.S. KIrilyuk, O.S. Babanin

POLYHEDRAL RISK MEASURES AND ROBUST SOLUTIONS

According to piecewise-linear utility functions, the polyhedral risk measures are introduced. The risk measure portfolio minimization problems are reduced to linear programming problems. The obtained solutions are robust in appropriate sense.

1. *Arther Ph., Delbaen F., Eber J.M., Heath D.* Coherent measures of risk // Mathematical Finance. – 1999. – **9** . – P. 203–228.
2. *Кирилюк В.С.* О когерентных мерах риска и задаче оптимизации портфеля // Теорія оптимальних рішень. – К.: Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, 2003. – Вип. 2. – С. 111–119.
3. *Кирилюк В.С.* О классе полиэдральных когерентных мер риска // Кибернетика и системный анализ. – 2004. – № 4. – С. 155–167.
4. *Кирилюк В.С.* Полиэдральные когерентные меры риска и оптимизация инвестиционного портфеля // Кибернетика и системный анализ. – 2008. – № 2. – С. 120–133.
5. *Follmer H.* Financial Uncertainty, Risk Measures and Robust Preferences, in Aspects of Mathematical Finance, Marc Yor (ed.). – Berlin: Springer, 2008 – P. 3–14.
6. *Нейман Дж., Моргенштерн О.* Теория игр и экономическое поведение. – М.: Наука, 1970. – 707 с.
7. *Savage L.J.* The Foundations of Statistics. – New York: Wiley, 1954. – 376 p.
8. *Ellsberg D*. Risk, Ambiguity, and the Savage Axioms // J. Quarterly of Economics. – 1961. – **75**. – P. 643–669.
9. *Kahneman D*., *Tversky A*. Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk // Econometrica. – 1979. – **47**(2). – P. 263–291.
10. *Rabin M., Thaler R.H.* Anomalies Risk Aversion // J. of Economic Perspectives. – 2001. – V.15. – N 1. – P. 219–232.
11. *Frittelli M.*, *Rosazza E*. Putting order in risk measures // J. of Banking and Finance. – 2002. – **26**. – P. 1473–1486.
12. *Maccheroni F., Marinacci M., Rustichini A*. Ambiguity Aversion, Robustness, and the Variational Representation of Preferences // Econometrica. – 2006. – **74**. – P. 1447–1498.
13. *Rockafellar R.T., Uryasev S*. Optimization of conditional value-at-risk // J. Risk. – 2000. – **2**. – P. 21–42.
14. *Ermoliev Yu., Hordijk L.* Facets of Robust Decisions, in Coping with Uncertainty: Modeling and Policy Issues, K. Marti, Yu. Ermoliev, M. Makowski, G. Pflug (eds.). – Berlin: Springer, 2006. – P. 3–28.
15. *Фишберн П.* Теория полезности для принятия решений. – М.: Наука, 1978. – 352 с.
16. *Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г.* Линейное программирование (теория, методы и приложения). – М.: Наука, 1969. – 424 с.
17. *Chekhlov A., Uryasev S., Zabarankin M*. Portfolio Optimization with Drawdown Constraints, in Asset and Liability Management Tools, B. Scherer (ed.). – London: Risk Books, 2003. – P. 263–278.

Получено 24.03.2008